MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

193

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE TÜBINGEN
R. NEVANLINNA HELSINKI
E. SCHMIDT BERLIN
F. K. SCHMIDT JENA
I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

42. BAND

QA1
M88
v.42

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJER G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

42. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937

66 53039

QA1
M88
v.42

Inhaltsverzeichnis

Seite

Ahlfors, L. V., und H. Grunsky, Über die Blochsche Konstante 671

Beck, H., Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente auf Raumpunkte 543

Berwald, L., und O. Varga, Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum 710

Berwald, L., Integralgeometrie 25. Über die Körper konstanter Helligkeit. (Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung) 737

Blaschke, W., Integralgeometrie 21. Über Schiebungen. Aus Vorträgen in Breslau und Dresden im Oktober 1936 399

Bompiani, E., und E. Bortolotti, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese 411

Bortolotti, E., und E. Bompiani, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese 411

Bosanquet, L. S., und J. M. Hyslop, On the Absolute Summability of the Allied Series of a Fourier Series 489

Brauer, A., Über eine Erweiterung des kleinen Fermatschen Satzes 255

Churchill, R. V., The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems 567

Digel, E., Über die Existenz von Integralen der partiellen Differentialgleichung $f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ in der Umgebung eines singulären Punktes . . 231

Doetsch, G., Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation 263

Egerváry, E., Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe 221

Erdélyi, A., Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erste Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme 125

Erdélyi, A., Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Zweite Mitteilung. Reihenentwicklungen 641

Feller, W., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. 301

Garten, V., und K. Knopp, Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen 365

Geppert, H., Über den Brunn-Minkowskischen Satz 238

Görtler, H., Zur Addition beweglicher ebener Eibereiche 313

Graf, U., Zur Liniengeometrie im linearen Strahlenkomplex und zur Laguerreschen Kugelgeometrie 189

Grünbergs, E., Über die Bestimmung von zwei speziellen Klassen von Eilinien 51

Grunsky, H., Über die Zielwerte einer ganzen Funktion 674

Grunsky, H., und L. V. Ahlfors, Über die Blochsche Konstante 671

Hadwiger, H., Über die rationale Lagerung des regulären Simplex 625

Hartogs, F., Zur Darstellung und Erweiterung der Baireschen Funktionen . . 144

Hartogs, F., Bemerkung zu meiner Arbeit über Bairesche Funktionen 744

Kamke, E., Über die partielle Differentialgleichung $f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y)$. II. Mitteilung 287

Seite

Klein-Barmen, F., Birkhoffsche und harmonische Verbände 58
Knopp, K., und V. Garten, Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen 365
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie 745
Krull, W., Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. IV. Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen . 767
Lammel, E., Über gewisse Reihen, welche die Potenzreihen als Grenzfall enthalten 389
Manià, B., Sopra un problema di Carleman 700
Moisseiev, N., Über Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung 513
Müller, A., Integralgeometrie 16. Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n 101
Neß, W., Über die Umordnung von bedingt konvergenten Reihen 31
Obrechkoff, N., Sur les fonctions méromorphes limites de fonctions rationnelles 203
Perron, O., Neue periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems 593
Peschl, E., und K. H. Weise, Über das Berührungsmaß von Kurven 82
Pinl, M., Zur integrallosen Darstellung n-dimensionaler isotroper Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_{n+2} 337
Raff, H., Bemerkungen zu zwei Sätzen von Hans Hahn über lineare Integraltransformationen 151
Ridder, J., Über die gegenseitigen Beziehungen einiger „trigonometrischer" Integrationen 322
Rohrbach, H., Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie 1
Rohrbach, H., Anwendung eines Satzes der additiven Zahlentheorie auf eine gruppentheoretische Frage 538
Sauter, I., Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-)Ordnung im projektiven R_n. Zweite Mitteilung 580
Scholz, A., Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. I. Emmy Noether zum Gedächtnis 161
Specht, W., Darstellungstheorie der Hyperoktaedergruppe 629
Specht, W., Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe 774
Stöhr, A., Eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen . 739
Süss, W., Über Affinminimalflächen, die gleichzeitig Minimalflächen sind . . . 697
Tautz, G., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. (Erster Abschnitt) . . 430
Tautz, G., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. (Zweiter Abschnitt) 473
Varga, O., und L. Berwald, Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum 710
Walther, A., Anschauliches zur Gibbsschen Erscheinung und zur Annäherung durch arithmetische Mittel. Herrn Prof. Dr.-Ing. V. Blaeß in Darmstadt zum 60. Geburtstag am 12. September 1936 gewidmet 355
Weise, K. H., und E. Peschl, Über das Berührungsmaß von Kurven 82
Wendt, H., Die gordische Auflösung von Knoten 680
Berichtigungen 780

Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie.

Von

Hans Rohrbach in Berlin.

Sind A und B zwei Mengen von natürlichen Zahlen, so versteht man in der additiven Zahlentheorie nach Schnirelmann unter der Summe $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ der beiden Mengen diejenige Menge, die die Zahlen a aus A, b aus B und alle Zahlen $a+b$ enthält. Nimmt man auch 0 als Element von A und B hinzu, so ist $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ einfach die Menge der Zahlen $a+b$, wo a zu A und b zu B gehört.

Offenbar kann man eine beliebige endliche Anzahl von Mengen natürlicher Zahlen in dieser Weise addieren, da

$$\mathsf{A}+(\mathsf{B}+\Gamma)=(\mathsf{A}+\mathsf{B})+\Gamma$$

ist. Sind speziell alle Summanden einander gleich, so setze man

$$\mathsf{A}+\mathsf{A}+\ldots+\mathsf{A}=h\,\mathsf{A},$$

wenn links h-mal der Summand A auftritt.

Mit Hilfe dieses Summenbegriffs lassen sich die bekanntesten Fragen der additiven Zahlentheorie folgendermaßen zusammenfassen:

Gegeben seien zwei Mengen A und Γ von natürlichen Zahlen. Gibt es dann eine natürliche Zahl h von der Beschaffenheit, daß

$$\Gamma \subseteq h\,\mathsf{A} \tag{1}$$

ist?

Von dieser Art sind z. B. die Fermatschen Sätze über die Darstellbarkeit der Primzahlen von der Form $4l+1$ (und der daraus zusammengesetzten Zahlen) als Summe von zwei Quadratzahlen oder aller natürlichen Zahlen als Summe von Polygonalzahlen, ferner das Waringsche Problem, die Goldbachsche Vermutung u. a. Bei dem zweiten und dritten dieser Probleme ist Γ die Menge aller natürlichen Zahlen, so daß in (1) das Gleichheitszeichen gesetzt werden kann.

Andere Sätze sind von folgender Art: Gegeben seien zwei Mengen A und B. Wieviel Zahlen enthält $\mathsf{A}+\mathsf{B}$, bzw. wieviel Zahlen von $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ liegen unterhalb einer gegebenen natürlichen Zahl n? Hier spielt der Begriff der Dichte einer Menge natürlicher Zahlen eine fundamentale Rolle. In dies Gebiet fallen Sätze von Schnirelmann, Khintchine, Landau, Romanoff, I. Schur, Davenport, Erdös u. a.

Im folgenden soll nun eine hierzu umgekehrte Fragestellung untersucht werden:

Gegeben ist eine Menge Γ von natürlichen Zahlen und eine feste natürliche Zahl h. Gesucht ist eine Menge A *von natürlichen Zahlen mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

1. $\Gamma \subseteq h\,\mathsf{A}$,

2. A *enthält möglichst wenig Elemente bzw. möglichst wenig Elemente unterhalb einer gegebenen natürlichen Zahl n.*

Diese Frage wird behandelt für den Fall, daß $\Gamma = \Omega$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist, und für den Fall, daß $\Gamma = \mathsf{N}$ ein beliebiger endlicher Abschnitt von Ω ist. In beiden Fällen lasse ich 0 als Element zu, so daß im folgenden A, B, $\Gamma, \ldots, \Omega$ stets Mengen bedeuten, die aus natürlichen Zahlen und der Null bestehen. *Jede Menge* A *mit der Eigenschaft* 1. *heißt eine Basis h-ter Ordnung für Γ.* Für $\Gamma = \Omega$ und $\Gamma = \mathsf{N}$ ist A wegen der Eigenschaft 2. von selbst Teilmenge von Γ.

Ist dann die natürliche Zahl h gegeben, und bezeichnet N den Abschnitt

$$\mathsf{N}: \qquad 0, 1, 2, \ldots, n$$

von Ω und A eine Basis h-ter Ordnung für N, so soll A auch eine *Basis h-ter Ordnung für die Zahl n* genannt werden. Eine Basis h-ter Ordnung, deren Elementeanzahl von keiner anderen Basis h-ter Ordnung für dieselbe Menge N untertroffen wird, heiße eine *Minimalbasis h-ter Ordnung für n.*

Ist zunächst $h = 2$, so läßt sich die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis zweiter Ordnung leicht nach unten abschätzen. Da man nämlich mit k Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ höchstens $\frac{k^2+k}{2}$ Summen

$$a_\varkappa + a_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k;\ \varkappa \leqq \lambda)$$

bilden kann und andererseits diese Werte die $n+1$ Zahlen von N darstellen sollen, so muß für jede Basis zweiter Ordnung

$$\frac{k^2+k}{2} \geqq n+1, \tag{2}$$

d. h.

$$k \geqq \sqrt{2n + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} \tag{3}$$

sein. Herr I. Schur hat mich nun im Anschluß an eine Vorlesung über additive Zahlentheorie auf die Vermutung aufmerksam gemacht, daß die hierdurch gegebene Größenordnung $O(\sqrt{n})$ für die Anzahl k_m der Elemente einer Minimalbasis schon die richtige ist, daß es also eine von n nicht abhängende Konstante c gibt mit

$$k_m < c\sqrt{n}.$$

Auf Grund einer Bemerkung von Herrn A. Stöhr kann man, indem man die natürlichen Zahlen im Ziffernsystem der 3 schreibt, zeigen, daß jedenfalls

$$k_m < c\, n^{\frac{\log 2}{\log 3}} < c\, n^{0{,}631}$$

gilt.

Im folgenden beweise ich nun in § 1 die Richtigkeit der Schurschen Vermutung. Darüber hinaus ergibt sich genauer

$$k_m < 2\sqrt{n} \qquad (n > 1), \tag{4}$$

und es werden Methoden angegeben, die für jedes n eine Basis zweiter Ordnung hinzuschreiben gestatten, deren Elementeanzahl kleiner als $2\sqrt{n}$ ist. Diese Basen haben die Eigenschaft, daß ihre Elemente höchstens gleich $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ sind.

In § 2 behandle ich für $h = 2$ den Fall, daß die zu erzeugende Menge $\Gamma = \Omega$ ist, und beweise: Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so läßt sich stets eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ derart bestimmen, daß für alle $n \geqq n_0(\varepsilon)$ die Anzahl der Basiselemente unterhalb n kleiner als $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ ist.

In den §§ 3 bis 5 werden Methoden entwickelt, um die untere Schranke in der Abschätzung (3) bzw. die obere Schranke der Abschätzung (2) zu verbessern. Es ergibt sich, daß

$$n < (\tfrac{1}{2} - \alpha)\, k^2$$

für genügend große k ist mit einem bestimmten, von n und k unabhängigen α.

Die §§ 6 bis 8 dehnen die Untersuchungen der §§ 1 und 2 auf den Fall eines beliebigen natürlichen $h > 2$ aus. Es wird gezeigt, daß es Basen h-ter Ordnung gibt, deren Elementeanzahl für $\Gamma = \mathsf{N}$ kleiner als $h\sqrt[h]{n}$ ist, während für $\Gamma = \Omega$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Anzahl der Basiselemente unterhalb n für genügend große n kleiner als $n^{\frac{1}{h}+\varepsilon}$ ist. Ferner gilt in Analogie zu den Basen zweiter Ordnung, deren Elemente höchstens gleich $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ sind, daß im Falle $\Gamma = \mathsf{N}$ mit einer Basis h-ter Ordnung alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis zum h-fachen der letzten Basiszahl dargestellt werden können. Dies ergibt sich aus der folgenden bemerkenswerten Eigenschaft der konstruierten Basissysteme:

Ist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ mit $\varepsilon_\nu = \pm 1\,(\nu = 1, 2, \ldots, h)$ eine beliebige Verteilung von Vorzeichen, bei der nicht alle $\varepsilon_\nu = -1$ sind, so heiße ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ eine erweiterte

Basis h-ter Ordnung für eine natürliche Zahl n, wenn sich alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, ..., n in jeder der h Formen

(5) $$\varepsilon_1 a_{\alpha_1} + \varepsilon_2 a_{\alpha_2} + \ldots + \varepsilon_h a_{\alpha_h} \qquad (1 \leqq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \leqq k)$$

darstellen lassen. Dann gilt, daß die hier konstruierten Basen h-ter Ordnung von selbst erweiterte Basen h-ter Ordnung für die letzte Basiszahl a_k sind. Hieraus folgt noch, daß auch für die verschärfte Form (5) der Darstellung Basen h-ter Ordnung existieren, deren Elementeanzahl ein $O(\sqrt[h]{n})$ ist.

§ 1.

Es sei zunächst $\Gamma = \mathsf{N}$ und $h = 2$. Dann lautet das Problem folgendermaßen:

Gegeben ist eine natürliche Zahl n. Man bestimme ein System von möglichst wenig nichtnegativen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ derart, daß sich alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, ..., n als Summe von zwei Zahlen des Systems darstellen lassen.

Es ist nun zweckmäßig, das Problem nicht in dieser ursprünglichen Form zu behandeln, wo zu gegebenem n ein möglichst kleines k gesucht wird, sondern in der umgekehrten Formulierung:

Gegeben ist eine natürliche Zahl k. Man bestimme unter allen Basen zweiter Ordnung aus k Elementen eine solche, durch die ein möglichst großer Abschnitt 0, 1, 2, ..., n dargestellt wird.

Mit dieser Aufgabe ist dann auch die ursprüngliche gelöst.

Ist nämlich $n_2(k)$ die größte ganze Zahl derart, daß sich bei gegebenem k alle Zahlen 0, 1, 2, ..., $n_2(k)$ durch eine Basis zweiter Ordnung mit k Elementen darstellen lassen, so liefert die kleinste ganze Zahl k, für die $n_2(k) \geqq n$ ist, zu gegebenem n das gesuchte k.

Definition. Ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ heiße symmetrisch, wenn mit einer Zahl $a_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) auch stets die Zahl $a_k - a_\varkappa$ zum System gehört.

Dann gilt

Satz 1. *Jedes symmetrische System $a_1, a_2, \ldots, a_k$, das eine Basis zweiter Ordnung für die Zahl a_k ist, ist von selbst eine Basis zweiter Ordnung für die (letztmögliche) Zahl $2a_k$.*

Beweis. Nach Voraussetzung kann man jede ganze Zahl g mit $0 \leqq g \leqq a_k$ als Summe $g = a_\varkappa + a_\lambda$ ($1 \leqq \varkappa, \lambda \leqq k$) darstellen. Dann ist aber

$$2a_k - g = a_k - a_\varkappa + a_k - a_\lambda = a'_\varkappa + a'_\lambda,$$

wo $a'_\varkappa = a_k - a_\varkappa$ und $a'_\lambda = a_k - a_\lambda$ wegen der Symmetrie des Systems wieder zum System gehören. Für $0 \leqq g \leqq a_k$ durchläuft aber $2a_k - g$ die Zahlen $a_k, a_k + 1, \ldots, 2a_\varkappa$.

Hieraus folgt

Satz 2. *Für jedes Paar natürlicher Zahlen x, y ist das System*

$$\begin{gathered} 0,\ 1,\ 2, \ldots, x-1, \\ 2x-1,\quad 3x-1, \ldots, (y+1)x-1, \\ (y+2)x-1,\quad (y+2)x, \ldots, (y+3)x-2 \end{gathered} \tag{6}$$

eine Basis zweiter Ordnung von $2x+y$ Elementen für die Zahl

$$2(y+3)x-4 = 2xy+6x-4.$$

Beweis. Das System (6) ist zunächst eine Basis zweiter Ordnung für die letzte Basiszahl $(y+3)x-2$. Denn die erste Zeile des Systems ist ein vollständiges Restsystem mod x, die Zahlen der zweiten Zeile sowie die letzte Zahl der ersten und die erste Zahl der dritten Zeile gehören alle derselben Restklasse mod x an, so daß durch Addition der Elemente der ersten Zeile die Lücken geschlossen werden, und die dritte Zeile enthält von der ersten so nicht mehr erreichten Zahl an alle aufeinanderfolgenden Zahlen bis $(y+3)x-2$.

Das System (6) ist ferner symmetrisch. Es entsprechen einander die Zahlen der ersten und dritten Zeile in umgekehrter Reihenfolge, und mit jeder Zahl $\mu x-1$ $(\mu = 1, 2, \ldots, y+2)$ gehört auch

$$(y+3)x-2-(\mu x-1) = (y+3-\mu)x-1$$

zum System.

Folgerung. Ist die positive ganze Zahl $k > 1$ vorgegeben, so setze man

$$x = \left[\frac{k+4}{4}\right]. \tag{7}$$

Dann bestimmt sich y aus $2x+y=k$ zu

$$y = k - 2\left[\frac{k+4}{4}\right], \tag{8}$$

und mit der hieraus sich ergebenden Basis (6) kann man nach Satz 2 alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis

$$n = 2xy+6x-4 = \frac{k^2}{4} + \frac{3}{2}k - \gamma \tag{9}$$

darstellen, wo $\gamma = 2, \frac{7}{4}, 2$ oder $\frac{11}{4}$ ist, je nachdem $k \equiv 0, 1, 2$ oder $3 \pmod 4$ ist.

Nunmehr ergibt sich bereits die Schursche Vermutung in der folgenden verschärften Form:

Satz 3. *Die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis zweiter Ordnung für eine natürliche Zahl $n > 1$ ist kleiner als $2\sqrt{n}$.*

Beweis. Die fragliche Anzahl ist höchstens gleich der Anzahl der Elemente einer Basis der Form (6). Ist daher $n > 1$ gegeben, so bestimme man die kleinste ganze Zahl k mit der Eigenschaft, daß

$$\frac{k^2}{4} + \frac{3}{2}k - \frac{11}{4} \geqq n \tag{10}$$

ist. Dann gibt es für n sicher eine Basis der Form (6) mit k Elementen, wenn x und y gemäß (7) und (8) gewählt werden. Nach Definition von k durch (10) ist dann

$$\frac{(k-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(k-1) - \frac{11}{4} < n,$$

also

$$k^2 + 4k - 16 < 4n,$$
$$k < -2 + 2\sqrt{n+5} \leqq 2\sqrt{n}$$

für $n \geqq 4$. Für $n = 2$ und 3 bestätigt man direkt, daß die höchstens erforderliche Anzahl von Basiselementen kleiner als $2\sqrt{n}$ ist.

Beispiel. Für $n = 100$ erhält man $k < -2 + 2\sqrt{105} < 18{,}6$. Also reichen 18 Zahlen aus, um eine Basis zweiter Ordnung für 100 zu konstruieren. Mit $k = 18$ folgt weiter $x = 5$, $y = 8$. Die Basis (6) lautet dann:

0, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 50, 51, 52, 53.

Man kommt also nicht nur bis 100, sondern bis 106, wie es auch der Formel (9) für $k = 18$ entspricht.

Will man zu gegebenem n eine Basis zweiter Ordnung von der Form (6) haben, deren Elemente nicht größer als $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ sind, so braucht man nur, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die durch (6), (7) und (8) gelieferte Basis und $a_k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist, alle Basiselemente oberhalb $\left[\frac{a_k+1}{2}\right]$ um $a_k - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ zu verringern. Für das eben behandelte Beispiel $n = 100$ würde die neue Basis folgendermaßen lauten:

0, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 19, 24, 26, 31, 36, 41, 46, 47, 48, 49, 50.

Die gemäß (6), (7) und (8) zu gegebenem n konstruierte Basis zweiter Ordnung ist noch nicht notwendig eine Minimalbasis zweiter Ordnung für dieses n. Man kann nämlich Basen zweiter Ordnung konstruieren, die im allgemeinen weiter tragen als die Basis (6). Das gelingt durch folgende Vorschrift:

Es seien wieder x und y noch näher zu bestimmende natürliche Zahlen und $u = (y+3)x - 1$. Man setze dann das System (6) fort, indem man nach einem Sprung um u wieder x aufeinanderfolgende Zahlen als vierte Zeile nimmt, in dieser Weise jeweils nach einem Sprung um u etwa $z - 1$ Zeilen mit x aufeinanderfolgenden Zahlen hinzufügt und

schließlich mit zwei weiteren Zeilen entsprechend den beiden ersten Zeilen das System symmetrisch abschließt. Man erhält dann ein System von folgender Bauart:

$$
\begin{array}{l}
0, 1, 2, \ldots, x-1, \\
2x-1,\ 3x-1, \ldots, (y+1)x-1, \\
(y+2)x-1,\ (y+2)x, \ldots, (y+3)x-2, \\
2u-1,\ 2u, \ldots, 2u+x-1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
zu+(z-2)x-(z-1),\ zu+(z-2)x-z+2, \ldots, zu+(z-1)x-z, \\
zu+zx-z,\ zu+(z+1)x-z, \ldots, zu+(z+y-1)x-z, \\
zu+(z+y)x-z,\ zu+(z+y)x-z+1, \ldots, zu+(z+y+1)x-z-1.
\end{array} \tag{11}
$$

Dieses System enthält $2(x+y)+xz$ Zahlen. Es ist nach Konstruktion symmetrisch und ferner eine Basis zweiter Ordnung für die letzte Zahl $zu+(z+y+1)x-z-1$. Denn das System (11) enthält Lücken von der Länge x und von der Länge u. Die Lücken von der Länge x werden durch Addition eines Elements der ersten Zeile geschlossen. Lücken von der Länge u treten nur zwischen den Zeilen von der dritten bis zur $(z+2)$-ten Zeile auf. Die Elemente dieser Zeilen sind nun von der Form

$$tu+(t-2)x-(t-1)+r \quad (t=1,2,\ldots,z;\ 0 \leqq r \leqq x-1). \tag{12}$$

Um alle Zahlen zwischen dem letzten Element der Zeile t und dem ersten Element der Zeile $t+1$ durch Zahlen des Systems darzustellen, addiere man zu den Elementen (12) bei festem t nach und nach die Elemente $\mu x-1$ $(\mu=1,2,\ldots,y+2)$ und $(y+3)x-2$. Man erhält dann die Zahlen

$$
\begin{array}{l}
tu+(t-2)x-(t-1)+r+x-1 \\
\qquad \text{mit} \quad x-1 \leqq r+x-1 \leqq 2x-2, \\
tu+(t-2)x-(t-1)+r+2x-1 \\
\qquad \text{mit} \quad 2x-1 \leqq r+2x-1 \leqq 3x-2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
tu+(t-2)x-(t-1)+r+(y+2)x-1 \\
\qquad \text{mit} \quad (y+2)x-1 \leqq r+(y+2)x-1 \leqq (y+3)x-2, \\
tu+(t-2)x-(t-1)+r+(y+3)x-2 \\
\qquad \text{mit} \quad (y+3)x-2 \leqq r+(y+3)x-2 \leqq (y+4)x-3.
\end{array}
$$

Die letzte erreichte Zahl ist also, da $(y+3)x-1=u$ ist,

$$tu+(t-2)x-(t-1)+(y+4)x-3=(t+1)u+(t-1)x-t-1.$$

Da nun die Zeile $t+1$ mit dem Element $(t+1)u+(t-1)x-t$ beginnt, ist somit die Lücke von der Länge u geschlossen. Das gilt für

jedes $t = 1, 2, \ldots, z$, daher ist das System (11) eine Basis zweiter Ordnung für die letzte Zahl des Systems.

Aus Satz 1 folgt also

Satz 4. *Für je drei natürliche Zahlen x, y, z ist das System* (11) *eine Basis zweiter Ordnung von $2(x+y)+xz$ Elementen für die Zahl*

$$n = 2xyz + 2xy + 8xz + 2x - 4z - 2. \tag{13}$$

Folgerung. Bei gegebener Anzahl k der Basiselemente muß für die neue Basis

$$2(x+y) + xz = k \tag{14}$$

sein. Eliminiert man $2y$ aus (13) und (14), so folgt

$$n = kxz - 3x^2z - x^2z^2 + 8xz + kx - 2x^2 + 2x - 4z - 2.$$

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist k gerade und $\geqq 12$, so setze man

$$x = 2, \quad y = \frac{k-4}{2} - \left[\frac{k+2}{4}\right], \quad z = \left[\frac{k+2}{4}\right].$$

Dann liefert (11) eine Basis zweiter Ordnung von k Elementen, mit der man nach (13) alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis

$$n = \frac{k^2}{4} + 2k - \delta \tag{15}$$

darstellen kann, wo $\delta = 6$ oder 7 ist, je nachdem $k \equiv 0$ oder $2 \pmod 4$ ist. Die letzte erreichte Zahl (15) ist aber für $k \geqq 12$ bzw. $k \geqq 14$ größer als (9).

2. Ist k ungerade und $\geqq 43$, so müssen nach (14) x und z ebenfalls ungerade sein. Bezeichnet dann r den kleinsten positiven Rest von k mod 12, so setze man

$$x = 3, \quad y = \frac{k+r-18}{4}, \quad z = \frac{k-r}{6} + 1.$$

Dann liefert (11) eine Basis zweiter Ordnung von k Elementen, mit der man nach (13) alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis

$$n = \frac{k^2}{4} + \frac{11}{6}k - \delta' \tag{16}$$

darstellen kann, wo für

$r =$	1	3	5	7	9	11
$\delta' =$	$\frac{217}{12}$	$\frac{237}{12}$	$\frac{185}{12}$	$\frac{157}{12}$	$\frac{153}{12}$	$\frac{173}{12}$

zu setzen ist. Die letzte erreichte Zahl (16) ist aber für

$k \geqq$	61	63	53	43	45	47

größer als (9).

Die Verbesserung, die die Basis (11) im Vergleich zur Basis (6) bringt, erstreckt sich nur auf das in k lineare Glied von (9). Es ist zu vermuten, daß $n_2(k) = \frac{k^2}{4} + O(k)$ ist.

§ 2.

Die angegebenen Methoden lieferten für jede natürliche Zahl $n > 1$, d. h. für jeden endlichen Abschnitt von Ω, die Möglichkeit, eine Basis zweiter Ordnung zu konstruieren, für die die Anzahl der Elemente kleiner als $2\sqrt{n}$ ist. Ändert man jedoch n ab, so muß man das Verfahren von neuem anwenden. Man kann dies vermeiden, wenn man auch für Ω selbst eine Basis zweiter Ordnung kennt mit passender Aussage über die Anzahl der Elemente in jedem endlichen Abschnitt. Hierüber gilt nun

Satz 5. *Ist Ω die Menge aller natürlichen Zahlen, so lassen sich Basen zweiter Ordnung für Ω konstruieren mit folgender Eigenschaft: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ aus Ω derart, daß für alle ganzen Zahlen $n \geqq n_0$ die Anzahl $k(n)$ der Basiselemente unterhalb n der Bedingung*

$$k(n) < n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{17}$$

genügt.

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man $g > 2$ als ungerade Zahl aus Ω so groß, daß

$$\frac{\log 2}{\log g} \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

ist, und dann n_0 aus Ω so groß, daß

$$g^{1+\varepsilon} \leqq n_0^{\varepsilon} \tag{19}$$

wird. Ferner bestimme man eine Basis zweiter Ordnung für die Zahl $g-1$ nach dem Verfahren von § 1. Ist dies das System

$$\mathsf{B}: \quad b_1, b_2, \ldots, b_l,$$

so ist also

$$l < 2\sqrt{g-1}. \tag{20}$$

Nunmehr denke man sich alle Zahlen aus Ω im Ziffernsystem mit der Grundzahl g geschrieben. Ist dann A die Teilmenge derjenigen Zahlen von Ω, die in dieser Schreibweise nur Ziffern aus der Menge B aufweisen, so ist A eine Basis zweiter Ordnung für Ω. Es sei nämlich

$$n = c_0 + c_1 g + \ldots + c_s g^s$$

eine beliebige Zahl aus Ω. Dann gilt für jedes $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, s$

$$0 \leqq c_\sigma \leqq g-1,$$

so daß sich alle Ziffern als Summe von zwei Zahlen aus B darstellen lassen. Es sei etwa

$$c_\sigma = b_\varkappa^{(\sigma)} + b_\lambda^{(\sigma)} \quad (b_\varkappa^{(\sigma)}, b_\lambda^{(\sigma)} \subset \mathsf{B}).$$

Setzt man dann

$$a_\varkappa = \sum_{\sigma=0}^{s} b_\varkappa^{(\sigma)} g^\sigma, \qquad a_\lambda = \sum_{\sigma=0}^{s} b_\lambda^{(\sigma)} g^\sigma,$$

so gehören $a_\varkappa$ und a_λ zu A, und es ist

$$a_\varkappa + a_\lambda = n.$$

Die Abschätzung für die Anzahl $k(n)$ der Basiselemente unterhalb eines gegebenen natürlichen n ergibt sich nun folgendermaßen:

Die ganze Zahl m sei bestimmt durch die Bedingungen

$$g^m \leqq n \leqq g^{m+1} - 1. \tag{21}$$

Dann liegen unterhalb von $g^{m+1} - 1$ genau l^{m+1} Elemente von A, folglich ist nach (20)

$$k(n) \leqq l^{m+1} < (2\sqrt{g-1})^{m+1}. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt weiter durch Logarithmieren

$$m \log g \leqq \log n,$$
$$\log k(n) < (m+1) \log 2\sqrt{g-1}.$$

Daher gilt

$$\log k(n) < \left(\frac{\log n}{\log g} + 1\right)\left\{\log 2 + \frac{1}{2}\log g\right\},$$
$$< \left\{\frac{\log 2}{\log g} + \frac{1}{2}\right\} \log (g\,n),$$

mithin

$$k(n) < (g\,n)^{\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\log g}}. \tag{23}$$

Ist also n_0 die in (19) bestimmte Schranke, so gilt schließlich für jedes $n \geqq n_0$ nach (18) und (19)

$$k(n) < g^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\, n^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \leqq n_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\, n^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \leqq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Das war aber die Behauptung.

Eine Verbesserung der Schranke (20), wie sie durch eine Minimalbasis zweiter Ordnung für $g - 1$ geliefert werden würde, macht für die Abschätzung (17) nichts aus. Wird nämlich in (20) die 2 durch die genaue Konstante c ersetzt, die der Elementeanzahl einer Minimalbasis entspricht, so ändert sich im Exponenten der rechten Seite von (23) nur der Quotient $\frac{\log 2}{\log g}$, in dem $\log 2$ durch $\log c$ ersetzt wird. Nach (3) und (4) gilt aber für $n \geqq n_0$ sicher $1{,}4 < c < 2$.

§ 3.

Die Ungleichung (4) gibt eine Abschätzung nach oben für die Anzahl k_m der Elemente einer Minimalbasis zweiter Ordnung. Im folgenden werden nun Abschätzungen für k_m nach unten abgeleitet und hierfür zwei Methoden entwickelt. Von diesen gilt die erste nicht nur für Basen (in dem hier definierten Sinn), sondern allgemeiner für beliebige endliche Systeme von nichtnegativen ganzen Zahlen bei additiver Kombination zu je zweien.

Diese Methode geht von der Tatsache aus, daß die Abschätzung (3) lediglich durch Vergleich der Anzahl aller möglichen Summen von k Elementen zu je zweien mit der Anzahl der für das vorgelegte Problem mindestens notwendigen Summen gewonnen wurde. Nun ist es aber klar, daß bei der Anzahl aller möglichen Summen nur die voneinander verschiedenen berücksichtigt zu werden brauchen. Es gilt nun allgemein

Satz 6. *Gegeben seien zwei natürliche Zahlen* $k \geqq 5$ *und* n *mit*

$$n \leqq \frac{k^2+k}{2} - 1, \tag{24}$$

ferner k *voneinander verschiedene nichtnegative ganze Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Dann können von den Summenwerten* $a_\varkappa + a_\lambda$, *die* n *nicht übertreffen, höchstens* $\frac{k^2}{2} + 1$ *voneinander verschieden ausfallen.*

Beweis. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Alle Elemente $a_\varkappa$ liegen unterhalb $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, d. h. es gilt

$$0 \leqq a_\varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \tag{25}$$

Dann sind alle $\frac{k^2+k}{2}$ möglichen Summen $a_\varkappa + a_\lambda$ für gerades n unterhalb n, für ungerades n unterhalb $n+1$ gelegen. Man denke sich nun die Summen $a_\varkappa + a_\lambda$ zu einem Schema von p Zeilen so angeordnet, daß zwei Summen dann und nur dann in einer Zeile stehen, wenn sie einander gleich sind. Ist ferner p' die Anzahl der Zeilen mit Summen, deren Wert $\leqq n$ ist, so ist jedenfalls

$$p' \leqq p \leqq \frac{k^2+k}{2}.$$

Enthält aber das Summenschema Zeilen mit mehr als einer Summe, etwa r Zeilen mit $\nu_1 + 1$, bzw. $\nu_2 + 1, \ldots,$ bzw. $\nu_r + 1$ Summen, so ist

$$p \leqq \frac{k^2+k}{2} - \sum_{\varrho=1}^{r} \nu_\varrho. \tag{26}$$

Nun ist dann und nur dann

$$a_\varkappa + a_\lambda = a_\mu + a_\nu, \tag{27}$$

wenn

(28) $$a_\varkappa - a_\mu = a_\nu - a_\lambda \text{ und } a_\varkappa - a_\nu = a_\mu - a_\lambda$$

ist, wobei für $\mu = \nu$ in (28) nur eine Gleichung steht. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ seien nach wachsender Größe geordnet. Dann sind die $\binom{k}{2}$ Differenzen $a_\varkappa - a_\mu$ $(\varkappa > \mu)$ nach (25) Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Werden daher diese Differenzen analog wie die Summen beim Summenschema zu einem Schema mit gleichen Differenzen angeordnet, so hat das Differenzenschema höchstens $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ Zeilen. Da im ganzen $\binom{k}{2}$ Differenzen möglich sind, müssen mindestens $\binom{k}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ Gleichungen zwischen Differenzen bestehen, und diese Zahl ist nach (24) für $k \geqq 4$ positiv. Folglich hat das Differenzenschema mindestens eine Zeile mit mehr als einer Differenz, so daß nach (27) und (28) auch $r \geqq 1$ ist.

Die $\nu_\varrho + 1$ gleichen Summen einer der Zeilen des Summenschemas, die mehr als eine Summe enthalten, liefern nun, weil jede Summe dieser Zeile mit jeder anderen Summe der Zeile gepaart werden kann und mit Rücksicht auf (27) und (28), höchstens

$$2\binom{\nu_\varrho + 1}{2} = \nu_\varrho^2 + \nu_\varrho$$

gleiche Differenzen. Da andererseits mindestens $\binom{k}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ Gleichungen zwischen Differenzen bestehen, muß

$$\sum_{\varrho=1}^{r} (\nu_\varrho^2 + \nu_\varrho) \geqq \binom{k}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

sein. Setzt man $\sum_\varrho \nu_\varrho = s_1$, $\sum_\varrho \nu_\varrho^2 = s_2$, so muß nach (24)

$$s_1 + s_2 \geqq \frac{k^2 - 3k}{4} = K,$$

also erst recht (wegen $s_2 \leqq s_1^2$)

$$s_1^2 + s_1 \geqq K$$

sein. Hieraus folgt, weil $k > 4$ ist,

(29) $$s_1 \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4K} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 3k + 1} > \frac{k-3}{2},$$

und da s_1 eine ganze Zahl ist, muß sogar

$$s_1 \geqq \frac{k-2}{2}$$

oder, noch etwas schärfer,

$$s_1 \geqq \left[\frac{k-1}{2}\right]$$

sein. Setzt man dies in (26) ein, so folgt

$$p \leqq \frac{k^2+k}{2} - \left[\frac{k-1}{2}\right],$$

also

$$p \leqq \begin{cases} \frac{k^2+1}{2} & \text{für ungerades } k, \\ \frac{k^2}{2}+1 & \text{für gerades } k. \end{cases}$$

Damit ist wegen $p' \leqq p$ die Behauptung für den ersten Fall bewiesen.

2. Fall: Die Elemente a liegen nicht alle unterhalb $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Dann sei k_1 die Anzahl der Elemente $a_\varkappa$ mit

$$0 \leqq a_\varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k_1)$$

und k_2 die Anzahl der Elemente $a_\varkappa$ mit

$$a_\varkappa > \left[\frac{n+1}{2}\right] \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k_2),$$

so daß $k_1 + k_2 = k$ ist. Daß auch in diesem Fall mindestens $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ Summen wegfallen, kann nun sowohl dadurch zustande kommen, daß eine Summe keinen neuen Wert liefert, als auch dadurch, daß eine Summe größer als n ist.

Ist nämlich

$$\frac{k_1^2+k_2}{2} \geqq \left[\frac{k-1}{2}\right],$$

so ist man bereits fertig, da die Zahlen $a_\varkappa > \left[\frac{n+1}{2}\right]$, mit sich selbst zu je zweien additiv kombiniert, nur Zahlen größer als n liefern.

Es sei daher

$$\frac{k_2^2+k_2}{2} < \left[\frac{k-1}{2}\right],$$

d. h.

$$k_2 < \sqrt{k_1 - 1}. \tag{30}$$

Dann läßt sich für die k_1 Elemente $a_\varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$ die gleiche Betrachtung wie beim Beweis des ersten Falles durchführen. Denkt man sich dort k durch k_1 ersetzt, so hat man also mindestens $\binom{k_1}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]$ Gleichungen zwischen Differenzen, und diese Zahl ist für $k \geqq 5$ positiv. Denn für $k \geqq 5$ ist nach (30) $k_1 \geqq 4$. Weiter ist nach (24)

$$\binom{k_1}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right] \geqq \frac{k_1^2-k_1}{2} - \frac{k^2+k}{4} = \frac{k_1^2 - k_2^2 - 2k_1k_2 - 3k_1 - k_2}{4} = K^*.$$

Daher gilt für die Anzahl s_1^* der Summen, die, gebildet aus den k_1 Elementen $a_\varkappa \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, keinen neuen Wert liefern, entsprechend zu (29) die Abschätzung

$$(31)\quad s_1^* \geqq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4K^*} \geqq -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - 2k_1k_2 - 3k_1 - k_2 + 1}.$$

Jetzt müssen aber noch die k_2 Elemente $a_\varkappa > \left[\frac{n+1}{2}\right]$ berücksichtigt werden. Alle hieraus gebildeten Summen werden größer als n. Deshalb fallen insgesamt mindestens $s_1^* + \frac{k_2^2 + k_2}{2}$ Summen weg, und es ist zu zeigen, daß

$$s_1^* + \frac{k_2^2 + k_2}{2} \geqq \left[\frac{k-1}{2}\right]$$

ist. Wie am Schluß des Beweises vom ersten Fall genügt es, die Ungleichung

$$(32)\qquad s_1^* + \frac{k_2^2 + k_2}{2} > \frac{k-3}{2}$$

nachzuweisen. Wäre diese nicht erfüllt, so wäre nach (31)

$$\sqrt{k_1^2 - k_2^2 - 2k_1k_2 - 3k_1 - k_2 + 1} \leqq k_1 - 2 - k_2^2,$$

also

$$f(k_2) = k_2^4 - (2k_1 - 5)k_2^2 + (2k_1 + 1)k_2 - k_1 + 3 \geqq 0.$$

Dies ist aber für $k \geqq 14$, d. h. $k_1 \geqq 11$, nicht richtig. Denn für $k_2 = 1$, $k_1 \geqq 11$ sieht man direkt, daß $f(k_2) < 0$ ist, und für $k_2 \geqq 2$ kann man so schließen: Es ist nach (30)

$$g(k_2) = k_2 - k_1 + 3 < \sqrt{k_1 - 1} - k_1 + 3 < 0$$

für $k_1 > 5$, und ferner ist im Intervall $2 \leqq k_2 < \sqrt{k_1 - 1}$ für $k_1 \geqq 11$

$$h(k_2) = \frac{1}{k_2}(f(k_2) - g(k_2)) = k_2^3 - (2k_1 - 5)k_2 + 2k_1 < 0,$$

wie eine leichte Extremwertbetrachtung zeigt. Damit ist (32) für $k \geqq 14$ bewiesen. Für $5 \leqq k \leqq 13$, $k_2 < \sqrt{k_1 - 1}$ bestätigt man Satz 6 leicht direkt.

Folgerung. Ist das in Satz 6 betrachtete System $a_1, a_2, \ldots, a_k$ speziell eine Basis zweiter Ordnung für die Zahl n, so ist die Ungleichung (24) erfüllt. Denn wenn alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ durch die Basis dargestellt werden sollen, gilt (2). Nach Satz 6 folgt nun, daß bereits

$$\frac{k^2}{2} + 1 \geqq n + 1$$

sein muß. Man hat also:

Für jede Basis zweiter Ordnung von k Elementen für die Zahl n gilt

$$n \leqq \frac{k^2}{2},$$

und insbesondere, etwas schärfer als (3),

$$k_m \geqq \sqrt{2}\,\sqrt{n}.$$

§ 4.

Die zweite Methode zur Verbesserung der Abschätzung (2), die jetzt entwickelt werden soll, liefert für große Werte von k ein besseres Resultat als die Methode von § 3. Es wird jedoch dabei vorausgesetzt, daß eine Basis zweiter Ordnung $a_1, a_2, \ldots, a_k$ für eine gegebene natürliche Zahl n vorliegt.

Es sei zunächst $n \equiv 0 \pmod 8$. Man teile das Intervall $\{0, n\}$ der Zahlengeraden in acht gleiche Teile, so daß, wenn die Teilintervalle der Reihe nach mit $J_1, J_2, \ldots, J_8$ bezeichnet werden, J_ν das Intervall $\left\{\frac{\nu-1}{8}n, \frac{\nu}{8}n\right\}$ ist $(\nu = 1, 2, \ldots, 8)$. Die Anzahl der Elemente $a_\varkappa$ in J_ν sei ϱ_ν, wobei, falls ein $a_\varkappa$ Eckpunkt eines Intervalls ist, jeweils der rechte Eckpunkt zum Intervall gerechnet werden soll. $a_1 = 0$ gehört zu J_1. Da die Basis Teilmenge des durch n bestimmten Abschnittes von Ω ist (vgl. S. 2), liegen alle $a_\varkappa$ im Intervall $\{0, n\}$.

Die Methode besteht nun darin, Abschätzungen für die Anzahlen ϱ_ν zu gewinnen und daraus einen geeigneten Zusammenhang zwischen n und k herzuleiten. Sind nämlich $\varrho_\alpha, \varrho_\beta, \ldots, \varrho_\lambda$ gewisse der ϱ_ν mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen $\varrho_\alpha + \varrho_\beta + \ldots + \varrho_\lambda$ Basiselemente für die Erzeugung *aller* ganzen Zahlen eines Teilintervalls J' von der Länge l des Intervalls $\{0, n\}$ ausreichen, so muß offenbar

$$\binom{\varrho_\alpha + \varrho_\beta + \ldots + \varrho_\lambda + 1}{2} \geqq l \tag{33}$$

sein, da man sonst nicht die mindestens notwendige Anzahl von Summen $a_\varkappa + a_\mu$ erhalten würde. Liefern hierbei ϱ Elemente, mit sich selbst oder σ anderen zu je zweien additiv kombiniert, Zahlen außerhalb des Teilintervalls J', so kann man die linke Seite von (33) noch um $\binom{\varrho+1}{2}$ bzw. $\varrho\sigma$ vermindern. Es ist z. B.

$$\binom{\varrho_1+1}{2} \geqq \frac{n}{8} \quad \text{für} \quad J' = J_1, \tag{34}$$

$$\binom{\varrho_1+\varrho_2+1}{2} - \binom{\varrho_2+1}{2} \geqq \frac{n}{4} \quad \text{für} \quad J' = J_1 + J_2, \tag{35}$$

$$\binom{\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+1}{2} - \varrho_2\varrho_3 - \binom{\varrho_3+1}{2} \geqq \frac{3}{8}n \quad \text{für} \quad J' = J_1 + J_2 + J_3. \tag{36}$$

Ich betrachte nun zunächst den Fall, daß alle Basiselemente unterhalb $\frac{n}{2}$ liegen. Dann ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = k, \quad \varrho_5 = \varrho_6 = \varrho_7 = \varrho_8 = 0. \tag{37}$$

In diesem Fall hat eine nach (33) gewonnene Abschätzung noch die Symmetrieeigenschaft, daß sie erhalten bleibt, wenn man $\varrho_\alpha, \varrho_\beta, \ldots$ durch $\varrho_{5-\alpha}, \varrho_{5-\beta}, \ldots$ ersetzt. Man findet z. B. aus (34), (35) und (36) auf diese Weise

$$\binom{\varrho_4 + 1}{2} \geqq \frac{n}{8} \quad \text{für} \quad J' = J_8, \tag{34 a}$$

$$\binom{\varrho_4 + \varrho_3 + 1}{2} - \binom{\varrho_3 + 1}{2} \geqq \frac{n}{4} \quad \text{für} \quad J' = J_7 + J_8, \tag{35 a}$$

$$\binom{\varrho_4 + \varrho_3 + \varrho_2 + 1}{2} - \varrho_2 \varrho_3 - \binom{\varrho_2 + 1}{2} \geqq \frac{3}{8} n \quad \text{für} \quad J' = J_6 + J_7 + J_8. \tag{36 a}$$

Aus (35) folgt nun (Quadratwurzeln sind stets positiv zu nehmen)

$$\varrho_1 + \varrho_2 \geqq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2 + \varrho_2 + \frac{1}{4}}$$

oder, wenn $\varrho_2 + \frac{1}{2} = \varrho_2'$ gesetzt wird,

$$\varrho_1 + \varrho_2' \geqq \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2'^2} > \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}. \tag{38}$$

Analog folgt aus (35 a) mit $\varrho_3' = \varrho_3 + \frac{1}{2}$

$$\varrho_3' + \varrho_4 \geqq \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_3'^2}.$$

Es sei nun etwa $\varrho_3 \geqq \varrho_2$, also auch $\varrho_3' \geqq \varrho_2'$ (der Fall $\varrho_3 \geqq \varrho_3$ erledigt sich aus Symmetriegründen ganz entsprechend). Dann ist

$$\varrho_3' + \varrho_4 \geqq \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2'^2} > \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}. \tag{39}$$

In gleicher Weise erhält man aus (36 a) die Ungleichung

$$\varrho_2 + \varrho_3' + \varrho_4 \geqq \sqrt{\frac{3}{4} n + 2\varrho_2 \varrho_3 + \varrho_2'^2} > \sqrt{\frac{3}{4} n + 3\varrho_2^2}. \tag{40}$$

Nun ist nach (37)

$$k + 1 = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + 1 = \varrho_1 + \varrho_2' + \varrho_3' + \varrho_4, \tag{41}$$

also nach (38)

$$\varrho_3' + \varrho_4 < k + 1 - \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}. \tag{42}$$

Daher folgt aus (40) und (42) durch Subtraktion

$$\varrho_2 > \sqrt{\frac{3}{4} n + 3\varrho_2^2} - k - 1 + \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}(\varrho_2 + k + 1)^2 &> \frac{5}{4} n + 4\varrho_2^2 + \sqrt{6}\, \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}\varrho_2^2 n + 2\varrho_2^4} \\ &> \frac{5}{4} n + 4\varrho_2^2 + \sqrt{6}\left(\frac{n}{2} + \sqrt{2}\,\varrho_2^2\right)\end{aligned}$$

oder, wenn man nach ϱ_2 ordnet und mit $-(3+2\sqrt{3})$ multipliziert,

$$\{(3+2\sqrt{3})\,\varrho_2-(k+1)\}^2 < (4+2\sqrt{3})(k+1)^2-(15+12\sqrt{2}+10\sqrt{3}+6\sqrt{6})\frac{n}{4}. \tag{43}$$

Da ϱ_2 ganz und rational ist, ist die linke Seite von (43) positiv, mithin auch

$$D=(4+2\sqrt{3})(k+1)^2-(15+12\sqrt{2}+10\sqrt{3}+6\sqrt{6})\frac{n}{4}>0.$$

Hieraus folgt aber, wenn man mit etwa fünfstelligen Näherungswerten für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ rechnet, die Abschätzung

$$n<0{,}4666\,(k+1)^2.$$

Diese Abschätzung läßt sich auf folgende Weise noch etwas verbessern. Nach (38), (39) und (41) ist

$$k+1>2\sqrt{\frac{n}{2}+\varrho_2^2}.$$

Quadriert man und berücksichtigt die sich aus (43) ergebende Ungleichung

$$\varrho_2>\frac{k+1}{3+2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{D}}{3+2\sqrt{3}},$$

so erhält man

$$8(k+1)\sqrt{D}>(27-12\sqrt{2}+14\sqrt{3}-6\sqrt{6})\,n-(1+4\sqrt{3})(k+1)^2.$$

Für $n>0{,}41\,(k+1)^2$ ist hier die rechte Seite positiv. Durch nochmaliges Quadrieren findet man dann nach leichter Rechnung die Ungleichung

$$(607-384\sqrt{2}+348\sqrt{3}-220\sqrt{6})\,n^2 - (50-120\sqrt{2}+28\sqrt{3}-68\sqrt{6})(k+1)^2\,n<(69+40\sqrt{3})(k+1)^4$$

und hieraus

$$n<0{,}46532\,(k+1)^2. \tag{44}$$

Für $n\leqq 0{,}41\,(k+1)^2$ ist dies von selbst erfüllt.

Bisher war nun $n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8)$ vorausgesetzt. Ist $n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8)$ und $0\leqq a_\varkappa\leqq\left[\frac{n+1}{2}\right]$ für $\varkappa=1,2,\ldots,k$, so sei n' das größte Vielfache von 8 unterhalb n, also $1\leqq n-n'\leqq 7$. Denkt man sich auch jetzt die Intervalleinteilung in acht gleiche Teile vorgenommen und zählt das eventuell in J_5 hineinfallende a_k noch zu ϱ_4, so gelten die benutzten Abschätzungen (35), (35a) und (36a) sicher, wenn man auf der rechten Seite überall n durch n' ersetzt. Also gilt auch (44) für n' statt n, und daher ist für beliebiges n und hinreichend großes k

$$n<0{,}46532\,(k+1)^2+7<0{,}46533\,(k+1)^2.$$

In Verbesserung der Abschätzung am Schluß von § 3 erhält man also schließlich folgendes Ergebnis:

Satz 7. *Bei jeder Basis zweiter Ordnung für die natürliche Zahl n mit k Basiselementen, die sämtlich nicht größer als $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ sind, gilt, sobald nur k hinreichend groß ist, die Abschätzung*

$$n < 0{,}4654\, k^2. \tag{45}$$

§ 5.

Die Methode des vorigen Paragraphen soll nunmehr ausgebaut und auch auf den Fall angewandt werden, daß die Basiselemente $a_\varkappa$ nicht alle unterhalb $\frac{n}{2}$ liegen. Dann sind — es wird wieder zunächst der Fall $n \equiv 0 \pmod 8$ betrachtet — nicht alle Anzahlen ϱ_5, ϱ_6, ϱ_7, ϱ_8 Null, und statt (37) gilt

$$k = \sum_{\nu=1}^{8} \varrho_\nu. \tag{46}$$

Auch für diesen Fall läßt sich zeigen, daß analog zu (45) für genügend große Werte von k

$$n < \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) k^2$$

ist mit einem angebbaren, von n und k nicht abhängenden α. Die Methode liefert in diesem Fall aber nur eine schlechtere Abschätzung als (45). Ich begnüge mich damit, die Ungleichung

$$n < 0{,}4992\, k^2 \tag{47}$$

für genügend große k nachzuweisen. Eine weitere Verfeinerung der Methode würde sicher ein besseres Resultat erzielen lassen.

Man setze $\varrho_5 + \varrho_6 + \varrho_7 + \varrho_8 = \eta$. Dann werden zunächst wieder eine gewisse Anzahl von Summen $a_\varkappa + a_\lambda$ größer als n. Diese Anzahl ist

$$A = \frac{\eta^2 + \eta}{2} + \varrho_8(\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4) + \varrho_7(\varrho_3 + \varrho_4) + \varrho_6\varrho_4. \tag{48}$$

Denn sowohl die η Zahlen oberhalb $\frac{n}{2}$ liefern, mit sich selbst kombiniert, Summen, die größer als n sind, als auch die Zahlen von J_8, kombiniert mit denen von J_2, J_3, J_4, die von J_7, kombiniert mit denen von J_3 und J_4, und die von J_6 mit denen von J_4. Ist nun

$$A \geqq 0{,}00081\, k^2,$$

so folgt aus

$$n \leqq \frac{k^2 + k}{2} - 1 - A$$

(vgl. (2)) für genügend große k die Abschätzung

$$n \leqq 0{,}49919\, k^2 + 0{,}5\, k - 1 < 0{,}4992\, k^2,$$

also (47). Es sei daher

$$A < 0{,}00081\,k^2.$$

Das bedeutet, da nach (48) $\eta^2 < 2A$ ist, daß im folgenden stets nur Werte

(49) $$\eta < 0{,}041\,k$$

berücksichtigt zu werden brauchen.

Der restliche Beweis von (47) verläuft nun indirekt. Man nehme an, es wäre

(50) $$n \geqq 0{,}4992\,k^2.$$

Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $\varrho_3 \geqq \varrho_2$. In diesem Fall gestaltet sich die Betrachtung ähnlich wie beim Beweis in § 4. Man hat nur zu beachten, daß die Ungleichungen (34a), (35a), (36a) nicht mehr gültig zu sein brauchen, da jetzt die Intervalle J_5, J_6, J_7, J_8 nicht mehr leer sind. Z. B. ist (36a), indem man wieder das Teilintervall $J' = J_6 + J_7 + J_8$ heranzieht, zu ersetzen durch

$$\binom{\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + 1}{2} - \varrho_2\,\varrho_3 - \binom{\varrho_2 + 1}{2} + \varrho_1(\varrho_5 + \varrho_6 + \varrho_7 + \varrho_8) + \varrho_2(\varrho_5 + \varrho_6 + \varrho_7) + \varrho_3(\varrho_5 + \varrho_6) + \varrho_4\,\varrho_5 \geqq \frac{3}{8}n.$$

Hieraus folgt

$$(\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4)^2 + (\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4) \geqq \frac{3}{4}n + \varrho_2^2 + \varrho_2 + 2\,\varrho_2\,\varrho_3 - 2(k-\eta)\eta,$$

$$\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 \geqq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}n + 2\,\varrho_2\,\varrho_3 - 2(k-\eta)\eta + \varrho_2^2 + \varrho_3 + \frac{1}{4}},$$

(51) $$\varrho_2 + \varrho_3' + \varrho_4 > \sqrt{\frac{3}{4}n + 3\,\varrho_2^2 - 2(k-\eta)\eta}.$$

Nach (46) ist ferner

$$k + 1 - \eta = \varrho_1 + \varrho_2' + \varrho_3' + \varrho_4,$$

also nach (38)

(52) $$\varrho_3' + \varrho_4 < k + 1 - \eta - \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}.$$

Daher folgt aus (51) und (52) durch Subtraktion

$$\varrho_2 > \sqrt{\frac{3}{4}n + 3\,\varrho_2^2 - 2(k-\eta)\eta} - k - 1 + \eta + \sqrt{\frac{n}{2} + \varrho_2^2}$$

und hieraus

$$(\varrho_2 + k + 1 - \eta)^2 > \frac{5}{4}n + 4\,\varrho_2^2 - 2(k-\eta)\eta + \sqrt{6}\sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}\varrho_2^2 n + 2\,\varrho_2^4 - \frac{2}{3}(k-\eta)\eta n - \frac{4}{3}(k-\eta)\eta\,\varrho_2^2}$$

$$> \frac{5}{4}n + 4\,\varrho_2^2 - 2(k-\eta)\eta + \sqrt{6}\left(\frac{n}{2} + \sqrt{2}\,\varrho_2^2 - \frac{5}{6}(k-\eta)\eta\right).$$

Die hierbei vorgenommene Abschätzung des Radikanden stützt sich auf die Ungleichung

$$25(k-\eta)\eta < 6n,$$

die nach (49) und (50) richtig ist.

Es ergibt sich weiter

$$(\varrho_2 + k - \eta + 1)^2 > (5 + 2\sqrt{6})\frac{n}{4} + (4 + 2\sqrt{3})\varrho_2^2 - \left(2 + \frac{5}{6}\sqrt{6}\right)(k-\eta)\eta,$$

$$(\varrho_2 + k - \eta)^2 > (5 + 2\sqrt{6})\frac{n}{4} + (4 + 2\sqrt{3})\varrho_2^2 - \left(2 + \frac{5}{6}\sqrt{6}\right)(k-\eta)\eta - 2(\varrho_2 + k - \eta) - 1.$$

Hieraus erhält man, wenn man

$$D' = (4 + 2\sqrt{3})k^2 - (15 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{6})\frac{n}{4} + \left(-2 + 5\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{6}\right)k\eta - \left(2 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{6}\right)\eta^2$$

setzt, analog zu (43) die Ungleichung

$$\{(3 + 2\sqrt{3})\varrho_2 - (k-\eta)\}^2 < D' + (6 + 4\sqrt{3})(\varrho_2 + k - \eta) + 3 + 2\sqrt{3}.$$

Bezeichnet man den Ausdruck auf der rechten Seite mit R, so muß, da die linke Seite positiv ist, auch $R > 0$ sein. Nach (49) und (50) ist aber

$$D' < (4 + 2\sqrt{3})k^2 - (15 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{6})\,0{,}1248\,k^2 + \left(-2 + 5\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{6}\right)0{,}041\,k^2 < -0{,}06\,k^2,$$

wie eine leichte Rechnung bestätigt. Folglich ist für genügend große Werte von k, da $\varrho_2 < k$ ist,

$$R = D' + (6 + 4\sqrt{3})(\varrho_2 + k - \eta) + 3 + 2\sqrt{3} < 0.$$

Die Annahme (50) führt also auf einen Widerspruch, sobald nur k hinreichend groß ist. Daher ist (47) für den Fall $\varrho_3 \geqq \varrho_2$ und $n \equiv 0 \pmod 8$ bewiesen.

2. Fall: $\varrho_2 > \varrho_3$. Beim Beweise von (47) in diesem Fall wird folgende Hilfsbetrachtung benötigt: Setzt man

$$\varrho_1\varrho_5 + \varrho_4\varrho_6 + (\varrho_3 + \varrho_4)\varrho_7 + (\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4)\varrho_8 = \tau,$$

so ist unter den Voraussetzungen (49) und (50)

$$\tau > \frac{k\eta}{4} \tag{53}$$

für hinreichend große k.

Es ist nämlich

$$\tau \geqq \varrho_1\varrho_5 + \varrho_4(\varrho_6 + \varrho_7 + \varrho_8) \geqq \eta\ \mathrm{Min}\,(\varrho_1, \varrho_4). \tag{54}$$

Ist nun $\varrho_4 \geqq \varrho_1$, so folgt aus (34) mit Rücksicht auf (50)

$$\varrho_1 \geqq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n+1}{4}} > -\frac{1}{2} + \sqrt{0{,}1248\,k^2 + \frac{1}{4}} > \frac{k}{4}$$

für genügend große k, also gilt nach (54) auch (53).

Ist aber $\varrho_1 > \varrho_4$, so benutze man das Prinzip von (33) für $J' = J_8$. Dann folgt

$$\binom{\varrho_4+1}{2} + \varrho_1(\varrho_7+\varrho_8) + \varrho_2(\varrho_6+\varrho_7) + \varrho_3(\varrho_5+\varrho_6) + \varrho_4\varrho_5 \geqq \frac{n}{8},$$

also erst recht

$$\varrho_4^2 + \varrho_4 + 2(k-\eta)\eta - 2\tau \geqq \frac{n}{4}.$$

Nach (54) ist jetzt $\tau \geqq \eta\varrho_4$. Daher ergibt sich weiter

$$\varrho_4^2 - (2\eta-1)\varrho_4 + 2(k-\eta)\eta \geqq \frac{n}{4},$$

mithin

$$\varrho_4 \geqq \eta - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{4} - 2(k-\eta)\eta + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{55}$$

weil das negative Vorzeichen der Wurzel nach (49) und (50) einen negativen Wert ergibt, der wegen $\varrho_4 \geqq 0$ hier nicht möglich ist. Aus (55), (49) und (50) folgt weiter

$$\varrho_4 > \eta - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{4} - 2k\eta} \geqq \eta - \frac{1}{2} + \sqrt{0{,}1248\,k^2 - 0{,}082\,k^2},$$

also für genügend große k

$$\varrho_4 > \eta - \tfrac{1}{2} + 0{,}206\,k > \eta + 0{,}2\,k,$$

d. h.

$$\tau > \eta^2 + 0{,}2\,k\eta. \tag{56}$$

Gemäß (33) erhält man nun für $J' = J_7 + J_8$

$$\binom{\varrho_3+\varrho_4+1}{2} - \binom{\varrho_3+1}{2} + \varrho_1(\varrho_6+\varrho_7+\varrho_8) + \varrho_2(\varrho_5+\varrho_6+\varrho_7) + \varrho_3(\varrho_5+\varrho_6) + \varrho_4\varrho_5 \geqq \frac{n}{4} \tag{57}$$

oder

$$\varrho_4^2 + \varrho_4 + 2\varrho_3\varrho_4 + 2(k-\eta)\eta - 2\tau \geqq \frac{n}{2}. \tag{58}$$

Aus $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = k - \eta$, $\varrho_2 > \varrho_3$, $\varrho_1 > \varrho_4$ folgt ferner

$$\varrho_3 + \varrho_4 < \frac{k-\eta}{2}, \tag{59}$$

also

$$2\varrho_3\varrho_4 < 2\left(\frac{k-\eta}{4}\right)^2 = \frac{k^2 - 2k\eta + \eta^2}{8}, \tag{60}$$

da das Produkt $\varrho_3\varrho_4$ nach (59) seinen größten Wert für $\varrho_3 = \varrho_4$ annimmt. Daher ergibt sich aus (58) unter Berücksichtigung von (56) und (60) für genügend große k

$$\varrho_4^2 + \varrho_4 > \frac{n}{2} - \frac{k^2}{8} - 1{,}35\,k\eta + \frac{31}{8}\eta^2$$

und somit nach (49) und (50)

$$\varrho_4 > -\frac{1}{2} + \sqrt{0{,}1246\,k^2 - 1{,}35\,k\eta}$$
$$> -\frac{1}{2} + \sqrt{0{,}0692\,k^2}.$$

Folglich ist

$$\varrho_4 > -\frac{1}{2} + 0{,}263\,k > \frac{k}{4}$$

für genügend große k. Damit ist nach (54) die Ungleichung (53) auch für $\varrho_1 > \varrho_4$ bewiesen.

Nun zum Beweise der Abschätzung (47) im Falle $\varrho_2 > \varrho_3$! Nach (36) ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 \geqq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}\,n + 2\,\varrho_2\,\varrho_3 + \varrho_3^2 + \varrho_3 + \frac{1}{4}},$$

also

$$\varrho_1 + \varrho_2' + \varrho_3 > \sqrt{\frac{3}{4}\,n + 3\,\varrho_3^2}. \tag{61}$$

Ferner folgt aus (57)

$$\varrho_3 + \varrho_4 \geqq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n}{2} - 2\,(k-\eta)\,\eta + 2\,\tau + \varrho_3^2 + \varrho_3 + \frac{1}{4}}$$

und unter Berücksichtigung von (53)

$$\varrho_3' + \varrho_4 > \sqrt{\frac{n}{2} - 2\,(k-\eta)\,\eta + 2\,\tau + \varrho_3^2} > \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\,k\eta + 2\,\eta^2 + \varrho_3^2}.$$

Wegen $\varrho_1 + \varrho_2' + \varrho_3' + \varrho_4 = k + 1 - \eta$ ist also

$$\varrho_1 + \varrho_2' < k + 1 - \eta - \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\,k\eta + 2\,\eta^2 + \varrho_3^2}. \tag{62}$$

Daher ergibt sich aus (61) und (62) durch Subtraktion

$$\varrho_3 > \sqrt{\frac{3}{4}\,n + 3\,\varrho_3^2} - (k + 1 - \eta) + \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\,k\eta + 2\,\eta^2 + \varrho_3^2}$$

und hieraus

$$(\varrho_3 + k + 1 - \eta)^2 > \frac{5}{4}\,n + 4\,\varrho_3^2 - \frac{3}{2}\,k\eta + 2\,\eta^2 \tag{63}$$
$$+ \sqrt{6}\,\sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}\,\varrho_3^2\,n + 2\,\varrho_3^4 - \frac{3}{4}\,n\,k\eta - 3\,\varrho_3^2\,k\eta + \frac{3}{2}\,n\,\eta^2 + 6\,\varrho_3^2\,\eta^2}.$$

Unter Berücksichtigung von (49) und (50) gilt nun für den Radikanden die Abschätzung

$$\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}\,n\,\varrho_3^2 + 2\,\varrho_3^4 - \frac{3}{4}\,n\,k\,\eta - 3\,\varrho_3^2\,k\,\eta + \frac{3}{2}\,n\,\eta^2 + 6\,\varrho_3^2\,\eta^2 \tag{64}$$
$$> \left(\frac{n}{2} + \sqrt{2}\,\varrho_3^2 - \frac{3}{4}\,\sqrt{2}\,k\eta + \sqrt{2}\,\eta^2\right)^2.$$

Denn es ist $\frac{3}{2}\,n\,\varrho_3^2 > \sqrt{2}\,n\,\varrho_3^2$ und unter den genannten Einschränkungen für n und η

$$\frac{3}{4}\,(\sqrt{2} - 1)\,n\,k + 3\,k\,\eta^2 > (\sqrt{2} - 1)\,n\,\eta + \frac{9}{8}\,k^2\,\eta + 2\,\eta^3,$$

weil für $\eta < 0{,}041\,k$ und $\frac{k^2+k}{2} - 1 \geqq n \geqq 0{,}4992\,k^2$

$$3k > 2\eta \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}(\sqrt{2}-1)\,n\,k > (\sqrt{2}-1)\,n\,\eta + \frac{9}{8}\,k^2\,\eta$$

ist. Aus (63) und (64) folgt also

$$(\varrho_3 + k - \eta + 1)^2 > \frac{5}{4}\,n + 4\,\varrho_3^2 - \frac{3}{2}\,k\,\eta + 2\,\eta^2 + \sqrt{6}\left(\frac{n}{2} + \sqrt{2}\,\varrho_3^2 - \frac{3}{4}\,\sqrt{2}\,k\,\eta + \sqrt{2}\,\eta^2\right),$$

$$(\varrho_3 + k - \eta)^2 > (5 + 2\sqrt{6})\,\frac{n}{4} - (3 + 3\sqrt{3})\,\frac{k\,\eta}{2} + (2 + 2\sqrt{3})\,\eta^2 + (4 + 2\sqrt{3})\,\varrho_3^2 - 2(\varrho_3 + k - \eta) - 1$$

und hieraus analog zu (43)

$$(65)\quad \{(3 + 2\sqrt{3})\,\varrho_3 - (k - \eta)\}^2 < (4 + 2\sqrt{3})\,k^2 + (11 + 7\sqrt{3})\,\frac{k\,\eta}{2} - (15 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{6})\,\frac{n}{4} - (14 + 8\sqrt{3})\,\eta^2 + (6 + 4\sqrt{3})\,(\varrho_3 + k - \eta) + 3 + 2\sqrt{3}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite von (65) mit R' und setzt

$$D'' = (4 + 2\sqrt{3})\,k^2 - (15 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{6})\,\frac{n}{4} + (11 + 7\sqrt{3})\,\frac{k\,\eta}{2} - (14 + 8\sqrt{3})\,\eta^2,$$

so ist nach (49) und (50)

$$D'' < (4 + 2\sqrt{3})\,k^2 - (15 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{6})\,0{,}1248\,k^2 + (11 + 7\sqrt{3})\,0{,}0205\,k^2 < -0{,}04\,k^2,$$

also für genügend große k, da $\varrho_3 < k$ ist,

$$R' = D'' + (6 + 4\sqrt{3})\,(\varrho_3 + k - \eta) + 3 + 2\sqrt{3} < 0.$$

Nach (65) müßte aber $R' > 0$ sein. Damit ist (47) auch im Falle $\varrho_2 > \varrho_3$ für $n \equiv 0 \pmod 8$ bewiesen.

Ist $n \not\equiv 0 \pmod 8$, so schließe man wie in § 4, indem man auch dann das Intervall $\{0, n\}$ in acht gleiche Teile teilt und statt n das größte Vielfache n' von 8 unterhalb n betrachtet. Mit n' gilt dann die Behauptung, da es sich um eine Aussage für genügend große k handelt, auch für $n \leqq n' + 7$.

§ 6.

Die bisherigen Untersuchungen erstreckten sich ausschließlich auf den Fall $h = 2$. Es soll nunmehr auch der Fall behandelt werden, daß h eine beliebige natürliche Zahl ist. Ich betrachte auch hier erst endliche Basissysteme und beweise zunächst

Satz 8. *Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_h$ unbestimmte natürliche Zahlen. Werden dann $d_1, d_2, \ldots, d_{h+1}$ durch*

$$(66) \qquad d_1 = 1, \qquad d_\nu = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + (x_{\nu-1} + 1) d_{\nu-1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, h+1)$$

definiert, so bildet das System

$$S_h: \quad \begin{array}{l} 0, d_1, 2d_1, \ldots, x_1 d_1, \\ x_1 d_1 + d_2, x_1 d_1 + 2d_2, \ldots, x_1 d_1 + x_2 d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{\nu=1}^{h-2} x_\nu d_\nu + d_{h-1}, \sum_{\nu=1}^{h-2} x_\nu d_\nu + 2d_{h-1}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu, \\ \sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu + d_h, \sum_{\nu=1}^{h-1} x_\nu d_\nu + 2d_h, \ldots, \sum_{\nu=1}^{h} x_\nu d_\nu \end{array}$$

eine Basis h-ter Ordnung mit $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_h$ Elementen für die Zahl

$$(67) \qquad x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + (x_h + 1) d_h - 1 = d_{h+1} - 1.$$

Beweis. Für $h = 1$ ist die Behauptung richtig. Denn S_1 ist das System

$$0, 1, 2, \ldots, x_1,$$

und dies ist eine Basis erster Ordnung für $d_2 - 1 = x_1$. Es sei schon bewiesen, daß S_{h-1}, d. h. das System der ersten $h-1$ Zeilen von S_h, eine Basis $(h-1)$-ter Ordnung für die Zahl $d_h - 1$ ist. Dann ist S_{h-1} auch eine Basis h-ter Ordnung für $d_h - 1$, da die Null zum System gehört. Man hat also nur zu zeigen, daß sich alle ganzen Zahlen von d_h bis $d_{h+1} - 1$ als Summe von h Zahlen aus S_h darstellen lassen. Jede dieser Zahlen ist nun von der Form

$$s = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h + r \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, x_h;\ 0 \leqq r \leqq d_h - 1).$$

Hiervon ist aber $x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h$ eine Zahl aus S_h. Ferner läßt sich r, da $0 \leqq r \leqq d_h - 1$ ist, nach Induktionsvoraussetzung als Summe von $h-1$ Zahlen aus S_{h-1} darstellen. Folglich ist s eine Summe von h Zahlen aus S_h, denn S_{h-1} ist ein Teil von S_h. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Benutzt man Satz 8 für $h-1$ statt h, so folgt, daß man alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, d_h - 1$ als Summe von $h-1$ Zahlen aus den ersten $h-1$ Zeilen von S_h darstellen kann. Daher gilt der folgende

Zusatz. Erweitert man das System S_h durch Hinzufügen endlich vieler natürlicher Zahlen derart, daß jede Zahl von der vorhergehenden höchstens den Abstand d_h hat, so bildet auch das erweiterte System eine Basis h-ter Ordnung mindestens für die letzte Zahl des Systems.

In Verallgemeinerung von (9) und damit der Schurschen Vermutung gilt nun

Satz 9. *Es sei $n_h(k)$ die größte ganze Zahl mit der Eigenschaft, daß sich bei gegebenem k alle Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n_h(k)$ durch eine Basis h-ter Ordnung von k Elementen darstellen lassen. Dann gilt*

$$n_h(k) = O(k^h),$$

genauer

$$\left(\frac{k}{h}\right)^h < n_h(k) < \binom{k+h-1}{h}.$$

Beweis. 1. Die Anzahl der Kombinationen von k Elementen zur h-ten Klasse unter Zulassung von Wiederholungen ist

$$C = \binom{k+h-1}{h}.$$

Aus den k Elementen einer Basis h-ter Ordnung kann man also höchstens C Summen von h Elementen bilden. Damit durch diese alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis $n_h(k)$ dargestellt werden, muß also

$$C \geqq n_h(k) + 1$$

sein. Daher folgt

$$n_h(k) < \binom{k+h-1}{h} \leqq \frac{(k+h-1)^h}{h!}. \tag{68}$$

2. Da das System S_h nach Satz 8 eine Basis h-ter Ordnung für die Zahl $d_{h+1} - 1$ ist und alle x_ν und alle d_ν positiv sind, erhält man aus (67)

$$n_h(k) \geqq d_{h+1} - 1 > (x_h + 1)\, d_h.$$

Ferner ist nach (66) für $\nu = 2, 3, \ldots, h$

$$d_\nu > (x_{\nu-1} + 1)\, d_{\nu-1}, \quad d_1 = 1.$$

Daher folgt weiter

$$n_h(k) > \prod_{\nu=1}^{h} (x_\nu + 1).$$

Setzt man nun $x_2 = x_3 = \ldots = x_h = \left[\frac{k}{h}\right]$, $x_1 + 1 = \left[\frac{k}{h}\right] + r$, wo r aus

$$h\left[\frac{k}{h}\right] + r = k \tag{69}$$

zu bestimmen ist, so ergibt sich

$$n_h(k) > \left(\left[\frac{k}{h}\right] + 1\right)^{h-1} \left(\left[\frac{k}{h}\right] + r\right) > \left(\frac{k}{h}\right)^h. \tag{70}$$

Aus (68) und (70) folgt aber die Behauptung von Satz 9.

Folgerung. Ist nicht die Anzahl k der Basiselemente, sondern die natürliche Zahl n vorgegeben, und eine Basis h-ter Ordnung gesucht, die alle nichtnegativen ganzen Zahlen bis n darzustellen gestattet, so erhält man analog zum Fall $h = 2$ die Anzahl der höchstens erforderlichen

Basiselemente durch die kleinste ganze Zahl k, für die $n_h(k) \geqq n$ ist. Aus (70) folgt dann

$$(71) \qquad n_h(k) \geqq n > n_h(k-1) > \left(\left[\frac{k-1}{h}\right] + 1\right)^{h-1} \left(\left[\frac{k-1}{h}\right] + r'\right),$$

wo r', entsprechend zu (69), durch

$$h\left[\frac{k-1}{h}\right] + r' = k - 1$$

bestimmt ist. Setzt man

$$\left[\frac{k-1}{h}\right] = \frac{k-1}{h} - \delta,$$

so ist $0 \leqq \delta \leqq \frac{h-1}{h}$, und man erhält aus (71) für $r' \neq 0$

$$n > \left(\left[\frac{k-1}{h}\right] + 1\right)^h = \left(\frac{k}{h} + 1 - \frac{1}{h} - \delta\right)^h \geqq \left(\frac{k}{h}\right)^h$$

und für $r' = 0$

$$n > \left(\frac{k-1}{h} + 1\right)^{h-1} \frac{k-1}{h} \geqq \left(\frac{k}{h}\right)^{h-2} \left(\frac{k-1}{h} + 1\right) \frac{k-1}{h}$$
$$= \frac{k^{h-2}}{h^h} (k^2 + (h-2)\,k - h + 1),$$

d. h.

$$n > \left(\frac{k}{h}\right)^h \text{ für } h \geqq 3,$$

da k mindestens gleich 2 ist. Folglich gilt:

Die Anzahl k der Basiselemente einer Basis h-ter Ordnung für die Zahl n erfüllt auch für $h \geqq 3$ die Ungleichung

$$(72) \qquad k < h \sqrt[h]{n},$$

in genauer Verallgemeinerung von Satz 3.

§ 7.

Die Basis h-ter Ordnung S_h, die in § 6 betrachtet wurde, hat noch eine bemerkenswerte Eigenschaft. Man verallgemeinere den Begriff der Basis durch die folgende

Definition. Ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ heiße eine *erweiterte Basis h-ter Ordnung* ($h > 1$) für die natürliche Zahl n, wenn es für jede ganze Zahl l mit $1 \leqq l \leqq h$ und jede ganze Zahl b mit $0 \leqq b \leqq n$ Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_h$ aus dem System $a_1, a_2, \ldots, a_k$ so gibt, daß

$$(73) \qquad b = b_1 + b_2 + \ldots + b_l - b_{l+1} - \ldots - b_h$$

ist.

Mit anderen Worten: Es soll nicht nur möglich sein, jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ als Summe von h positiven Summanden darzustellen,

sondern auch als Summe von l positiven und $h - l$ negativen Summanden, wobei jede beliebige Verteilung der Vorzeichen vorgeschrieben werden darf bis auf die, bei der alle Vorzeichen negativ sind.

Es gilt nun

Satz 10. *Die Basis h-ter Ordnung S_h ist zugleich eine erweiterte Basis h-ter Ordnung für die letzte Basiszahl.*

Beweis. Für $h = 2$ ist die Behauptung richtig. Denn das System S_2 besteht aus den Zahlen

$$\begin{gathered} 0, 1, 2, \ldots, x_1, \\ x_1 + d_2,\ x_1 + 2d_2,\ \ldots,\ x_1 + x_2 d_2. \end{gathered} \tag{74}$$

Ist b eine ganze Zahl und $0 \leqq b \leqq x_1 + x_2 d_2$, so gibt es nach Satz 8 eine Darstellung (73) mit $h = l = 2$. Es ist also nur die Möglichkeit für $h = 2$, $l = 1$ zu zeigen. Nach (66) ist $d_2 = x_1 + 1$, also bildet die erste Zeile von (74) ein vollständiges Restsystem mod d_2, während die zweite Zeile nur Vertreter aus einer festen Restklasse mod d_2 enthält. Folglich läßt sich b darstellen in der Form

$$b = (x_1 + q d_2) - r,$$

wo q eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, x_2$ ist und r der ersten Zeile von (74) angehört. Es gibt also für b auch eine Darstellung (73) mit $h = 2$, $l = 1$, womit die Behauptung für $h = 2$ und alle möglichen l bewiesen ist.

Die Behauptung sei also schon bewiesen für $h - 1$ und alle möglichen l. Das bedeutet insbesondere, daß man für jedes mögliche $l \geqq 2$ alle Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1}$$

als Summe von $h - 1$ Zahlen aus S_{h-1} mit $l - 1$ positiven und $h - l$ negativen Summanden darstellen kann. Bei diesen Zahlen gilt dann die Behauptung auch für h und jedes mögliche $l \geqq 2$, da man stets die Null addieren oder subtrahieren kann. Es sei daher b von der Form $b = x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h + r \quad (0 \leqq q \leqq x_h - 1,\ 0 < r \leqq d_h)$. Ist dann $r \leqq x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1}$, so läßt sich r nach Induktionsannahme für jedes mögliche $l \geqq 2$ als Summe von $h - 1$ Zahlen aus S_{h-1} mit $l - 1$ positiven und $h - l$ negativen Summanden darstellen. Da aber $x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h$ zum System S_h gehört, so hat man damit eine Darstellung (73) für b mit $l \geqq 2$. Ist jedoch $r > x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1}$, so schreibe man b in der Form

$$b = x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + (q + 1) d_h - (d_h - r)$$

mit denselben Wertebereichen für q und r wie eben. Dann ist

$$\begin{aligned} d_h - r &< d_h - (x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1}) = d_{h-1} \\ &< x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1}, \end{aligned}$$

und man kann die Induktionsvoraussetzung für $d_h - r$ benutzen. Da sich aber in $-(d_h - r)$ die Anzahlen für die Plus- und Minuszeichen vertauschen, ergibt sich für b eine Darstellung als Summe von h Zahlen aus S_h mit $l' = h - l + 1$ positiven und $h - l'$ negativen Summanden. Hierbei darf l' die Werte $1, 2, \ldots, h-1$ annehmen. Die Behauptung ist jetzt also für beliebiges h und $l = 2, 3, \ldots, h-1$ bewiesen.

Für $l = h$ hat man überhaupt keine negativen Summanden, und die Behauptung ist identisch mit Satz 8. Ist aber $l = 1$, so schließt man folgendermaßen: Nach Satz 8 für $h-1$ statt h bilden die ersten $h-1$ Zeilen von S_h eine Basis $(h-1)$-ter Ordnung für $d_h - 1$. Da aber größere Lücken als d_h in S_h nicht auftreten, so kann man b darstellen in der Form

$$b = x_1 d_1 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + q d_h - r \qquad (1 \leqq q \leqq x_h,\ 0 \leqq r \leqq d_h - 1)$$

und erhält hieraus, wenn man r als Summe von $h-1$ Zahlen aus den ersten $h-1$ Zeilen von S_h schreibt, eine Darstellung (73) für b mit $l = 1$.

Zusatz. Ergänzt man das System S_h durch Hinzufügen von endlich vielen natürlichen Zahlen derart, daß jede Zahl von der vorhergehenden höchstens den Abstand d_h hat, so bildet auch das ergänzte System S_h' eine erweiterte Basis h-ter Ordnung für die letzte Zahl von S_h'.

Ist nämlich b eine ganze Zahl zwischen der letzten Zahl von S_h und der letzten Zahl von S_h', so ist b sowohl von der nächstkleineren wie von der nächstgrößeren Zahl von S_h' um weniger als d_h entfernt. Sucht man nun für b eine Zerlegung (73) mit $l \geqq 2$, so stelle man, unter Benutzung von Satz 10 für $h-1$ statt h, die Differenz zwischen b und der nächstkleineren Zahl von S_h' als Summe mit $l-1$ positiven und $h-l$ negativen Summanden aus S_{h-1} dar, für eine Zerlegung (73) mit $l = 1$ jedoch, nach Satz 8 für $h-1$ statt h, die Differenz zwischen b und der nächstgrößeren Zahl von S_h' als Summe von $h-1$ positiven Summanden.

Es liegt nun nahe, auch im Falle eines beliebigen natürlichen h *symmetrische* Basen h-ter Ordnung zu betrachten und insbesondere festzustellen, ob das Analogon zu Satz 1 erfüllt ist. Dies ist tatsächlich der Fall. Denn es gilt

Satz 11. *Schließt man das System S_h symmetrisch ab, indem man alle Zahlen hinzufügt (soweit sie nicht schon dazugehören), die durch Spiegelung der Zahlen von S_h an der Zahl*

$$m = x_1 d_1 + x_2 d_2 + \ldots + x_{h-1} d_{h-1} + \frac{x_h + 1}{2} d_h$$

entstehen, so erhält man eine Basis h-ter Ordnung mit $2\left(1 + \sum_{r=1}^{h-1} x_r\right) + x_h$ Basiselementen für die Zahl $n = 2mh$.

Beweis. Die Zahlen des symmetrisierten Systems $\overline{S}_h$ für ein festes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_h$ seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Dann ist $a_k = 2m$, und mit $a_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) gehört auch $a_k - a_\varkappa$ zum System. Nach dem Zusatz zu Satz 8 ist ferner $\overline{S}_h$ eine Basis h-ter Ordnung für a_k. Diese Eigenschaft, die für $h = 2$ zum Beweis der Behauptung ausreicht (vgl. Satz 1), genügt für $h > 2$ nicht mehr. Man muß vielmehr Satz 10 und den Zusatz zu Satz 10 heranziehen, nach dem $\overline{S}_h$ für a_k eine erweiterte Basis h-ter Ordnung ist. Ist nämlich t eine beliebige ganze Zahl zwischen 0 und ha_k, so schreibe man t in der Form

$$t = ua_k + v, \quad 1 \leqq v \leqq a_k, \tag{75}$$

(man dividiere also in gewissem Sinne t durch a_k) und wähle für v nach Satz 10 eine Darstellung als Summe von h Zahlen aus $\overline{S}_h$ mit $h - u$ positiven und u negativen Summanden. Ist dies die Zerlegung

$$v = a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_{h-u}} - a_{\alpha_{h-u+1}} - \ldots - a_{\alpha_h}, \tag{76}$$

so erhält man durch Einsetzen von (76) in (75) und geeignetes Zusammenfassen

$$t = a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \ldots + a_{\alpha_{h-u}} + (a_k - a_{\alpha_{h-u+1}}) + \ldots + (a_k - a_{\alpha_h}).$$

Damit ist t, da $\overline{S}_h$ symmetrisch ist, als Summe von h Zahlen aus $\overline{S}_h$ dargestellt.

Um bei gegebenem h eine möglichst günstige symmetrische Basis $\overline{S}_h$ zu erhalten, hat man für die Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_h$ solche ganzzahligen Werte zu suchen, daß m möglichst groß wird. Im übrigen kann man, da die Basis S_h aus einer Basis $(h-1)$-ter Ordnung lediglich durch Hinzufügen von weiteren natürlichen Zahlen gewonnen wird, auch von der in Satz 4 betrachteten Basis zweiter Ordnung ausgehen und hieraus in entsprechender Weise Basen höherer Ordnung konstruieren. Auch diese lassen sich dann wieder symmetrisieren. So wird man noch etwas weiter tragende Basen erhalten, doch soll hierauf nicht mehr eingegangen werden, da die in den Abschätzungen (70) und (72) gewonnene Dimension h ungeändert bleiben dürfte.

§ 8.

Zum Schluß soll noch kurz die Basis h-ter Ordnung für die Menge Ω betrachtet werden, die der in § 2 angegebenen Basis zweiter Ordnung für Ω entspricht. Ganz analog zu Satz 5 gilt hier

Satz 12. *Die Menge aller natürlichen Zahlen besitzt eine Basis h-ter Ordnung mit folgender Eigenschaft: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt*

es stets eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *derart, daß für alle ganzen Zahlen* $n \geqq n_0$ *die Anzahl* $k(n)$ *der Basiselemente unterhalb* n *der Bedingung*

$$k(n) < n^{\frac{1}{h} + \varepsilon}$$

genügt.

Der Beweis verläuft ganz analog. Man wähle die Grundzahl g so groß, daß

$$\frac{\log h}{\log g} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und dann n_0 so groß, daß

$$g^{1+\varepsilon} \leqq n_0^{\varepsilon}$$

wird. B sei eine Basis h-ter Ordnung für $g-1$, so daß für die Anzahl l der Basiselemente von B nach (72)

$$l < h\sqrt[h]{g-1}$$

gilt. Ist dann A wieder die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die im Ziffernsystem mit der Grundzahl g geschrieben nur Ziffern aus B aufweisen, so ist A eine Basis h-ter Ordnung für Ω, und für die Anzahl $k(n)$ erhält man analog zu (23) die Ungleichung

$$k(n) < (g\,n)^{\frac{1}{h} + \frac{\log h}{\log g}} \leqq n^{\frac{1}{h} + \varepsilon}.$$

(Eingegangen am 9. April 1936.)

Über die Umordnung von bedingt konvergenten Reihen*).

Von

Wilh. Neß, Kiel.

Einleitung.

Bekanntlich läßt sich nach Riemann[1]) jede bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern so umordnen, daß sie zu einer willkürlich vorgeschriebenen reellen Summe konvergiert. Kurz: Der „Summenbereich" einer solchen Reihe umfaßt alle reellen Zahlen. In neuerer Zeit hat Sierpinski[2]) gezeigt, daß, wenn $\sum_1^\infty a_\nu = s$ eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern und $s' < s$ ist, man durch alleinige Umordnung der *positiven* Glieder unter Belassung der negativen Glieder an ihrem Platz und in ihrer Anordnung der Reihe die Summe s' geben kann und entsprechend jede Summe $s'' > s$ durch alleinige Umordnung der *negativen* Glieder erhalten kann.

Dieser Satz von Sierpinski enthält offenbar den von Riemann.

Die Frage nach dem „Summenbereich" einer Reihe mit komplexen Gliedern wurde von Steinitz[3]) mit folgendem schönen und abschließenden Satz beantwortet: Stellt man die Menge der Zahlen, die man als Summe der wieder konvergent ausfallenden Umordnungen einer komplexen Reihe erhalten kann, in der Zahlenebene dar, so ergibt sich als „Summenbereich"

entweder ein Punkt
oder eine Gerade
oder die ganze Ebene.

Eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

Ein unzureichender Beweis dieses Satzes war vorher von P. Lévy[4]) veröffentlicht. Bei Steinitz erscheint dieser Satz im Rahmen allgemeinerer

---

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Kiel als Inaugural-Dissertation anerkannt.

[1]) Abhandl. der Ges. zu Göttingen 13 (1866—68), S. 97.

[2]) Krakauer Anzeigen 1911, S. 149.

[3]) Crelles Journ. 143 (1913), S. 128—175; 144 (1914), S. 1—40; 146 (1916), S. 1—52.

[4]) Nouv. Ann. des Math. (1905), S. 506.

Untersuchungen und bezieht sich auf komplexe Zahlen mit beliebig viel Komponenten.

Einen dem von Steinitz ähnlichen Beweis brachte später W. Groß[5]). Dieser Beweis ist mehr in geometrische Form gehalten. Noch später erschien von W. Threlfall[6]) ein besonders kurzer Beweis für die Tatsache, daß man eine bedingt konvergente Reihe mit komplexen Gliedern immer zu einer anderen Summe umordnen kann.

Die vorliegende Arbeit gibt zunächst einen vereinfachten Beweis des Satzes von Sierpinski. Alsdann wird auf Grund dieses Satzes ein neuer, verhältnismäßig kurzer Beweis des Satzes von Steinitz gegeben. Darüber hinaus werden Aussagen darüber gemacht, auf welche Glieder der Reihe man sich bei den Umordnungen beschränken darf, ähnlich wie ja der Satz von Sierpinski solche Beschränkungen für reelle Reihen liefert. Schließlich wird durch Beispiele gezeigt, daß man diese Beschränkungen, die später genau angegeben werden, im allgemeinen nicht einengen kann.

§ 1.

Der Satz von Sierpinski:

$\sum_1^\infty a_\nu = s$ sei eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern und s' sei eine beliebige reelle Zahl $s' < s$. Dadurch, daß man nur die positiven Glieder der Reihe umordnet bei Belassung der nicht positiven Glieder an ihren Plätzen, läßt sich s' als Summe erzielen. Ebenso läßt sich jede Zahl s'', die größer als s ist, als Summe erzielen, wenn man nur die negativen Glieder umordnet.

Beweis: Da der zweite Teil des Satzes durch eine einfache Vorzeichenvertauschung aus dem ersten Teil folgt, so genügt es, nur diesen zu beweisen. Dieser wird aber erledigt durch folgenden

Hilfssatz 1: *$\sum_1^\infty p_\nu$ sei eine divergente Reihe mit positiven Gliedern. $p_\nu \to 0$. Eine Zahl $d > 0$ sei beliebig gegeben. Dann gibt es eine Umordnung von $\sum_1^\infty p_\nu$ zu $\sum_{\nu=1}^\infty p_{m_\nu}$, so daß*

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} p_{m_\nu} \to d.$$

Kurz: Man kann die Divergenz einer Reihe mit positiven zu Null abnehmenden Gliedern asymptotisch um einen beliebigen positiven Betrag verlangsamen.

---

[5]) Monatshefte für Math. und Physik 28 (1917), S. 221.

[6]) Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 212.

Um den ersten Teil des Satzes von Sierpinski zu beweisen, wende man auf die positiven Glieder von $\sum_1^\infty a_\nu$ den Hilfssatz 1 mit $d = s - s'$ an.

Beweis des Hilfssatzes: Aus $\sum_1^\infty p_\nu$ wähle ich eine unendliche Teilreihe T aus, die konvergiert. Die p_ν, die zu T gehören, ersetze ich in $\sum_1^\infty p_\nu$ durch Nullen. Dadurch entsteht eine divergente Reihe $\sum_1^\infty b_\nu$, wo also $b_\nu = 0$ oder $b_\nu = p_\nu$ ist, je nachdem p_ν zu T gehört oder nicht zu T gehört. Es genügt nun, die Reihe $\sum_1^\infty b_\nu$ mit den Partialsummen B_n so zu einer Reihe $\sum_1^\infty c_\nu$ mit den Partialsummen C_n umzuordnen, daß $B_n - C_n \to d$ oder $D_n = (B_n - d) - C_n \to 0$; denn ersetzt man in B_n und C_n die erwähnten Nullen wieder durch die betreffenden p_ν aus T, so entstehen die Summen $\sum_1^n p_\nu$ und $\sum_1^n p_{m_\nu}$, deren Differenz ebenfalls gegen d strebt. Die gewünschte Umordnung von $\sum_1^\infty b_\nu$ zu $\sum_1^\infty c_\nu$ wird nun durch eine passende Aufeinanderfolge der nachstehenden verschiedenartigen Schritte erzielt:

Schritt erster Art:

Bei bereits definiertem C_n setzen wir $c_{n+1} = 0$.

Schritt zweiter Art:

Für die Ausführung dieses Schrittes ist notwendige Voraussetzung, daß es in B_n mindestens ein positives b_ν gibt, das in C_n nicht enthalten ist. Das früheste dieser b_ν sei b_f. Ist nun b_m in der Zahlenfolge b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}, ... die erste Null, so setzen wir $c_{n+1} = b_{n+1}$, $c_{n+2} = b_{n+2}$, ..., $c_{m-1} = b_{m-1}$, aber $c_m = b_f$.

Nun stellen wir die gewünschte Umordnung von $\sum_1^\infty b_\nu$ zu $\sum_1^\infty c_\nu$ her: Wir definieren $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$ und beginnen mit so viel Schritten erster Art, bis für einen *kleinsten* Index n_1 die Zahl D_{n_1} positiv wird. Wegen der Divergenz von $\sum_1^\infty b_\nu$ tritt dies ein. Damit ist die notwendige Voraussetzung für die Ausführung des Schrittes zweiter Art gegeben. Dieser wird nun anschließend so oft vollzogen, bis für einen *kleinsten* Index n_2 die Zahl D_{n_2} negativ wird. Dies tritt sicher ein, denn wenn der Schritt zweiter Art so oft ausgeführt wird, wie es in B_{n_1} positive b_ν gibt, welche nicht in C_{n_1} enthalten sind, so würden B_n und C_n einander

gleich werden. Es gibt also ein kleinstes $n_2 > n_1$, so daß D_{n_2} negativ wird. Dann wird wieder der Schritt erster Art so oft ausgeführt, bis D_n zum *ersten Mal* positiv wird, worauf wieder eine Serie von Schritten zweiter Art einsetzen kann, denn im Falle $D_n > 0$ gibt es stets in B_n ein positives b_ν, das nicht in C_n enthalten ist.

Bei Fortsetzung dieses Verfahrens strebt D_n gegen 0. Denn am Schluß einer Serie von Schritten erster oder zweiter Art ist $|D_n|$ höchstens b_n oder c_n; und während einer Serie von Schritten erster bzw. zweiter Art ändert sich D_n monoton steigend bzw. fallend. Da mit jedem Schritt erster Art bzw. zweiter Art jeweils mindestens eine Null bzw. das erste noch nicht in C_n enthaltene positive b_ν aufgenommen wird, so enthält die so gebildete $\sum_1^\infty c_\nu$ alle b_ν. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

§ 2.

Der Satz von Steinitz.

Um den Satz noch genauer als in der Einleitung zu formulieren, stellen wir fest, daß bei einer konvergenten Reihe mit komplexen Gliedern folgende drei Fälle eine vollständige Disjunktion bilden:

I. $\sum_1^\infty a_\nu = s$ ist absolut konvergent.

II. $\sum_1^\infty a_\nu = s$ ist bedingt konvergent, und es gibt einen und nur einen Winkel φ mit $0 \leqq \varphi < \pi$, so daß $\sum_1^\infty |\Re(a_\nu e^{\varphi i})|$ konvergiert; d. h. es gibt genau einen Drehwinkel unter 180^0, der absolute Konvergenz des Realteils erzeugt.

III. $\sum_1^\infty |\Re(a_\nu e^{\varphi i})|$ ist für jedes φ mit $0 \leqq \varphi < \pi$ divergent. Dann ist diese Reihe auch für jedes φ mit $\pi \leqq \varphi < 2\pi$ divergent, da $|\Re(a_\nu e^{\varphi i})| = |\Re(a_\nu e^{(\varphi-\pi) i})|$.

Um zu zeigen, daß diese drei Fälle alle Möglichkeiten erschöpfen, beweisen wir.

Wenn für zwei Werte φ_1 und φ_2 mit $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$ sowohl $\sum_1^\infty |\Re(a_\nu e^{\varphi_1 i})|$ als auch $\sum_1^\infty |\Re(a_\nu e^{\varphi_2 i})|$ konvergieren, so liegt der Fall I vor:

Wir setzen $a_\nu = b_\nu + i c_\nu$. Es sollen also

$$\sum_1^\infty \Re[(b_\nu + i c_\nu)(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)]$$

und $\sum_1^\infty \Re[(b_\nu + i c_\nu)(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)]$, d. h. $\sum_1^\infty (b_\nu \cos\varphi_1 - c_\nu \sin\varphi_1)$ und $\sum_1^\infty (b_\nu \cos\varphi_2 - c_\nu \sin\varphi_2)$ beide absolut konvergieren. Da $\sin\varphi_2 > 0$, würde auch

$$\sum_1^\infty \left[(b_\nu \cos\varphi_2 - c_\nu \sin\varphi_2)\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} - (b_\nu \cos\varphi_1 - c_\nu \sin\varphi_1)\right]$$

$$= \sum_1^\infty b_\nu \left(\cos\varphi_2 \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} - \cos\varphi_1\right)$$

absolut konvergieren. Und da $\cos\varphi_2 \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} - \cos\varphi_1 \neq 0$, würde $\sum_1^\infty |b_\nu|$ konvergent sein. Ebenso zeigt man, daß im Falle $\cos\varphi_1 \neq 0$ auch $\sum_1^\infty |c_\nu|$ konvergiert. Sollte $\cos\varphi_1 = 0$ sein, so ist die Konvergenz von $\sum_1^\infty |c_\nu|$ trivial. Aus der Konvergenz von $\sum_1^\infty |b_\nu|$ und $\sum_1^\infty |c_\nu|$ folgt aber diejenige von $\sum_1^\infty |a_\nu|$.

Nunmehr formulieren wir den Satz von Steinitz genauer:

Im Fall I besteht der „Summenbereich" nur aus dem Punkt s.

Im Fall II besteht er aus der Geraden $\Re(z \cdot e^{\varphi i}) = \Re(s \cdot e^{\varphi i})$ der komplexen z-Ebene.

Im Fall III ist die ganze z-Ebene Summenbereich.

Beweis: Die erste Behauptung darf wohl allgemein als bekannt gelten.

Im Fall II gilt für jede Summe s' einer konvergenten Umordnung offenbar $\Re(s' \cdot e^{\varphi i}) = \Re(s \cdot e^{\varphi i})$. Andererseits sei s' irgendeine Zahl mit $\Re(s' \cdot e^{\varphi i}) = \Re(s \cdot e^{\varphi i})$. Da $\sum_1^\infty a_\nu e^{\varphi i}$ bedingt konvergiert, muß auch $\sum_1^\infty \Im(a_\nu e^{\varphi i})$ bedingt konvergieren, weil $\sum_1^\infty \Re(a_\nu e^{\varphi i})$ absolut konvergiert. Man kann daher nach Riemann die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu e^{\varphi i}$ zur Summe $s' \cdot e^{\varphi i}$ umordnen. Für diese Umordnung wird $\sum_1^\infty a_\nu = s$ zur Summe s' umgeordnet. Ein Beispiel für diesen Fall liefert jede bedingt konvergente Reihe, deren Real- bzw. Imaginärteil absolut konvergiert. Der Summenbereich ist die Gerade $\Re(z) = \Re(\sum_1^\infty a_\nu)$ bzw. $\Im(z) = \Im(\sum_1^\infty a_\nu)$.

Ein anderes Beispiel:

Die Reihe: $\sum_1^\infty \left(\frac{4}{5}\frac{1}{2^\nu} + \frac{3}{5}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right) + i\left(\frac{4}{5}\frac{(-1)^\nu}{\nu} - \frac{3}{5}\frac{1}{2^\nu}\right)$ wird durch Drehung um den Winkel $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ übergeführt in

$$\sum_1^\infty \left[\left(\frac{4}{5}\frac{1}{2^\nu} + \frac{3}{5}\frac{(-1)^\nu}{n}\right) + i\left(\frac{4}{5}\frac{(-1)^\nu}{\nu} - \frac{3}{5}\frac{1}{2^\nu}\right)\right]\left(\frac{4}{5} + i\,\frac{3}{5}\right) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2^\nu} + i\,\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right),$$

deren Realteil absolut konvergiert. Der Summenbereich der ursprünglichen Reihe ist also die Gerade $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$, wobei $z = x + iy$.

Der Erledigung des einzig schwierigen und interessanten Falles III schicken wir einige Definitionen und Hilfssätze voraus. Ein triviales Beispiel für diesen Fall liefert übrigens jede Reihe, die nur reelle und rein imaginäre Glieder enthält, die je für sich bedingt konvergente Reihen bilden. Der Riemannsche Satz, einmal auf die reellen, ein zweites Mal auf die rein imaginären Glieder angewandt, gestattet es offenbar, die Summe der Reihe in beliebiger Weise zu verändern. Nicht triviale Beispiele folgen später.

Definition 1. Bei vorgelegter $\sum_1^\infty a_\nu$ soll ein offener oder abgeschlossener Winkelraum mit dem 0-Punkt als Scheitel „wesentlich“ [7]) heißen, wenn die a_ν, die diesem Winkel angehören, eine absolut divergente Reihe bilden.

Definition 2. Ein vom 0-Punkt ausgehender Strahl soll „stark“ [8]) heißen, wenn jeder offene Winkelraum, der diesen Strahl enthält, wesentlich ist.

Hilfssatz 2. *Jeder abgeschlossene wesentliche Winkelraum enthält mindestens einen starken Strahl.*

Beweis: Widrigenfalls könnte man jeden Strahl dieses Winkelraumes mit einem Winkel umgeben, der nicht wesentlich ist. Die absoluten Beträge der a_ν eines beliebigen solchen Winkels hätten also eine endliche Summe. Nach dem Theorem von Heine-Borel kann der abgeschlossene wesentliche Winkelraum mit endlich vielen dieser nicht wesentlichen Winkel überdeckt werden. Die absoluten Beträge aller im wesentlichen Winkelraum liegenden a_ν hätten also eine endliche Summe, was ein Widerspruch ist.

---

[7]), [8]) Diese Bezeichnungen schlägt Herr Rogosinski vor, der im Besitz eines anderen, noch nicht veröffentlichten Beweises des Satzes von Steinitz ist.

Hilfssatz 3. *Im Fall* III *ist jede offene Halbebene, deren Rand durch den* 0*-Punkt geht, wesentlich.*

Beweis: Jede solche Halbebene kann durch eine Drehung in die Halbebene $\Re(z) > 0$ überführt werden. Die gleiche Drehung überführt die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ in eine neue Reihe $\sum_1^\infty a_\nu e^{\varphi_\nu i}$. Diese Reihe hat nach der Voraussetzung des Falles III keinen absolut konvergenten Realteil. Die Realteile aller $a_\nu e^{\varphi_\nu i}$, soweit sie positiv sind, bilden also eine divergente Reihe. Die absoluten Beträge dieser $a_\nu e^{\varphi_\nu i}$ bilden daher erst recht eine divergente Reihe, also auch die Beträge der entsprechenden a_ν.

Folgerung: Im Fall III ist jede abgeschlossene Halbebene, deren Rand durch den 0-Punkt geht, erst recht wesentlich und enthält nach Hilfssatz 2 mindestens einen starken Strahl. Es liegt daher stets mindestens einer der beiden Unterfälle vor:

III, 1. Es gibt drei starke Strahlen, die zu je zweien einen Winkel $< \pi$ einschließen (und evtl. noch weitere starke Strahlen).

III, 2. Es gibt zwei entgegengesetzte starke Strahlen (und evtl. noch weitere).

Hilfssatz 4. *Ist der positive Teil der reellen Achse ein starker Strahl, so kann man aus* $\sum_1^\infty a_\nu$ *eine Teilreihe herausgreifen, deren Glieder in einer beliebig kleinen Winkelumgebung der positiven reellen Achse liegen und deren Realteil gegen* $+\infty$ *divergiert, während ihr Imaginärteil absolut konvergiert.*

Beweis: Man umgebe die positive reelle Achse symmetrisch mit einem beliebig kleinen Winkel 2ε, wo $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$. Da dieser Winkel wesentlich ist und $a_\nu \to 0$, lassen sich unter den a_ν dieses Winkels endlich viele finden, deren absolute Beträge eine Summe ergeben, die zwischen 1 und 2 liegt. Da für jedes dieser ausgewählten a_ν gilt $\Re(a_\nu) \geqq |a_\nu| \cdot \cos\varepsilon$ und $|\Im(a_\nu)| \leqq |a_\nu| \cdot \sin\varepsilon$, so hat die Summe der Realteile dieser a_ν die untere Schranke $\cos\varepsilon$ und die Summe der absoluten Beträge ihrer Imaginärteile die obere Schranke $2 \cdot \sin\varepsilon$. Dann wiederhole man das gleiche mit den Winkeln $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, $2 \cdot \frac{\varepsilon}{4}$, ..., $2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^\nu}$, ..., wobei ein einmal ausgewähltes a_ν nicht ein zweites Mal ausgewählt wird. Die Summe der Realteile aller ausgewählten a_ν ist also divergent, da

$$\cos\varepsilon + \cos\frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \cos\frac{\varepsilon}{2^\nu} \ldots \to \infty,$$

während die Summe der absoluten Beträge der Imaginärteile durch die konvergente Reihe $2\sin\varepsilon + 2\sin\frac{\varepsilon}{2} + \ldots + 2\sin\frac{\varepsilon}{2^\nu} + \ldots$ nach oben abgeschätzt werden kann.

Durch eine triviale Vorzeichenvertauschung ergibt sich der

Hilfssatz 5. *Ist der negative Teil der reellen Achse ein starker Strahl, so kann man aus* $\sum_1^\infty a_\nu$ *eine Teilreihe auswählen, deren Glieder in einer beliebig kleinen Winkelumgebung der negativen reellen Achse liegen, deren Realteil gegen* $-\infty$ *divergiert und deren Imaginärteil absolut konvergiert.*

Nunmehr läßt sich der Fall III schnell erledigen. Die in der Folgerung zu Hilfssatz 3 erwähnten Unterfälle III, 1 und III, 2 werden getrennt behandelt. Es liege zunächst Fall III, 1 vor. $\sum_1^\infty a_\nu = s$ soll zur Summe s' umgeordnet werden. Man ziehe durch den 0-Punkt (Fig. 1) einen Vektor, der zum Vektor $\overrightarrow{s's}$ parallel ist und die gleiche Länge hat und zerlege ihn in zwei nicht negative „Starkstrahlkomponenten" k_1 und k_2. Dies ist im Fall III, 1 bei jeder Lage von s und s' möglich.

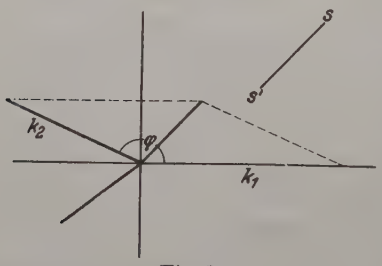


Fig. 1.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn der eine dieser beiden starken Strahlen die positive reelle Achse ist, der zweite möge mit dem ersten den Winkel φ einschließen. Jetzt wird Hilfssatz 4 angewandt. Auf den Realteil der Teilreihe A, die auf Grund dieses Satzes aus $\sum_1^\infty a_\nu$ ausgewählt wird, wende man Hilfssatz 1 an und zwar mit $|k_1|$ statt d. Ferner wird $\sum_1^\infty a_\nu e^{-\varphi i}$ gebildet. Für diese Reihe ist die positive reelle Achse starker Strahl. Man kann daher auf sie ebenfalls den Hilfssatz 4 anwenden. Dabei sind natürlich die a_ν außer Acht zu lassen, die schon bei der erstmaligen Anwendung von Hilfssatz 4 ausgewählt wurden. Dies ist übrigens von selbst erfüllt, wenn man die im Hilfssatz 4 erwähnte kleine Winkelumgebung klein genug wählt. Auf den Realteil der soeben ausgewählten Teilreihe $\mathfrak{B}$ von $\sum_1^\infty a_\nu e^{-\varphi i}$ wird ebenfalls Hilfssatz 1 angewandt, und zwar mit $|k_2|$ statt d. Die Teilreihe von $\sum_1^\infty a_\nu$, die der Teilreihe $\mathfrak{B}$ aus $\sum_1^\infty a_\nu e^{-\varphi i}$ entspricht, heiße B.

Jetzt ordnen wir $\sum_1^\infty a_\nu = s$ in folgender Weise um: Alle a_ν, die weder zu A noch zu B gehören, bleiben an ihren Plätzen und in ihrer

Anordnung. Alle a_ν, die zu A gehören, vertauschen unter sich ihre Plätze so, wie es vorhin der Hilfssatz 1 verlangte. Entsprechendes geschieht mit den a_ν, die zu B gehören.

Durch diese Umordnung wird offenbar die Summe s' erzielt: Denn die Partialsummen von A werden durch diese Umordnung asymptotisch um $|k_1|$, diejenigen von $\mathfrak{B}$ um $|k_2|$ asymptotisch verkleinert, d. h. die Partialsummen von B werden asymptotisch um $|k_2| \cdot e^{\varphi i}$ vermindert. Sind also s_n und s'_n zwei Partialsummen von $\sum_1^\infty a_\nu$ in alter und neuer Anordnung, so gilt

$$s_n - s'_n \to |k_1| + |k_2| e^{\varphi i} = s - s'.$$

Es liege jetzt Fall III, 2 vor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir den positiven und negativen Teil der reellen Achse als starke Strahlen an. Dann lassen sich nach den Hilfssätzen 4 und 5 aus $\sum_1^\infty a_\nu$ zwei Teilreihen A und B auswählen, deren Realteile gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergieren und deren Imaginärteile absolut konvergieren. Die Summe der Imaginärteile von A und B heißen i_1 und i_2. Der übrig gebliebene Rest von $\sum_1^\infty a_\nu$ muß dann noch einen bedingt konvergenten Imaginärteil haben, weil sonst $\sum_1^\infty |\Im(a_\nu)| = \sum_1^\infty |\Re(a_\nu e^{\frac{\pi}{2} i})|$ konvergent wäre, entgegen der Voraussetzung. Daher läßt sich dieser Rest nach Riemann so umordnen, daß sein Imaginärteil die Summe $\Im(s') - (i_1 + i_2)$ bekommt. Was mit dem Realteil des Restes durch diese Umordnung geschieht, ist gleichgültig. Der so geordnete Rest heiße C.

Jetzt wird $\sum_1^\infty a_\nu = s$ in folgender Weise umgeordnet: Man nehme von A der Reihe nach so viel Glieder, daß $\Re(s')$ zum ersten Male überschritten wird, mindestens aber ein Glied von A, dann von C das 1. Glied, anschließend von B so viele Glieder, daß $\Re(s')$ zum ersten Male unterschritten wird, mindestens aber ein Glied von B, dann von C das zweite Glied, hierauf von A so viele Glieder, daß $\Re(s')$ wieder zum ersten Male überschritten wird, mindestens aber ein Glied von A. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens konvergiert der reelle Teil der neu geordneten Summe gegen $\Re(s')$. Erfolgt nämlich das Überschreiten von $\Re(s')$ durch ein Glied von A, so kann das nun folgende Glied von C positiven Realteil haben; dann setzen Glieder von B ein. Erfolgt aber das Überschreiten von $\Re(s')$ durch ein Glied von C, so setzen jetzt entweder gleich Glieder von B ein, oder es folgt eins aus A und abermals eins aus C, das positiven Realteil haben kann. Dann setzen Glieder von B

ein. Der Realteil einer Partialsumme weicht also von $\Re(s')$ höchstens um die Summe der Realteile der drei zuletzt verbrauchten a_ν mit positivem Realteil nach oben ab. Entsprechendes gilt für die Abweichung nach unten. Die Summe der Imaginärteile dieser neu geordneten Reihe konvergiert aber gegen $\Im(s')$, denn alle hinreichend langen Partialsummen dieser Reihe enthalten so viele Glieder aus A, daß die Summe der Imaginärteile beliebig nahe bei i_1 liegt, gleichzeitig so viele Glieder aus B, daß die Summe der Imaginärteile beliebig nahe bei i_2 liegt, und schließlich so viele Glieder aus C, daß die Summe der Imaginärteile von diesen beliebig nahe bei $\Im(s') - (i_1 + i_2)$ liegt. Damit ist der Satz von Steinitz bewiesen.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, liegt der Fall III immer dann vor, wenn es drei starke Strahlen gibt, die zu je zweien einen Winkel $< \pi$ einschließen, oder wenn bei bedingter Konvergenz von $\sum_1^\infty \Im(a_\nu)$ die positive und negative reelle Achse starke Strahlen sind. Die Nichtexistenz eines Drehwinkels, der absolute Konvergenz des Realteiles erzeugt, braucht dann nicht bewiesen zu werden.

§ 3.

Beschränkung der Umordnung auf bestimmte Glieder.

Im Fall II lehrt der Satz von Sierpinski ohne weiteres, daß man sich, wenn $\Im(s' \cdot e^{\varphi i}) < \Im(s \cdot e^{\varphi i})$, bei der Umordnung von $\sum_1^\infty a_\nu = s$ zur Summe s' auf diejenigen a_ν beschränken darf, für welche $\Im(a_\nu e^{\varphi i}) > 0$, während alle übrigen a_ν an ihren Plätzen verbleiben. Und ist

$$\Im(s' \cdot e^{\varphi i}) > \Im(s \cdot e^{\varphi i}),$$

so darf man die Umordnung auf die a_ν beschränken für die

$$\Im(a_\nu \cdot e^{\varphi i}) < 0.$$

Im Fall III, 1 geht aus § 2 nicht nur die Möglichkeit der Umordnung von $\sum_1^\infty a_\nu = s$ zur beliebigen Summe s' hervor, sondern man erkennt gleichzeitig, daß man sich bei der Umordnung auf bestimmte Glieder beschränken darf, nämlich auf die a_ν, die beliebig kleinen Winkelumgebungen von zwei starken Strahlen angehören. Dies sind eben zwei solche starke Strahlen, in deren Zwischenwinkel der zu $\overrightarrow{s's}$ durch den Nullpunkt gezogene parallele Vektor liegt. Liegen mehr als drei starke Strahlen vor, so brauchen diese beiden eben erwähnten starken Strahlen nicht immer eindeutig zu sein. Sollte der Vektor $\overrightarrow{s's}$ zu einem starken

Strahl parallel und gleichgerichtet sein, so darf man die Umordnung sogar auf solche a_ν beschränken, die in einer beliebig kleinen Winkelumgebung *dieses einen* starken Strahles liegen. Es ist dann einer der beiden Vektoren k_1 und k_2 gleich 0. Dies tritt z. B. immer dann ein, wenn *jeder* von 0 ausgehende Strahl stark ist. Ein Beispiel für diesen Fall ist die Reihe

$$\sum_1^\infty a_\nu = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu} e^{\nu \varphi i},$$

wo φ irgendeine zu 2π inkommensurable Zahl ist.

Beweis: Die Reihe konvergiert nach einem Satz von Dirichlet[9]), weil

$$\sum_1^n e^{\nu \varphi i} = e^{\varphi i} \cdot \frac{e^{n \varphi i} - 1}{e^{\varphi i} - 1}$$

beschränkt bleibt. Um zu zeigen, daß jeder Strahl stark ist, genügt es zu beweisen: Jeder Winkelraum $\alpha - \varepsilon \leqq \arc z \leqq \alpha + \varepsilon$ ist wesentlich.

Die Anzahl der Glieder von $\sum_1^m a_\nu$, die in einen solchen Winkelraum mit der Öffnung 2ε fallen, sei n_m. Dann gilt bekanntlich[10])

$$\frac{n_m}{m} \to \frac{2\varepsilon}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Die Summe der absoluten Beträge dieser n_m Glieder ist mindestens gleich der Summe der absoluten Beträge der n_m *letzten* Glieder von $\sum_1^m \frac{1}{\nu} e^{\nu \varphi i}$. Diese ist aber[11])

$$[\log m + C + o(1)] - [\log (m - n_m) + C + o(1)]$$

$$= \log \frac{m}{m - n_m} + o(1) = \log \frac{1}{1 - \frac{n_m}{m}} + o(1)$$

$$= \log \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\pi}} + o(1) = \delta + o(1),$$

wo

$$\delta = \log \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\pi}} > 0.$$

Für $m \geqq m_1$ ist

$$\delta + o(1) > \frac{\delta}{2}.$$

---

[9]) Z. B. Knopp, Unendliche Reihen, 1. Aufl., S. 306.

[10]) Weyl, Gött. Nachr. 1914, S. 335, oder Polya-Szegö, Aufgabensammlung Bd. I, S. 71 Aufg. 166.

[11]) C ist die Eulersche Konstante.

Es ist also aus der Summe der absoluten Beträge der in den Winkelraum $\alpha - \varepsilon \leqq \arc z \leqq \alpha + \varepsilon$ fallenden a_ν ein Betrag herausgezogen, der $> \frac{\delta}{2}$ ist. Dies läßt sich beliebig oft wiederholen. Wir wenden die gleiche Betrachtung auf $\sum_{m_1+1}^{m} a_\nu$ an. Die Anzahl der Glieder dieser Summe, die in den Winkelraum $\alpha - \varepsilon \leqq \arc z \leqq \alpha + \varepsilon$ fallen, sei n_{m_1}; dann gilt wieder $\frac{n_{m_1}}{m} \to \frac{\varepsilon}{\pi}$. Die Summe der absoluten Beträge dieser Glieder ist wieder mindestens gleich der Summe der absoluten Beträge der n_{m_1} *letzten* Glieder von $\sum_{m_1+1}^{m} a_\nu$, also mindestens

$$[\log m + C + o(1)] - [\log(m - n_{m_1}) + C + o(1)]$$
$$= \log \frac{1}{1 - \frac{n_{m_1}}{m}} + o(1) = \log \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\pi}} + o(1) = \delta + o(1).$$

Für $m \geqq m_2$ ist dies wieder größer als $\frac{\delta}{2}$. Jetzt läßt sich die gleiche Betrachtung auf $\sum_{m_2+1}^{m} a_\nu$ anwenden usw. Die Beträge der a_ν, die in den Winkelraum $\alpha - \varepsilon \leqq \arc z \leqq \alpha + \varepsilon$ fallen, bilden also eine divergente Reihe.

Das Beispiel $\sum_{1}^{\infty} a_\nu = 0$, wo $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und

$$\left.\begin{aligned} a_{3m+1} &= \frac{1}{m} \\ a_{3m+2} &= \frac{1}{m} e^{\frac{2}{3}\pi i} \\ a_{3m+3} &= \frac{1}{m} e^{\frac{4}{3}\pi i} \end{aligned}\right\} \quad m = 1, 2, \ldots$$

zeigt, daß man die oben erwähnte Beschränkung auf solche a_ν, die in beliebig kleinen Winkelumgebungen zweier bestimmter starker Strahlen liegen, nicht weiter treiben kann. Alle Glieder dieser Reihe liegen auf den Strahlen $\arc z = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$; und diese Strahlen sind stark. Eine Umordnung von $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$, bei der man nur die a_{3m+1} vertauscht und die a_{3m+2} und a_{3m+3} an ihren Plätzen läßt, würde offenbar nur den reellen Teil der Summe ändern können und zwar allenfalls verkleinern können. Denn jede Partialsumme der neuen Anordnung stimmt mit der der alten Anordnung im Imaginärteil überein, während ihr Realteil höchstens gleich dem Realteil der entsprechenden Partialsumme der alten Anordnung ist, weil die a_{3m+1} monoton fallen. Ebenso kann ein alleiniges Vertauschen

der a_{3m+2} bzw. a_{3m+3} die Summe s nur dann zu einer Summe s' ändern, wenn der Vektor $\overrightarrow{s's}$ den Arkus $\frac{2}{3}\pi$ bzw. $\frac{4}{3}\pi$ hat. Jede andere Änderung von s verlangt also, daß die a_ν von *zwei* starken Strahlen bei der Umordnung beteiligt werden.

Aus dem Beweis des Steinitzschen Satzes im Fall III, 2 ging aber nicht die Möglichkeit der Beschränkung auf die Umordnung bestimmter a_ν hervor. Sondern die Teilreihen A, B und C wurden dort in nicht zu übersehender Weise ineinander geschoben. Es soll nun auch für diesen Fall gezeigt werden: Man kann die Umordnung auf solche a_ν beschränken, die in beliebig kleinen Winkelumgebungen von zwei starken Strahlen liegen, während alle übrigen a_ν an ihren Plätzen bleiben.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien der positive und der negative Teil der reellen Achse starke Strahlen. Einige triviale Fälle nehmen wir vorweg.

Wenn es außer den eben erwähnten starken Strahlen noch in jeder der Halbebenen $\Im(z) \gtrless 0$ mindestens einen starken Strahl gibt, so läßt sich der zu $\overrightarrow{s's}$ parallele Vektor durch den Nullpunkt stets in zwei nicht negative Starkstrahlkomponenten zerlegen. Dieser Fall kann wie Fall III, 1 behandelt werden.

Wenn die beiden Teile der reellen Achse einzige starke Strahlen sind, so sind die Winkelräume $\varepsilon \leqq \arc z \leqq \pi - \varepsilon$ und $\pi + \varepsilon \leqq \arc z = 2\pi - \varepsilon$ bei jedem festen $\varepsilon > 0$ nach Hilfssatz 2 nicht wesentlich. Sie können daher nur endlich viele a_ν enthalten oder solche a_ν, die eine absolut konvergente Reihe bilden. Die Summe dieser a_ν sei σ. Ersetzen wir diese a_ν in $\sum_1^\infty a_\nu = s$ durch Nullen, so entsteht eine neue Reihe mit der Summe $s - \sigma$, diese Reihe erfüllt die Voraussetzungen des Falles III, 2. Daher kann man diese Reihe nach dem Satz von Steinitz zur Summe $s' - \sigma$ umordnen. Dabei ist es offenbar noch möglich, die vorhin erwähnten Nullen an ihren Plätzen zu lassen. Ersetzt man diese Nullen nachträglich wieder durch die betreffenden a_ν, so entsteht eine Umordnung von $\sum_1^\infty a_\nu = s$ zur Summe s'. Diese Umordnung hat sich auf die a_ν der Winkel $|\arc z| < \varepsilon$ und $|\pi - \arc z| < \varepsilon$ beschränkt.

Es bleibt noch der Fall, daß es außer den beiden Teilen der reellen Achse in nur einer der beiden Halbebenen $\Im(z) \gtrless 0$ mindestens einen starken Strahl gibt, während die andere Halbebene frei von starken Strahlen ist. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Im(z) > 0$ frei von starken Strahlen, während $\Im(z) < 0$ mindestens einen enthält. Ist $\Im(s') \gtrless \Im(s)$, so läßt sich auch jetzt der zu $\overrightarrow{s's}$ parallele Vektor in zwei

positive Starkstrahlkomponenten zerlegen oder er fällt auf die reelle Achse. Die einzige Schwierigkeit macht der Fall $\Im(s') < \Im(s)$. Wir wollen beweisen, daß in diesem Fall eine Umordnung der a_ν, die bei beliebig klein gegebenem $\varepsilon > 0$ in den Winkeln $|\arc z| < \varepsilon$ und $|\pi - \arc z| < \varepsilon$ liegen, ausreicht. Dabei sei ε so klein, daß im Winkel

$$\pi + \varepsilon < \arc z < 2\pi - \varepsilon$$

mindestens ein starker Strahl liegt. Sonst wäre der Fall trivial.

Es ist ferner keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß im Winkel $\varepsilon \leqq \arc z \leqq \pi - \varepsilon$ gar keine a_ν liegen. Denn die a_ν in diesem Winkel könnten höchstens eine absolut konvergente Reihe bilden. Wir teilen nun alle a_ν in zwei Klassen A und B, je nachdem a_ν im Winkelpaar $|\arc z| < \varepsilon$ und $|\pi - \arc z| < \varepsilon$ liegt oder im Winkel

$$\pi + \varepsilon \leqq \arc z \leqq 2\pi - \varepsilon.$$

Die Teilreihe von $\sum_1^\infty a_\nu$, die durch Fortlassen der a_ν, die zu B gehören, entsteht, soll mit $\sum_{a_\nu | A} a_\nu$ bezeichnet werden, Partial- und Ausschnittsummen hiervon mit $\sum_{a_\nu | A}^{\nu \leqq n} a_\nu$ und $\sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} a_\nu$. Entsprechend ist $\sum_{a_\nu | B} a_\nu$ usw. erklärt.

Unsere Behauptung ist nun dann bewiesen, wenn man $\sum_{a_\nu | A} a_\nu$ so umordnen kann, daß die Differenz der Partialsummen in alter und neuer Anordnung gegen $s - s'$ strebt. Denn läßt man in $\sum_1^\infty a_\nu$ alle a_ν, die zu B gehören, an ihrem Platz, und erteilt den a_ν, die zu A gehören, die neue Anordnung, so entsteht eine Umordnung von $\sum_1^\infty a_\nu$ zur Summe s'.

Bevor wir diese Umordnung von $\sum_{a_\nu | A} a_\nu$ herstellen, beweisen wir einige Eigenschaften dieser Reihe. Da $\sum_1^\infty \Im(a_\nu) = \Im(s)$ konvergiert und $\sum_{a_\nu | B} \Im(a_\nu)$ monoton gegen $-\infty$ divergiert, muß $\sum_{a_\nu | A} \Im(a_\nu)$ gegen $+\infty$ divergieren. Da in der Identität

$$\sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) = \sum_{n_1}^{n_2} \Im(a_\nu) - \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu)$$

der Subtrahend keine positiven Glieder enthält und der Minuend bei hinreichend großem n_1 absolut beliebig klein ist, so muß bei beliebig

kleinem $\delta > 0$ der Ausschnitt $\sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) > -\delta$ sein; d. h. die Ausschnittsummen von $\sum_{a_\nu | A} \Im(a_\nu)$ haben den lim inf. 0.

Ferner brauchen wir später eine Abschätzung von

$$\left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right|,$$

nach oben: Es ist identisch

$$\sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) = \sum_{n_1}^{n_2} \Re(a_\nu) - \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu),$$

also

$$\left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right| \leqq \left| \sum_{n_1}^{n_2} \Re(a_\nu) \right| + \left| \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right|.$$

Da nun für jedes a_ν aus B gilt

$$|\Re(a_\nu)| \leqq \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot |\Im(a_\nu)|,$$

so ist

$$\left| \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right| \leqq \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} |\Re(a_\nu)| \leqq \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} |\Im(a_\nu)|$$

$$= \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) \right|.$$

Also

$$\left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right| \leqq \left| \sum_{\nu = n_1}^{n_2} \Re(a_\nu) \right| + \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{a_\nu | B}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu = n_1}^{n_2} \Re(a_\nu) \right| + \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{n_1}^{n_2} \Im(a_\nu) - \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) \right|$$

$$\leqq \left| \sum_{n_1}^{n_2} \Re(a_\nu) \right| + \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{n_1}^{n_2} \Im(a_\nu) \right| + \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) \right|.$$

Bei beliebig klein gegebenem $\delta > 0$ ist also für alle hinreichend großen n_1:

$$\left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Re(a_\nu) \right| \leqq \delta + \operatorname{cotg} \varepsilon \cdot \left| \sum_{a_\nu | A}^{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \Im(a_\nu) \right|.$$

Die Umordnung, welche die Partialsummen von $\sum_{a_\nu | A} a_\nu$ asymptotisch um $s - s'$ verkleinert, soll nun nach dem Vorbild des § 1 hergestellt werden. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß unendlich viele a_ν, die zu A gehören, gleich 0 sind. Denn sonst könnte man aus A eine absolut konvergente Teilreihe auswählen, deren Glieder in A durch Nullen ersetzen, die Partialsummen dieser Reihe durch Um-

ordnung asymptotisch um $s - s'$ verkleinern und jetzt die Nullen wieder durch die Glieder der absolut konvergenten Teilreihe ersetzen. Nach den Hilfssätzen 4 und 5 lassen sich ferner aus A zwei Teilreihen M und N auswählen, deren Realteil gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ divergiert, deren Imaginärteil aber absolut konvergiert. Wir nehmen die a_ν, die zu M und N gehören, als reelle Zahlen an. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit; denn man könnte sonst die Imaginärteile dieser a_ν in A fortlassen, die Partialsummen dieser neuen Reihe durch Umordnung asymptotisch um $s - s'$ verkleinern und hätte, wenn man die fortgelassenen Imaginärteile wieder zu den Realteilen hinzufügt, die gewünschte Umordnung von A.

Wir bezeichnen nun die Glieder von $\sum_{a_\nu | A} a_\nu$ der Reihe nach mit $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Dadurch bekommt diese Reihe die Form $\sum_1^\infty b_\nu$. Und es handelt sich jetzt darum, diese Reihe $\sum_1^\infty b_\nu$ mit den Partialsummen B_n so zu einer Reihe $\sum_1^\infty c_\nu$ mit den Partialsummen C_n umzuordnen, daß

$$B_n - C_n \to s - s'$$

oder

$$D_n = B_n - (s - s') - C_n \to 0.$$

Während im § 1 die Zahl D_n auf der reellen Zahlengeraden um den Nullpunkt pendelte und ihm zustrebte, bewegt sich D_n jetzt in der komplexen Zahlenebene und soll ebenfalls dem Nullpunkt zustreben. Dies wird durch eine passende Folge von nachstehenden verschiedenartigen Schritten erreicht:

Schritt erster Art.

Bei bereits definiertem C_n setzen wir $c_{n+1} = 0$.

Schritt zweiter Art.

Im Fall $\Re(D_n) \gtreqless 0$ setzen wir für $\nu > n$ entweder $c_\nu = 0$ oder $c_\nu = b_\nu$, je nachdem b_ν zu N gehört oder nicht zu N gehört. Hierdurch wandert D_n nach links; und da $\sum_{b_\nu | N}' b_\nu \to -\infty$, muß für einen kleinsten Index m $(m > n)$ die Zahl $\Re(D_m) < 0$ werden.

Im Fall $\Re(D_n) < 0$ setzen wir für $\nu > n$ entweder $c_\nu = 0$ oder $c_\nu = b_\nu$, je nachdem b zu M gehört oder nicht; hierbei muß für einen kleinsten Index m die Zahl $\Re(D_m) > 0$ werden. Mit diesem Index m ist der Schritt zweiter Art zu Ende.

Schritt dritter Art.

Für diesen Schritt ist notwendige Voraussetzung, daß es in B_n mindestens ein b_ν mit positivem Imaginärteil gibt, das in C_n nicht vorkommt. b_f sei das früheste dieser b_ν, und b_g sei die erste Null in der Folge $b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}, \ldots$. Dann setzen wir $c_{n+1} = b_{n+1}$, $c_{n+2} = b_{n+2}$, $\ldots, c_{g-1} = b_{g-1}$; aber $c_g = b_f$.

Schritt vierter Art.

Wir setzen c_{n+1} gleich dem frühesten von 0 verschiedenen b_ν, das in B_n, aber nicht in C_n vorkommt. Gibt es kein solches b_ν, so sei $c_{n+1} = b_{n+1}$.

Wir definieren nun $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$ und beginnen die Umordnung von $\sum_1^\infty b_\nu$ mit so viel Schritten erster Art, bis für einen *kleinsten* Index die Zahl $\Im(D_n) > 0$ wird. Wegen $\sum_1^\infty \Im(b_\nu) = +\infty$, wie S. 44 gezeigt, tritt dies ein. Dann führen wir einen Schritt zweiter Art aus, wobei D_n die imaginäre Achse überschreitet und $\Im(D_n)$ sich nicht ändert, also am Schluß dieses Schrittes positiv ist. Daher muß es jetzt in B_n mindestens ein b_ν mit positivem Imaginärteil geben, das in C_n nicht vorkommt. Wir können daher anschließend einen Schritt dritter Art ausführen, wodurch $\Im(D_n)$ verkleinert wird. Sollte $\Im(D_n)$ noch nicht negativ geworden sein, so werden weiter so viele Paare von Schritten zweiter und dritter Art ausgeführt, bis $\Im(D_n) < 0$ wird. Dies tritt ein, da bei Fortsetzung dieses Verfahrens schließlich C_n die gleichen b_ν mit positivem Imaginärteil enthält wie B_n und in C_n kein Glied mit negativem Imaginärteil vorkommt, das nicht auch in B_n enthalten ist. Sobald nun $\Im(D_n) < 0$ geworden ist, wird ein Schritt vierter Art ausgeführt. Hiernach folgen wieder so viele Schritte erster Art, bis zum ersten Male $\Im(D_n) > 0$ wird. Alsdann führt man wieder so viele Paare von Schritten zweiter und dritter Art aus, bis $\Im(D_n)$ wieder zum ersten Male negativ wird. Aus den oben angeführten Gründen tritt dies ein, usw.

Wir beweisen, daß bei unbegrenzter Ausübung dieser Schritte in der sich ergebenden Reihenfolge D_n gegen 0 strebt:

Es möge mit dem Übergang vom Index n_0 zum Index $n_0 + 1 = n_1$ ein Schritt vierter Art vollzogen werden. Dann ist offenbar

$$|\Im(D_{n_0})| \leqq |(c_{n_0})|,$$

und ist m der Schlußindex für den letzten Schritt zweiter Art, so ist

$$|\Re(D_{n_0})| \leqq |\Re(b_m)| + |\Re(c_{n_0})|;$$

d. h. zu Anfang eines Schrittes vierter Art ist $|D_n|$ zuletzt beliebig klein.

Da

$$D_{n_0+1} = D_{n_1} = D_{n_0} + b_{n_1} - c_{n_1},$$

so ist auch $|D_{n_1}|$ zuletzt beliebig klein.

Die nun folgende Serie von Schritten erster Art möge mit dem Index n_2 abbrechen, und es sei $n_1 < n \leqq n_2$. Dann ist

$$|\Im(D_n)| = |\Im(D_{n_1}) + \sum_{n_1+1}^{n} \Im(b_\nu)|$$

$$\leqq |\Im(D_{n_1})| + |\sum_{n_1+1}^{n} \Im(b_\nu)|.$$

Nun ist bei beliebig klein gegebenem $\delta > 0$, wie früher festgestellt, $\sum_{n_1+1}^{n} \Im(b_\nu) > -\delta$ für alle hinreichend großen n_1. Da andererseits die Serie von Schritten erster Art alsbald mit dem Index n_2 aufhört, wenn $\Im(D_{n_2}) > 0$ geworden ist, so folgt

$$|\sum_{n_1+1}^{n} \Im(b_\nu)| \leqq \text{Max}\,(\delta, |\Im(D_{n_1})| + \Im(b_{n_2})).$$

Also:

$$|\Im(D_n)| \leqq |\Im(D_{n_1})| + \text{Max}\,(\delta, |\Im(D_{n_1})| + \Im(b_{n_2})).$$

Für den Realteil gilt

$$|\Re(D_n)| = |\Re(D_{n_1}) + \sum_{n_1+1}^{n} \Re(b_\nu)|$$

$$\leqq |\Re(D_{n_1})| + |\text{cotg}\ \varepsilon \cdot \sum_{n_1+1}^{n} \Im(b_\nu)| + \delta$$

$$\leqq |\Re(D_{n_1})| + \text{cotg}\,\varepsilon \cdot \text{Max}\,(\delta, |\Im(D_{n_1})| + \Im(b_{n_2})) + \delta.$$

Bricht man also inmitten oder am Ende einer Serie von Schritten erster Art ab, so ist $|D_n|$ zuletzt beliebig klein.

Die nun folgende Serie von Schrittpaaren zweiter und dritter Art möge mit dem Index n_3 abbrechen, und es sei $n_2 < n \leqq n_3$. Dann ist offenbar

$$|\Im(D_n)| \leqq \text{Max}\,(\Im(D_{n_2})),\ |c_{n_3}|),$$

da sich während dieses Vorganges $\Im(D_n)$ monoton ändert und zwar von $\Im(D_{n_2}) > 0$ bis $\Im(D_{n_3}) < 0$ und $|\Im(D_{n_3})| \leqq \Im(c_{n_3})$. $|\Re(D_n)|$ ist für alle n $(n_2 < n \leqq n_3)$ höchstens $\text{Max}\,(|\Re(D_{n_2})|,\ |\Re(b_\nu)| + |\Re(c_\mu)|)$, wobei $n_2 < \nu \leqq n_3$ und $n_2 < \mu \leqq n_3$. D_n strebt also gegen Null.

Die Schritte erster und vierter Art sorgen dafür, daß alle b_ν in $\sum_{1}^{\infty} c_\nu$ vorkommen. Damit ist alles Behauptete bewiesen.

Zum Schluß soll noch durch ein Beispiel gezeigt werden, daß im allgemeinen eine Beschränkung der Umordnung auf solche a_ν, die in einer beliebig kleinen Winkelumgebung *eines* starken Strahles liegen, auch im Fall III, 2 nicht möglich ist. Das Beispiel heißt:

$$\sum_1^\infty a_\nu = 0, \quad \text{wo} \quad \begin{cases} a_1 = a_2 = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\, i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad n = 1, 2, \ldots \\ a_{2n+2} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n}\, i. \end{cases}$$

Da $\dfrac{\Im(a_\nu)}{\Re(a_\nu)} \to 0$, so liegen für jedes positive ε außerhalb der Winkel $|\arc z| < \varepsilon$ und $|\pi - \arc z| < \varepsilon$ nur endlich viele a_ν. Die beiden Teile der reellen Achse sind somit einzige starke Strahlen und da $\sum_1^\infty \Im(a_\nu)$ bedingt konvergiert, liegt nach der Schlußbemerkung des § 2 der Fall III, 2 vor. Die Reihe soll nun zur Summe $-1-i$ umgeordnet werden. Es ist trivial, daß dies nicht möglich ist, wenn man sich auf die Umordnung der a_ν im Winkel $|\pi - \arc z| < \varepsilon$ beschränkt. Denn eine solche Umordnung würde nur Partialsummen erzeugen, deren Real- und Imaginärteil mindestens so groß ist wie in der alten Anordnung. Will man die Umordnung auf die a_ν des Winkels $|\arc z| < \varepsilon$ beschränken, so hat man die Aufgabe zu lösen:

Die Divergenz von $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu}$ beide im Sinne des Hilfssatzes 1 asymptotisch um 1 zu verlangsamen und zwar durch die *gleiche* Umordnung. Wir zeigen, daß dies nicht möglich ist:

s_n und S_n seien die Partialsummen von $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ in der alten Anordnung; s_n' und S_n' die Partialsummen dieser auf die *gleiche* Weise umgeordneten Reihen. S_n' und s_n' mögen die ersten $m = m(n)$ Glieder von S_n und s_n lückenlos enthalten; d. h. die Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}$ kommen in s_n' vor, $\frac{1}{m+1}$ aber nicht, und $\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{m}}$ kommen in S_n' vor, $\frac{1}{\sqrt{m+1}}$ aber nicht. Da jedes Glied, das in der alten Anordnung vor-

kommt, auch in der neuen Anordnung auftreten muß, so gilt $m(n) \to \infty$, wenn $n \to \infty$. Jetzt bilden wir den Quotienten[12])

$$\frac{\frac{s_n - s'_n}{S_n - S'_n}}{} = \frac{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots \frac{1}{m+(n-m)} - \frac{1}{m+h_1} - \frac{1}{m+h_2} - \cdots - \frac{1}{m+h_{n-m}}}{\frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{m+(n-m)}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_1}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_2}} \cdots - \frac{1}{\sqrt{m+h_{n-m}}}}.$$

Dabei denken wir uns die h_ν monoton steigend: $h_1 < h_2 < \ldots < h_{n-m}$. Da $\frac{1}{m+1}$ in s_m nicht vorkommt, ist $h_1 > 1$, also $h_2 > 2$, $h_3 > 3$ usw. Der Quotient

$$\frac{\frac{s_n - s'_n}{S_n - S'_n}}{} = \frac{\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+h_1}\right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+h_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+n-m} - \frac{1}{m+h_{n-}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{m+2}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{m+n-m}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_{n-m}}}\right)}$$

enthält also im Zähler und Nenner nur positive Summanden. Nun gilt aber die von ν unabhängige Abschätzung

$$\frac{\frac{1}{m+\nu} - \frac{1}{m+h_\nu}}{\frac{1}{\sqrt{m+\nu}} - \frac{1}{\sqrt{m+h_\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{m+\nu}} + \frac{1}{\sqrt{m+h_\nu}} < \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Jeder Summand des Zählers kann also durch das $\frac{2}{\sqrt{m}}$-fache des entsprechenden Summanden des Nenners nach oben abgeschätzt werden. Daraus folgt:

$$\frac{s_n - s'_n}{S_n - S'_n} < \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Der Quotient strebt also für *jede* Umordnung gegen Null, während er für die geforderte Umordnung gegen 1 streben müßte.

---

[12]) Es ist nur $S'_n = S_n$, wenn $n = m$ ist. In diesem Falle definieren wir

$$\frac{s_n - s'_n}{S_n - S'_n} = 0.$$

(Eingegangen am 23. April 1936.)

Über die Bestimmung von zwei speziellen Klassen von Eilinien.

Von

E. Grünbergs in Riga.

Herr P. Ganapathi hat in dieser Zeitschrift behauptet[1]), daß die Anzahl q der umschriebenen Quadrate einer Eilinie immer ungerade ist. Dasselbe gelte von der Anzahl s der Spitzen der Mediane (d. h. des Ortes der Mittelpunkte der Durchmesser). Wie Herr W. Fenchel bemerkt, ist der Beweis dieser Sätze nicht stichhaltig[2]). Herr H. Gericke hat ferner Eilinien angegeben, die genau zwei umschriebene Quadrate besitzen[3]), nämlich ein bestimmtes Dreieck und dessen Parallelkurven. Einige einfache Betrachtungen werden uns gestatten, Eilinien mit beliebigem (also auch geradem) q oder s herzustellen, die der strengeren Definition der Eilinien genügen, nämlich deren Tangente und nie verschwindende Krümmung sich stetig mit dem laufenden Punkte ändern. Mit Herrn F. Severi nennen wir solche Kurven intuitiv.

Eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Herrn H. Gericke gibt eine erste Methode zur Herstellung von Eilinien mit geradem q: In ein Quadrat beschreibe man eine Eilinie E ein, die eine Mittelsenkrechte D des Quadrates zur Symmetrieachse hat. E hat dann immer noch ein zweites umschriebenes Quadrat, dessen eine Diagonale mit D zusammenfällt. Falls noch andere umschriebene Quadrate in endlicher Anzahl vorhanden sind, so sind diese zu je zweien symmetrisch in bezug auf D und voneinander verschieden. Die Gesamtanzahl q der umschriebenen Quadrate ist also, falls endlich, immer gerade.

Im folgenden erhalten wir ein Verfahren zur effektiven Herstellung intuitiver Eilinien mit vorher gegebenem q oder s ($q \geqq 1$, $s \geqq 3$). Der laufende Punkt, Punkt φ genannt, wird überall durch den Winkel φ bestimmt, den die betreffende orientierte Tangente mit einem festen Strahl bildet.

1. Es sei $\mu(\varphi)$ die Entfernung der Tangenten in den Punkten φ und $\varphi + \pi$. Diese Funktion hat offenbar die Periode π. Die Anzahl q

[1]) Math. Zeitschr. 38 (1934), S. 490—491.

[2]) Zentralblatt f. Math. 9 (1934), S. 30.

[3]) Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 201.

der umschriebenen Quadrate ist gleich der Nullstellenanzahl der Funktion

$$f(\varphi) = \mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

in jedem Intervall $\beta \leqq \varphi < \beta + \frac{\pi}{2}$. In jedem solchen Intervalle hat $f(\varphi)$ die gleiche Anzahl q von Nullstellen, da $f(\varphi)$ die Periode π hat, nie unendlich groß wird und

$$f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -f(\varphi) \tag{1}$$

ist. Die Anzahl der Nullstellen, in denen $f(\varphi)$ das Vorzeichen wechselt, ist wegen (1) stets ungerade, also $q \geqq 1$ (der Fall $q = 1$ tritt auch wirklich ein, z. B. bei der Ellipse).

Da wir nur einige und nicht etwa alle Eilinien mit gegebenem q bestimmen wollen, wählen wir $\mu(\varphi)$ und also auch $f(\varphi)$ in der Form eines Polynoms in $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$. Es seien $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots q)$ die voneinander verschiedenen Nullstellen von $f(\varphi)$ im betrachteten Intervall und $a_i (i = 1, 2, \ldots, q)$ ihre respektiven Ordnungen. Durch Multiplikation der einzelnen Glieder mit geeigneten Potenzen von $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi$ bringt man $f(\varphi)$ auf die Form

$$f(\varphi) = F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^{q} (\cos 2\alpha_i \sin 2\varphi - \sin 2\alpha_i \cos 2\varphi)^{a_i},$$

wo F ein beliebiges Polynom seiner zwei Variablen ist, das keine reellen Nullstellen hat. Ferner ist, in Folge von (1)

$$\sum_{i=1}^{q} a_i = 2n + 1 \qquad (n \geqq 0 \text{ und ganz}). \tag{2}$$

$f(\varphi)$, etwas einfacher geschrieben, lautet:

$$f(\varphi) = F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^{q} [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}. \tag{3}$$

Um nun alle Eilinien herzustellen, denen die so gebildete Funktion $f(\varphi)$ entspricht, beachten wir, daß der Vektorenbereich einer Eilinie in jeder Richtung die doppelte Breite der Eilinie hat. Es genügt also eine Eilinie E zu bilden, die ein Symmetriezentrum hat und der die Funktion $f_E = 2f(\varphi)$ entspricht. Alle anderen Eilinien, deren Vektorenbereich E ist, stellt man dann nach einem von Herrn P. Vincensini angegebenen Verfahren her[4]).

Es sei der Koordinatenanfangspunkt das Symmetriezentrum von E und $p(\varphi)$ sein Abstand von der Tangente im Punkte φ. Dann ist

$$p(\varphi) = \tfrac{1}{2}\mu_E(\varphi),$$

---

[4]) P. Vincensini, Sur les corps convexes admettant un domaine vectoriel donné, Comptes Rendus 201 (1935), S. 761—763.

also muß man haben

$$p(\varphi) - p\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = f(\varphi). \tag{4}$$

Eine evidente Lösung von (4) ist

$$p_1(\varphi) = \tfrac{1}{2} f(\varphi),$$

und da $p(\varphi) - p_1(\varphi)$ die Periode $\frac{\pi}{2}$ hat, so ist die allgemeine Lösung der gesuchten Art

$$p(\varphi) = \tfrac{1}{2} f(\varphi) + P(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi),$$

wo P ein beliebiges Polynom von $\sin 4\varphi$, $\cos 4\varphi$ ist. Folglich ist

$$p(\varphi) = \tfrac{1}{2} F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^{q} [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i} + P(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi). \tag{5}$$

Dann ist die Tangentengleichung von E

$$A(x, y, \varphi) \equiv x \sin\varphi - y \cos\varphi - p = 0, \tag{6}$$

und die Elimination von φ zwischen (6) und

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} \equiv x \cos\varphi + y \sin\varphi - p' = 0 \tag{7}$$

gibt die Parameterdarstellung in Punktkoordinaten (die Akzente bedeuten Ableitungen nach φ):

$$x = -p \sin\varphi + p' \cos\varphi,$$
$$y = p \cos\varphi + p' \sin\varphi.$$

Die Kurve E hat alle ihre Punkte in einem endlichen Bereich und ist geschlossen. Ferner dreht sich die Tangente (6) im Punkte φ stets in derselben Richtung um 2π, wenn dieser Punkt die Kurve E einmal durchläuft. Damit E eine intuitive Eilinie ist, muß E in jedem Punkte einen endlichen, stetigen und nicht verschwindenden Krümmungshalbmesser ϱ haben. Da nun

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = p + p'',$$

so sind die zwei ersten Bedingungen immer erfüllt, und es bleibt

$$p(\varphi) + p''(\varphi) \neq 0 \quad \text{für jedes reelle } \varphi. \tag{8}$$

Diese Bedingung ist hinreichend, denn wegen der beständigen Richtung der Tangentendrehung kann E keine Doppelpunkte haben, ohne Spitzen zu haben, da die Tangente sich um 2π dreht, wenn der Berührungspunkt die Kurve durchläuft.

Insbesondere, ist (8) erfüllt, so verschwindet p nie. Wir haben also den folgenden Satz: Hat das trigonometrische Polynom $p(\sin\varphi, \cos\varphi)$ (oder die Summe $p(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi)$, was ja dasselbe ist)

reelle Nullstellen, so hat auch $p + k \frac{d^2 p}{d \varphi^2}$ reelle Nullstellen für $k = 4$. Genauere Untersuchungen, die nicht in den Rahmen dieser Schrift fallen, würden wahrscheinlich eine untere Grenze für die Werte von k geben, denn für jedes k gilt der Satz nicht (z. B. für $p = n + (n+1)\cos\varphi$, $k = \frac{2n}{n+1}$ hat man $p + p'' = n - (n-1)\cos\varphi$).

Der Bedingung (8) ist leicht zu genügen durch die Wahl eines konstanten Gliedes in P, dessen Verhältnis zu den anderen Koeffizienten genügend groß ist. F und P können sich auf zwei Konstanten reduzieren. Nehmen wir z. B. $F = ak$, $P = a$, so gibt (8)

$$(\Pi(\varphi) \equiv \prod_{i=1}^{q} [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}):$$

$$a + k a [\Pi(\varphi) + \Pi''(\varphi)] \neq 0.$$

Nun ist aber

$$|\Pi(\varphi)| \leqq 1,$$

$$|\Pi''(\varphi)| \leqq 4 \left(\sum_{i=1}^{q} a_i\right)^2 = 4(2n+1)^2$$

bei Beachtung von (2). Für

$$|k| < \frac{1}{4(2n+1)^2 + 1}, \quad k \neq 0$$

stellt also

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi - a \{1 + k \prod_{i=1}^{q} [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}\} = 0$$

eine Eilinie dar, die genau q umschriebene Quadrate hat.

In konkreten Fällen findet man natürlich für den Parameter k weitere Grenzen, z. B. muß bei $q = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$$0 < |k| < \frac{\sqrt{35}}{54}$$

sein, und es ist $\frac{\sqrt{35}}{54} > 0{,}1095$, während $\frac{1}{4(2n+1)^2+1} = \frac{1}{37} < 0{,}0271$ ist.

Bei Beachtung der Bedingungen (2) und (8) gibt aber die Tangentengleichung (6), wo p die Form (5) hat, eine Eilinie mit genau q umschriebenen Quadraten, deren Seiten sie in den Punkten $\alpha_i + \frac{j\pi}{2}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) berühren. Die α_i können ganz beliebig gewählt werden unter der einzigen Bedingung

$$\alpha_i \not\equiv \alpha_l \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{wenn} \quad i \neq l.$$

2. Betrachten wir als Tangente eines konvexen Vieleckes eine Minkowskische Stützgerade, d. h. eine Gerade, die durch eine Ecke geht,

ohne es in einem anderen Punkte zu schneiden, oder die mit einer Seite zusammenfällt (in welchem Falle jeder Punkt dieser Seite ein Berührungspunkt ist), so gibt uns jedes konvexe n-Eck, dessen keine zwei Seiten parallel sind, ein triviales Beispiel einer Eilinie, deren Mediankurve n Spitzen hat.

In ähnlicher Weise wie vorher, können wir jedoch auch intuitive Eilinien mit beliebigem $s (s \geqq 3)$ herstellen.

Es sei $\varrho(\varphi)$ der Krümmungshalbmesser im Punkte φ. Die Zahl s ist gleich der Nullstellenanzahl von

$$R(\varphi) = \varrho(\varphi) - \varrho(\varphi + \pi) \tag{9}$$

in jedem Intervall $\beta \leqq \varphi < \beta + \pi$, da $\frac{1}{2} R(\varphi)$ der Krümmungshalbmesser der Mediankurve in dem Punkte ist, der φ entspricht[5]). Genau dieselben Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen (nur ist hier die Periode gleich 2π) zeigen uns, daß in jedem solchen Intervall die gleiche Anzahl von Nullstellen liegt, wobei $R(\varphi)$ in einer ungeraden Anzahl von ihnen das Vorzeichen wechselt. $R(\varphi)$ hat aber noch Bedingungen zu erfüllen. Sind x_0, y_0 die Koordinaten des Punktes $\varphi = 0$ und ist die x-Achse parallel zu der betreffenden Tangente, so sind die Koordinaten des Punktes φ:

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_0^{\varphi} \varrho(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi, \\ y = y_0 + \int_0^{\varphi} \varrho(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi, \end{cases} \tag{10}$$

Bei einer intuitiven Eikurve fallen die Punkte 0 und 2π zusammen. Die beiden Integrale, von 0 bis 2π genommen, müssen also verschwinden, das heißt es ist in Folge von (9)

$$\begin{cases} \int_0^{\pi} R(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = 0, \\ \int_0^{\pi} R(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Diese Bedingungen zeigen, daß s nie 1 oder 2 sein kann, denn in diesen beiden Fällen würde $R(\varphi)$ nur in einer Stelle $\varphi = \alpha$ des Intervalles $0 \leqq \varphi < \pi$ das Vorzeichen wechseln. Der Ausdruck

$$R(\varphi) \sin(\varphi - \alpha) = \cos \alpha \, R(\varphi) \sin \varphi - \sin \alpha \, R(\varphi) \cos \varphi$$

würde also in diesem Intervall ein konstantes Vorzeichen haben und von 0 bis π integriert eine von Null verschiedene Größe ergeben, was den Be-

---

[5]) P. Ganapathi, Theorems on Ovals. Journal of the Annamalai Un. B I, 1 (1932), S. 67—71. Man erhält dieses Resultat noch einfacher durch Differenzieren nach φ.

dingungen (11) widerspricht. $R(\varphi)$ wechselt also in mindestens drei Nullstellen das Vorzeichen; folglich ist $s \geqq 3$.

Wählen wir $R(\varphi)$ und $\varrho(\varphi)$ in der Form von trigonometrischen Polynomen, so erhalten wir wie vorher

$$R(\varphi) = F(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi) \prod_{i=1}^{s} [\sin(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}$$

mit

$$\prod_{i=1}^{s} a_i = 2n + 3 \qquad (n \geqq 0 \text{ und ganz}) \tag{12}$$

und wenigstens drei a_i ungerade, ferner

$$\varrho(\varphi) = \tfrac{1}{2} R(\varphi) + P(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi),$$

wobei F und P beliebige Polynome von $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$ sind, die für kein reelles φ verschwinden. Der so erhaltene Krümmungshalbmesser $\varrho(\varphi)$ ist beschränkt und stetig, und die Formeln (10) geben stets endliche Werte für x und y. Ist (11) erfüllt, so ist die Kurve (10) geschlossen, und jeder Tangentenrichtung φ entspricht ein und nur ein Punkt φ. Doppelpunkte können nicht auftreten, ohne daß Rückkehrpunkte auftreten. Damit also (10) eine intuitive Eilinie darstellt, ist neben (11) noch notwendig und hinreichend, daß ϱ nie verschwindet, was man durch die Wahl eines genügend großen konstanten Gliedes in P stets erreichen kann.

Den Bedingungen (11) genügt man am einfachsten dadurch, daß man zuerst F und die a_i beliebig wählt, mit Beachtung von (12). Dann gibt (11) zwei Gleichungen in $\sin \alpha_i$ und $\cos \alpha_i$, so daß man alle α_i, bis auf zwei, frei wählen kann. Es muß nur

$$\alpha_i \not\equiv \alpha_l \pmod{\pi} \quad \text{für} \quad i \neq l \text{ sein},$$

was man gegebenen Falles für die zwei letzten α_i durch eine eventuelle Abänderung der frei gewählten α_i wird erreichen können.

Als besonders einfaches Beispiel von Funktionen, die (11) und (12) erfüllen, haben wir:

$$R(\varphi) = 2ak \sin s\varphi$$

$s \geqq 3$ und ungerade

$$\left(\text{d. i. } \alpha_i = (i-1)\frac{\pi}{s},\ a_i = 1\right)$$

und

$$R(\varphi) = 2ak \sin\varphi \sin s\varphi$$

$s \geqq 4$ und gerade

$$\left(\text{d. i. } \alpha_i = (i-1)\frac{\pi}{s},\ a_1 = 2,\ a_i = 1 \quad \text{für} \quad i > 1\right).$$

Wählen wir dann $P = a$, so geben uns diese Funktionen für

$$0 < |k| < 1$$

intuitive Eilinien, derer Mediankurven genau s Spitzen haben.

Nehmen wir in y_0 das bei der Integration von $\varrho \sin\varphi$ erscheinende konstante Glied a auf, so lautet die Parameterdarstellung der betreffenden Eilinien

$$x = x_0 + a\left\{\sin\varphi + \frac{k}{2}\left[\frac{1-\cos(s+1)\varphi}{s+1} + \frac{1-\cos(s-1)\varphi}{s-1}\right]\right\}$$

$$y = y_0 + a\left\{-\cos\varphi + \frac{k}{2}\left[\frac{\sin(s-1)\varphi}{s-1} - \frac{\sin(s+1)\varphi}{s+1}\right]\right\}$$

für ungerades s und

$$x = x_0 + a\left\{\sin\varphi + \frac{k}{2}\left[\frac{\sin(s-2)\varphi}{2(s-2)} - \frac{\sin(s+2)\varphi}{2(s+2)}\right]\right\}.$$

$$y = y_0 + a\left\{-\cos\varphi + \frac{k}{2}\left[\frac{1-\cos s\varphi}{s} - \frac{1-\cos(s+2)\varphi}{2(s+2)} - \frac{1-\cos(s-2)\varphi}{2(s-2)}\right]\right\}$$

für gerades s. Bezeichnen wir die Punkte φ und $\varphi + \pi$ mit M und M', so ist der entsprechende Punkt N der Mediankurve der Mittelpunkt von MM'. Die Koordinaten von N sind

$$\xi = x_0 + a\frac{k}{2}[\ ],$$

$$\eta = y_0 + a\frac{k}{2}[\ ],$$

wobei in die Klammern die in den Quadratklammern der entsprechenden x und y enthaltene Ausdrücke zu setzen sind. Dann prüft man mühelos nach, daß $\frac{1}{2}R(\varphi)$ wirklich der Krümmungshalbmesser der Mediankurve im Punkte N ist. Da N diese Kurve einmal durchläuft, wenn φ von 0 bis π geht, hat die Kurve also genau s Spitzen.

(Eingegangen am 12. Februar 1936.)

Birkhoffsche und harmonische Verbände.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Literaturverzeichnis 58
Einleitung 59
§ 1. Hilfssätze über beliebige Verbände 60
§ 2. Birkhoffsche Verbände 64
§ 3. Weitere Kriterien für Birkhoffsche Verbände 68
§ 4. Harmonische Verbände 72
§ 5. Ein Satz über Unterverbände sechster Ordnung 76

Literaturverzeichnis.

Bei Verweisen auf dieses Verzeichnis wird das in eckigen Klammern beigefügte Zeichen der Arbeit angegeben.

G. Birkhoff.

[1] On the combination of subalgebras. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. 29 (1933), S. 441—464.

[2] Applications of lattice algebra. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. 30 (1934), S. 115—122.

[3] On the lattice theory of ideals. Bulletin of the Am. Math. Soc. (1934), S. 613—619.

R. Dedekind.

[W. XXVI] Über eine Erweiterung des Symbols (a, b) in der Theorie der Moduln. Ges. Werke II (1931), Abh. XXVI, S. 59—85.

[W. XXVIII] Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. Ges. Werke II, Abh. XXVIII, S. 103—147.

[W. XXX] Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe. Ges. Werke II, Abh. XXX, S. 236—271.

F. Klein-Barmen.

[Verb. 1] Beiträge zur Theorie der Verbände. Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 227—239.

[Verb. 2] Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen 111 (1935), S. 596—621.

[Verb. 3] Über ausgeglichene Verbände. Math. Annalen 112 (1936), S. 411—418.

[Verb. 4] Dedekindsche und distributive Verbände. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 261—280.

Einleitung.

Im folgenden führe ich erstens, anknüpfend an Untersuchungen von Dedekind über Modulgruppen[1]) und von Birkhoff über B-Lattices[2]), zwei abstrakte Verbände ein, die hinsichtlich ihres axiomatischen Gefüges dual zueinander sind und als *Birkhoffsche* Verbände erster und zweiter Art bezeichnet werden mögen. An zweiter Stelle untersuche ich diejenigen Birkhoffschen Verbände, die sowohl solche erster als auch zweiter Art sind; derartige Verbände mögen *harmonisch* heißen. Fig. 1 gibt schematisch die Gliederung der Theorie der Verbände wieder, soweit sie bis jetzt vorliegt; wegen der Bedeutung der Buchstaben wird auf die beigefügte Tabelle verwiesen.

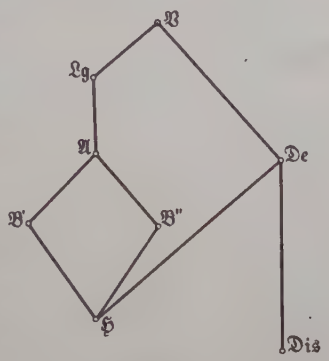


Fig. 1.

	Art des Verbandes	Eingeführt in	Erklärung
$\mathfrak{A}$	ausgeglichen	[Verb. 3]	4
$\mathfrak{B}'$	Birkhoffsch erster Art	vorliegender Abh.	1′
$\mathfrak{B}''$	Birkhoffsch zweiter Art	vorliegender Abh.	1″
$\mathfrak{De}$	Dedekindsch	[Verb. 4]	8
$\mathfrak{Dis}$	distributiv	[Verb. 4]	9
$\mathfrak{H}$	harmonisch	vorliegender Abh.	2
$\mathfrak{Lg}$	längenendlich	[Verb. 2]	11
$\mathfrak{B}$	allgemein	[Verb. 2]	1

Drittens wird in dieser Arbeit, indem wir einen in [Verb. 2] mitgeteilten Satz[3]) verschärfen, gezeigt, daß jeder harmonische Verband von genügend hoher Ordnung mindestens einen Unterverband sechster Ordnung enthält.

Der besseren Übersichtlichkeit wegen ordnen wir die auf Grund des Dualitätsprinzipes einander entsprechenden Sätze oder Satzteile *nebeneinander* an; auf den Satz oder Satzteil *links* bzw. *rechts* vom Trennungsstrich wird durch *einfache* bzw. *zweifache* Strichelung der zur Kennzeichnung dienenden Ziffern und Buchstaben verwiesen. Wir bemerken weiter, daß wir uns bei den dual einander entsprechenden Sätzen auf den Beweis des links vom Trennungsstrich angegebenen Satzes beschränken.

Für das Folgende wird die Kenntnis der mit [Verb. 1] bis [Verb. 4] bezeichneten Arbeiten vorausgesetzt.

---

[1]) Dedekind [W. XXX], S. 259 ff.

[2]) Birkhoff [1], S. 445 ff.

[3]) S. 618.

§ 1.

Hilfssätze über beliebige Verbände.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir in diesem Paragraphen die für das Weitere erforderlichen Hilfssätze zusammen.

Satz 1. *Es seien a und b nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines Verbandes M. Wird*

(1) $\quad a \cup b = c \quad | \quad a \cap b = c$

gesetzt und sind x, y Elemente aus M derart, daß

(2) $\quad c \succ x \succ a, \quad | \quad c \prec x \prec a,$

(3) $\quad c \succ y \succ b \quad | \quad c \prec y \prec b$

stattfindet, so gilt

$$x \cup y = c, \quad | \quad x \cap y = c,$$

insbesondere also

$$x \cup b = c, \quad | \quad x \cap b = c,$$
$$a \cup y = c. \quad | \quad a \cap y = c.$$

Beweis. Nach (2′) und (3′) findet

$$c \succ x \cup y \succ a \cup b$$

statt, woraus wegen (1′) die Behauptung folgt.

Satz 2. *Es seien a, b und c Elemente eines Verbandes M derart, daß c*

oberer | *unterer*

Nachbar von a und b ist. Sind dann a und b voneinander verschieden, so sind a und b auch voneinander unabhängig und umgekehrt.

Beweis. 1. Es sei $a \neq b$. Wären a und b voneinander abhängig, so fände entweder $a \succ b$ oder $b \succ a$ statt. Im ersten Fall würde

$$c \succ a \succ b$$

und im zweiten Fall

$$c \succ b \succ a,$$

in beiden Fällen also $a = b$ folgen.

2. Die Umkehrung ist selbstverständlich.

Satz 3. *Es seien a, b und c Elemente eines Verbandes M derart, daß a und b voneinander unabhängig sind. Ist dann c*

oberer | *unterer*

Nachbar von a und b, so gilt[4])

$$a \cup b = c. \quad | \quad a \cap b = c.$$

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen verallgemeinern.

---

[4]) Vgl. [Verb. 2], S. 609. Satz 31.

Satz 4. *Es seien a, b und c Elemente eines Verbandes M derart, daß a und b voneinander unabhängig sind. Findet dann*

$$c \succ a \quad | \quad c \prec a$$

statt und ist c

oberer | *unterer*

Nachbar von b, so gilt

$$a \cup b = c, \quad | \quad a \cap b = c.$$

Beweis. Aus

$$c \succ a,\ c \succ b$$

folgt

$$c \succ a \cup b \succ b.$$

Da c und b Nachbarn sind, findet entweder $a \cup b = c$ oder $a \cup b = b$ statt. Das letztere ist unmöglich, da a und b voneinander unabhängig sind.

Satz 5. *Es seien a, b und c nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines Verbandes M derart, daß*

$$\begin{array}{l|l} c \succ a, & c \prec a, \\ c \succ b & c \prec b \end{array}$$

stattfindet; es seien

$$x_0, x_1, \ldots, x_m$$

Elemente aus M mit

(4) $$x_0 = c,\ x_m = a$$

und

(5) $$x_0 \succ \ldots \succ x_m. \quad | \quad x_0 \prec \ldots \prec x_m.$$

Es werde

(6) $$y_\mu = b \cap x_\mu \quad | \quad y_\mu = b \cup x_\mu \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

gesetzt. Dann gilt

$$\begin{array}{ll|l} (7) & y_0 = b,\ y_m = a \cap b, & y_0 = b,\ y_m = a \cup b, \\ (8) & y_0 \succ \ldots \succ y_m. & y_0 \prec \ldots \prec y_m. \end{array}$$

Ferner ist

(9) $$x_\alpha \cap y_\beta = y_\varrho \quad | \quad x_\alpha \cup y_\beta = y_\varrho$$

mit

$$\varrho = \max(\alpha, \beta).$$

Beweis. Wegen (4) und (6′) ist (7′), wegen der aus (5′) fließenden Abhängigkeit

$$b \cap x_0 \succ \ldots \succ b \cap x_m$$

ist (8′) in Kraft.

Was (9′) anbetrifft, so findet nach (6′)

$$x_\alpha \cap y_\beta = b \cap x_\alpha \cap x_\beta$$

statt, woraus wegen

$$x_\alpha \cap x_\beta = x_\varrho$$

wieder nach (6′)

$$x_\alpha \frown y_\beta = b \frown x_\varrho = y_\varrho$$

folgt.

Satz 6. *Es sei die Voraussetzung von*

Satz 5′ | *Satz 5″*

in Kraft. Ferner seien a und b voneinander unabhängig. Dann haben die Folgen

(10) $$x_0, x_1, \ldots, x_m$$

und

(11) $$y_0, y_1, \ldots, y_m$$

kein Element gemeinsam. Sind überdies x_α und $y_{\alpha-1}$ voneinander abhängig, so gilt

$$y_{\alpha-1} = y_\alpha.$$

Beweis. Hätten die Folgen (10) und (11) ein Element gemeinsam, so wäre $b > a$; a und b wären also voneinander abhängig.

Sind x_α und $y_{\alpha-1}$ voneinander abhängig, so gilt entweder

$$x_\alpha < y_{\alpha-1}$$

oder

$$x_\alpha > y_{\alpha-1}.$$

Der erste Fall ist wegen

$$a < x_\alpha < y_{\alpha-1} < b$$

unmöglich. Im zweiten Falle folgt

$$b \frown x_\alpha > b \frown y_{\alpha-1},$$

also

$$y_\alpha > y_{\alpha-1},$$

woraus sich wegen (8′) die behauptete Identität ergibt.

Satz 7. *Es seien*

(12) $$x_0, \ldots, x_m,$$

(13) $$y_0, \ldots, y_m$$

Elemente eines Verbandes M derart, daß

x_μ *oberer Nachbar von* $x_{\mu+1}$ $(\mu = 0, \ldots, m-1)$,
y_μ „ „ „ $y_{\mu+1}$ $(\mu = 0, \ldots, m-1)$,
x_μ „ „ „ y_μ $(\mu = 0, \ldots, m)$

ist. Ferner seien x_m und y_0 voneinander unabhängig. Dann stellt die Gesamtheit N der Elemente (12) *und* (13) *einen distributiven Unterverband von M vom Typ der Fig. 2 dar.*

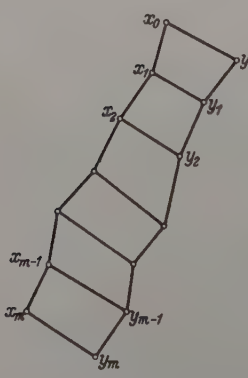


Fig. 2.

Dieser Satz stimmt inhaltlich mit seinem dualen Gegenstück überein.

Beweis. 1. Ersichtlich gilt

$$x_\alpha \cup x_\beta = x_\sigma, \quad x_\alpha \cap x_\beta = x_\varrho,$$
$$y_\alpha \cup y_\beta = y_\sigma, \quad y_\alpha \cap y_\beta = y_\varrho$$

mit

$$\sigma = \min(\alpha, \beta), \quad \varrho = \max(\alpha, \beta).$$

2. Wir zeigen nunmehr, daß

$$x_\alpha \cup y_\beta = x_\sigma, \quad x_\alpha \cap y_\beta = y_\varrho$$

stattfindet, wobei σ und ϱ die eben angegebene Bedeutung haben. Aus Dualitätsgründen genügt es, die erste Beziehung als zutreffend nachzuweisen.

Es sei $\alpha > \beta$. Dann sind x_α und y_β voneinander unabhängig. Wären x_α und y_β nämlich voneinander abhängig, so fände entweder

$$x_\alpha > y_\beta \quad \text{oder} \quad x_\alpha < y_\beta$$

statt. Im ersten Falle folgt

$$x_\beta > x_\alpha > y_\beta,$$

was unmöglich ist, da x_β und y_β Nachbarn sind und die Reihen (12) und (13), wie man leicht einsieht, kein Element gemeinsam haben. Im zweiten Falle folgt

$$x_m < x_\alpha < y_\beta < y_0,$$

was unmöglich ist, da x_m und y_0 voneinander unabhängig sind. Nunmehr gilt nach Satz 4', da $x_\beta > x_\alpha$ stattfindet und x_β oberer Nachbar von y_β ist

$$x_\alpha \cup y_\beta = x_\beta.$$

Es sei $\alpha \leqq \beta$. Aus

$$x_\alpha > y_\alpha > y_\beta$$

folgt sofort

$$x_\alpha \cup y_\beta = x_\alpha.$$

3. Da, wie man sich sofort überzeugt, alle Unterverbände fünfter Ordnung von N distributiv sind, ist N nach einem bekannten Satz[5]) selbst distributiv.

Der damit bewiesene Satz läßt sich in verschiedener Weise verallgemeinern; doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Satz 8. *Es seien*

(14) $$u;\ a, b, c;\ x, y, z;\ v$$

Elemente eines Verbandes M derart, daß

u	*oberer*	*Nachbar*	*von*	$a, b, c,$
a	„	„	„	$y, z,$
b	„	„	„	$z, x,$
c	„	„	„	$x, y,$
x	„	„	„	$v,$
y	„	„	„	$v,$
z	„	„	„	v

[5]) [Verb. 4], S. 278, Satz 34.

ist. Ferner seien a, b, c voneinander verschieden und ebenso x, y, z. Dann stellt die Gesamtheit N der Elemente (14) *einen distributiven Unterverband von M vom Typ der Fig.* 3 *dar.*

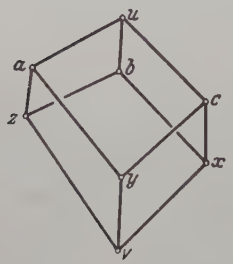


Fig. 3.

Dieser Satz stimmt inhaltlich mit seinem dualen Gegenstück überein.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß a, x voneinander unabhängig sind. Wären a und x nämlich voneinander abhängig, so fände entweder

$$a > x \quad \text{oder} \quad a < x$$

statt. Im ersten Falle folgt, da $x < a$ stattfindet und x unterer Nachbar von c ist, nach Satz 4''

$$a \cap c = x.$$

Diese Beziehung steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach y unterer Nachbar von a und c ist und somit

$$a \cap c = y$$

stattfindet. Im zweiten Fall folgt

$$a < x < c,$$

was unmöglich ist, da a und c voneinander unabhängig sind.

Ebenso zeigt man, daß b, y voneinander unabhängig sind und c, z.

Nach Satz 4 ergibt sich nunmehr leicht — die Ausführung bleibe dem Leser überlassen —, daß N ein Verband ist. Daß N distributiv ist, folgt wie bei Satz 7 aus dem Umstand, daß alle Unterverbände fünfter Ordnung von N distributiv sind.

Anmerkung. Der aus den Elementen (14) bestehende Verband achter Ordnung besitzt keinen Unterverband siebenter Ordnung; dagegen sind 6 Unterverbände sechster Ordnung vorhanden, nämlich

$$u, a, b, z, x, v;$$
$$u, a, b, z, y, v;$$
$$u, b, c, x, y, v;$$
$$u, b, c, x, z, v;$$
$$u, c, a, y, z, v;$$
$$u, c, a, y, x, v.$$

§ 2.

Birkhoffsche Verbände.

M sei ein *längenendlicher* Verband; es soll die Einwirkung der beiden folgenden zueinander dualen *Axiome* untersucht werden.

(α) Sind a, b und c Elemente aus M derart, daß a und b voneinander unabhängig sind und c

oberer | unterer

Nachbar von a und b ist, so ist

$a \cap b$ unterer | $a \cup b$ oberer

Nachbar von a und b.

Daß die Aussagen (α') und (α'') tatsächlich Axiome sind, zeigen die in den Fig. 4 bis 7 wiedergegebenen $\mathfrak{A}$-Verbände. Fig. 4 stellt einen $\mathfrak{A}$-Verband dar, für den weder (α') noch (α'') in Kraft ist, Fig. 5 einen solchen, für den (α'), aber nicht (α''), Fig. 6 einen solchen, für den umgekehrt (α''), aber nicht (α'), und schließlich Fig. 7 einen solchen, für den sowohl (α') als auch (α'') in Kraft ist.

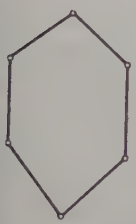


Fig. 4.

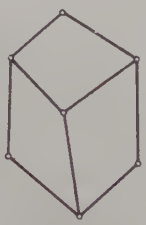


Fig. 5.

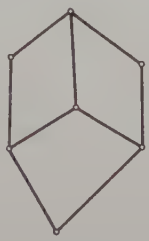


Fig. 6.

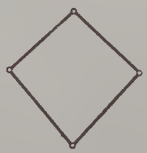


Fig. 7.

Erklärung 1. Ein dem Axiom

(α') | (α'')

genügender *längenendlicher* Verband heiße ein *Birkhoffscher* Verband

erster | zweiter

Art; abgekürzt ein

$\mathfrak{B}'$-Verband. | $\mathfrak{B}''$-Verband.

Satz 9. *Mit*

(α') | (α'')

ist das folgende Axiom gleichwertig:

(β) Zwei verschiedene Elemente aus M mit einem gemeinsamen

oberen | unteren

Nachbarn haben auch einen gemeinsamen

unteren | oberen

Nachbarn.

Beweis: Satz 2 und 3.

Satz 10. *In bezug auf einen längenendlichen Verband M ist*

(α') | (α'')

mit dem folgenden Axiom gleichwertig[6]):

[6]) Birkhoff [1], S. 446.

(γ) Sind a, b und c Elemente aus M derart, daß a und b voneinander unabhängig sind,

$$c > a \quad | \quad c < a$$

stattfindet und c

oberer | unterer

Nachbar von b ist, so ist

$$a \cap b \text{ unterer} \quad | \quad a \cup b \text{ oberer}$$

Nachbar von a.

Beweis. 1. Daß mit (γ') auch (α') gilt, ist klar.

2. Folgendermaßen ergibt sich, daß auch das Umgekehrte der Fall ist. Es seien a, b und c Elemente aus M, die der in (γ') ausgesprochenen Voraussetzung genügen. Da M längenendlich ist, gibt es in M mindestens eine c mit a verbindende Kette[7])

(15) $$x_0, x_1, \ldots, x_m$$

mit

$$x_0 = c, \quad x_m = a$$

und

$$x_0 > x_1 > \ldots > x_m;$$

wegen $c \neq a$ ist $m \geqq 1$. Es werde (vgl. Satz 5')

$$y_\mu = b \cap x_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

gesetzt, so daß

$$y_0 = b, \quad y_m = a \cap b$$

ist. Überdies haben noch Satz 6' die Folgen (15) und

(16) $$y_0, y_1, \ldots, y_m$$

kein Element gemeinsam.

Nach Satz 5' gilt weiter

$$x_\alpha \cap y_\beta = y_\varrho$$

mit

$$\varrho = \max(\alpha, \beta);$$

insbesondere ist also

$$x_\mu \cap y_{\mu-1} = y_\mu.$$

Wir zeigen nunmehr induktiv, daß y_μ unterer Nachbar von $y_{\mu-1}$ und x_μ ist. Da (α') für M in Kraft ist, ist die Behauptung für $\mu = 1$ richtig. Sie sei für einen bestimmten Wert von μ richtig. Dann ist x_μ oberer Nachbar von y_μ und $x_{\mu+1}$, wobei y_μ und $x_{\mu+1}$, wie bereits bemerkt, voneinander verschieden, also voneinander unabhängig sind. Somit ist nach (α') das Element $y_\mu \cap x_{\mu+1}$, d. h. $y_{\mu+1}$ unterer Nachbar von y_μ und $x_{\mu+1}$. Insbesondere ist also y_m, d. h. $a \cap b$ unterer Nachbar von x_m, d. h. von a.

---

[7]) Vgl. [Verb. 3], S. 412, Satz 1.

Anmerkung. Die Folge (16) ist eine Kette in M, die mit der Kette (15) gleiche Länge hat. Ferner ergibt sich nach Satz 7, daß die aus den Elementen (15) und (16) bestehende Menge ein Unterverband von M vom Typ der Fig. 2 ist.

Satz 11. *In jedem nichtlinearen*

$\mathfrak{B}'$-*Verband* | $\mathfrak{B}''$-*Verband*

gibt es mindestens einmal zwei Elemente a und b derart, daß $a \cup b$ oberer und $a \cap b$ unterer Nachbar von a und b ist.

Beweis. Es sei M ein nichtlinearer $\mathfrak{B}'$-Verband. Dann gibt es in M mindestens einmal zwei voneinander unabhängige Elemente x und y. Es werde $c = x \cup y$ gesetzt. Da M längenendlich ist, besitzt c zwei untere Nachbarn a und b derart, daß

$$c > a > x, \quad c > b > y$$

stattfindet. Nach Satz 1′ gilt dann

$$a \cup b = c.$$

Ferner ist $a \neq b$; andernfalls wäre $a = b = c$. Aus dem Umstand, daß M ein $\mathfrak{B}'$-Verband ist, folgt nunmehr, daß $a \cap b$ unterer Nachbar von a und b ist.

Satz 12. *Es sei M ein*

$\mathfrak{B}'$-*Verband.* | $\mathfrak{B}''$-*Verband.*

Es seien

$$u;\ a, b, c$$

Elemente aus M derart, daß u

oberer | *unterer*

Nachbar von a, b, c ist. Dann stellt, wenn

$x = b \cap c,\ y = c \cap a,\ z = a \cap b,\ v = a \cap b \cap c$ | $x = b \cup c,\ y = c \cup a,\ z = a \cup b,\ v = a \cup b \cup c$

gesetzt wird, die Gesamtheit N der Elemente

$$u;\ a, b, c;\ x, y, z;\ v$$

einen Unterverband von M dar, der von der zweiten, vierten, fünften oder achten Ordnung ist.

Beweis. 1. Sind alle Elemente a, b, c identisch, so ist N ein $\mathfrak{L}$-Verband zweiter Ordnung.

2. Sind nur zwei der Elemente a, b, c identisch, so ist N ein nichtlinearer Verband vierter Ordnung.

3. Es sei

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a.$$

Nach (α') ist dann z unterer Nachbar von a und b; entsprechend ist x unterer Nachbar von b und c; entsprechend ist y unterer Nachbar von c

und a. Nun sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: Entweder stimmen wenigstens zwei der Elemente x, y, z überein oder x, y, z sind alle voneinander verschieden.

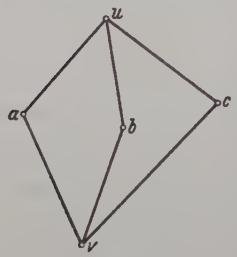


Fig. 8.

Ist das erste der Fall, so folgt, daß die vier Elemente x, y, z, v identisch sind; nach Satz 3 ergibt sich leicht, daß N ein Verband ist und zwar ein nichtdistributiver $\mathfrak{De}$-Verband[8]) fünfter Ordnung (vgl. Fig. 8).

Ist das zweite der Fall, so ist v gemeinsamer unterer Nachbar von x, y, z; und N ist nach Satz 8 ein $\mathfrak{Dis}$-Verband achter Ordnung vom Typ der Fig. 3.

§ 3.

Weitere Kriterien für Birkhoffsche Verbände.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

Satz 13. *Jeder*

$\mathfrak{B}'$-*Verband* | $\mathfrak{B}''$-*Verband*

ist ausgeglichen[9]).

Beweis. Es ist folgendes zu zeigen: Sind a und c Elemente eines $\mathfrak{B}'$-Verbandes M derart, daß $c > a$ stattfindet und wenigstens eine c mit a verbindende Kette in M die Länge m hat, so haben *alle* c mit a verbindenden Ketten in M die Länge m.

Die Behauptung ist ersichtlich richtig für $m = 1$. In diesem Fall sind nämlich c und a Nachbarn, und es gibt nur eine einzige Kette, die c mit a verbindet.

Die Behauptung sei für einen bestimmten Wert von m richtig. Wir weisen nach, daß sie dann auch für $m+1$ richtig ist. Es sei

$$x_0, x_1, \ldots, x_{m+1} \qquad (m \geqq 1)$$

mit

$$x_0 = c, \quad x_{m+1} = a$$

eine c mit a verbindende Kette von der Länge $m+1$. Es sei

$$y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$$

mit

$$y_0 = c, \quad y_{n+1} = a$$

eine zweite c mit a verbindende Kette. Zu zeigen ist, daß $m = n$ ist. Wir unterscheiden die beiden Fälle $x_1 = y_1$ und $x_1 \neq y_1$.

---

[8]) Vgl. [Verb. 4], S. 278.

[9]) Vgl. auch Birkhoff [1], S. 446.

Im ersten Fall sind

$$x_1, \ldots, x_{m+1}$$

und

$$y_1, \ldots, y_{n+1}$$

zwei x_1 mit a verbindende Ketten, von denen die erste und somit auch die zweite die Länge m hat, so daß $m = n$ ist.

Im zweiten Fall ist, da c oberer Nachbar von x_1 und y_1 ist, $x_1 \cap y_1$ nach (α') unterer Nachbar von x_1 und y_1. Wegen

$$x_1 \succ a, \quad y_1 \succ a$$

gilt

$$x_1 \cap y_1 \succ a;$$

infolgedessen gibt es in M mindestens eine $x_1 \cap y_1$ mit a verbindende Kette. Es sei

$$z_2, z_3, \ldots, z_{p+1}$$

mit

$$z_2 = x_1 \cap y_1, \; z_{p+1} = a$$

eine derartige Kette. Da

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}$$

und

$$x_1, z_2, z_3, \ldots, z_{p+1}$$

zwei x_1 mit a verbindende Ketten sind, von denen die erste und somit auch die zweite die Länge m hat, gilt $m = p$. Da

$$y_1, z_2, z_3, \ldots, z_{m+1}$$

und

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$$

zwei y_1 mit a verbindende Ketten sind, von denen die erste und somit auch die zweite die Länge m hat, gilt $m = n$.

Der Umstand, daß die Birkhoffschen Verbände zu den $\mathfrak{A}$-Verbänden gehören, legt es nahe, die in [Verb. 3] eingeführte[10]) Funktion $[x, y]$ heranzuziehen. Es ergibt sich, wie in den folgenden Sätzen gezeigt wird, daß sich die Birkhoffschen Verbände auch durch gewisse zusätzliche Bedingungen charakterisieren lassen, die der Funktion $[x, y]$ auferlegt werden.

Satz 14. *In bezug auf einen ausgeglichenen Verband M ist*

(α') | (α'')

mit dem folgenden Axiom gleichwertig:

(δ) Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

(17) $[a \cup b, a] \geqq [b, a \cap b]$. | $[a \cup b, a] \leqq [b, a \cap b]$.

[10]) S. 413 und 416.

Beweis. 1. Es sei M ein der Aussage (δ') genügender $\mathfrak{A}$-Verband. Es seien a und b verschiedene Elemente aus M mit einem gemeinsamen oberen Nachbarn. Nach Satz 3′ ist $a \cup b$ dieser gemeinsame Nachbar. Nach (17′) gilt dann

$$1 \geqq [b, a \cap b].$$

Da sogar für beliebige Elemente a und b stets

$$[b, a \cap b] \geqq 0$$

ist, findet entweder

$$[b, a \cap b] = 0 \quad \text{oder} \quad [b, a \cap b] = 1$$

statt. Das erste ist unmöglich, da $a > b$ ausgeschlossen ist. Also gilt die zweite Beziehung, die besagt, daß $a \cap b$ unterer Nachbar von b ist. Aus Symmetriegründen folgt, daß $a \cap b$ auch unterer Nachbar von a ist. Somit ist (α') in Kraft.

2. Es sei M ein der Aussage (α') genügender $\mathfrak{Lg}$-Verband. Nach Satz 13 ist M ausgeglichen, so daß das Symbol $[x, y]$ für beliebige Elemente x, y aus M sinnvoll ist. Nachzuweisen ist, daß für irgend zwei Elemente a und b aus M die Beziehung (17′) stattfindet. Sind a und b voneinander *abhängig*, so ist (17′) identisch erfüllt. In dem Fall, daß a und b voneinander *unabhängig* sind, sei

$$x_0, x_1, \ldots, x_m$$

mit

$$x_0 = a \cup b, \quad x_m = a$$

eine $a \cup b$ mit a verbindende Kette in M. Es werde (vgl. Satz 5′ und Satz 10′)

$$y_\mu = b \cap x_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

gesetzt, so daß

$$y_0 = b, \quad y_m = a \cap b$$

ist.

Sind nun zwei Elemente $y_{\mu-1}$ und x_μ voneinander *abhängig*, so gilt nach Satz 6′

$$y_{\mu-1} = y_\mu,$$

d. h.

$$[y_{\mu-1}, y_\mu] = 0.$$

Sind $y_{\mu-1}$ und x_μ dagegen voneinander *unabhängig*, so ist nach Satz 10′, da

$$x_{\mu-1} > y_{\mu-1}$$

stattfindet und $x_{\mu-1}$ oberer Nachbar von x_μ ist, das Element $y_{\mu-1} \cap x_\mu$, d. h. nach Satz 5′ das Element y_μ, unterer Nachbar von $y_{\mu-1}$; d. h.

$$[y_{\mu-1}, y_\mu] = 1.$$

Für *jedes* μ gilt somit

$$[y_{\mu-1}, y_\mu] \leqq 1,$$

woraus sich

$$[b, a \cap b] = \sum_{\mu=1}^{m} [y_{\mu-1}, y_\mu] \leqq m$$

ergibt. Daraus und aus

$$[a \cup b, a] = \sum_{\mu=1}^{m} [x_{\mu-1}, x_\mu] = m$$

folgt (17′).

Satz 15. *In bezug auf einen ausgeglichenen Verband M ist*

$$(\delta') \quad | \quad (\delta'')$$

mit dem folgenden Axiom gleichwertig:

(ε) Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$(18) \quad \begin{array}{c|c} [a \cup b, a] + [a \cup b, b] & [a \cup b, a] + [a \cup b, b] \\ \geqq [a, a \cap b] + [b, a \cap b]. & \leqq [a, a \cap b] + [b, a \cap b]. \end{array}$$

Beweis. 1. Für zwei beliebige Elemente a und b eines $\mathfrak{A}$-Verbandes gilt[11])

$$[a \cup b, a] + [a, a \cap b] = [a \cup b, b] + [b, a \cap b],$$

woraus durch Addition zu (18′), wenn M ein der Aussage (ε') genügender $\mathfrak{A}$-Verband ist, die Beziehung (17′) hervorgeht.

2. Es sei M ein der Aussage (δ') genügender $\mathfrak{A}$-Verband. Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt dann

$$[a \cup b, a] \geqq [b, a \cap b], \quad [a \cup b, b] \geqq [a, a \cap b],$$

woraus durch Addition (18′) hervorgeht.

Satz 16. *In bezug auf einen ausgeglichenen Verband M ist*

$$(\delta') \quad | \quad (\delta'')$$

mit dem folgenden Axiom gleichwertig:

(ζ) Für drei beliebige Elemente a, b und x aus M gilt

$$(19) \quad \begin{array}{c|c} [a \cup b, x] + [a \cap b, x] & [a \cup b, x] + [a \cap b, x] \\ \geqq [a, x] + [b, x]. & \leqq [a, x] + [b, x]. \end{array}$$

Beweis. Die in jedem $\mathfrak{A}$-Verband geltenden Beziehungen

$$[a \cup b, x] = [a \cup b, a] + [a, x],$$
$$[b, x] = [b, a \cap b] + [a \cap b, x]$$

führen (17) in (19) über und umgekehrt.

---

[11]) Vgl. [Verb. 3], S. 413, Satz 3.

§ 4.

Harmonische Verbände.

Erklärung 2. Ein Verband, der sowohl ein $\mathfrak{B}'$- als auch ein $\mathfrak{B}''$-Verband ist, heiße *harmonisch* ($\mathfrak{H}$-Verband).

Alle Verbände von der ersten bis zur vierten Ordnung und alle längenendlichen $\mathfrak{L}$-Verbände sind harmonisch.

In einer früheren Arbeit[12]) ist dargelegt worden, daß eine (P', P'')-Menge einen Verband darstellt, wenn $P'(x, y)$ als $x \cup y$ und $P''(x, y)$ als $x \cap y$ aufgefaßt wird. Ergänzend bemerken wir, daß bei dieser Deutung die (P', P'')-Mengen $\mathfrak{H}$-Verbände sind.

Das folgende Beispiel zeigt, daß es $\mathfrak{H}$-Verbände, also auch $\mathfrak{A}$- und $\mathfrak{Lg}$-Verbände gibt, bei denen zwei Elemente durch *unendlich* viele Ketten miteinander verbunden werden können. Es sei M diejenige (P', P'')-Menge, deren Elemente eine Gerade f, die Punkte von f und der Leerraum e sind. Faßt man M in dem eben dargelegten Sinn als Verband auf, so enthält M unendlich viele f mit e verbindende Ketten; jede dieser Ketten besteht aus drei Elementen, nämlich aus f, x und e, wo x ein beliebiger Punkt der Geraden f ist.

Kriterien für $\mathfrak{H}$-Verbände ergeben sich durch Verschmelzung der zur Charakterisierung der $\mathfrak{B}'$- und $\mathfrak{B}''$-Verbände dienenden Axiome. Durch Prägnanz und Leichtigkeit in der Handhabung zeichnen sich die in den beiden nachstehenden Sätzen zusammengestellten Kriterien aus.

Satz 17. *Die folgende Aussage ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein längenendlicher Verband M harmonisch ist:*

(β) Zwei verschiedene Elemente aus M mit einem gemeinsamen oberen Nachbarn haben auch einen gemeinsamen unteren Nachbarn und umgekehrt.

Satz 18. *Jede der folgenden Aussagen ist notwendig und hinreichend dafür, daß ein ausgeglichener Verband M harmonisch ist:*

(δ) Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$[a \cup b, a] = [b, a \cap b].$$

(ε) Für zwei beliebige Elemente a und b aus M gilt

$$[a \cup b, a] + [a \cup b, b] = [a, a \cap b] + [b, a \cap b].$$

(ζ) Für drei beliebige Elemente a, b und x aus M gilt

$$[a \cup b, x] + [a \cap b, x] = [a, x] + [b, x].$$

Während die $\mathfrak{B}'$- und $\mathfrak{B}''$-Verbände nicht notwendigerweise auch $\mathfrak{De}$-Verbände sind, liegen, wie der nächste Satz zeigt, die Verhältnisse bei den $\mathfrak{H}$-Verbänden anders.

---

[12]) Vgl. [Verb. 1], S. 237.

Satz 19. *Jeder* $\mathfrak{H}$*-Verband ist auch ein* $\mathfrak{De}$*-Verband.*

Beweis. Sind a, b, c und x beliebige Elemente eines $\mathfrak{H}$-Verbandes M, so findet nach (ζ)

$$[(a \cup b) \cap (a \cup c), x] = [a \cup b, x] + [a \cup c, x] - [a \cup b \cup c, x]$$

und, falls

$$a \cap ((a \cup b) \cap c) = a \cap c$$

berücksichtigt wird,

$$[a \cup ((a \cup b) \cap c), x] = [a, x] + [(a \cup b) \cap c, x] - [a \cap c, x]$$

statt. Die letzte Beziehung geht wegen

$$[(a \cup b) \cap c, x] = [a \cup b, x] + [c, x] - [a \cup b \cup c, x]$$

und

$$[a \cap c, x] = [a, x] + [c, x] - [a \cup c, x]$$

in

$$[a \cup ((a \cup b) \cap c), x] = [a \cup b, x] + [a \cup c, x] - [a \cup b \cup c, x]$$

über. Somit gilt

$$[(a \cup b) \cap (a \cup c), x] = [a \cup ((a \cup b) \cap c), x].$$

Demnach haben die Elemente

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) \quad \text{und} \quad a \cup ((a \cup b) \cap c)$$

denselben Rang[13]) in bezug auf das Element x. Wegen der für drei Elemente a, b und c eines beliebigen Verbandes geltenden Beziehung[14])

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) > a \cup ((a \cup b) \cap c)$$

folgt

$$(a \cup b) \cap (a \cup c) = a \cup ((a \cup b) \cap c),$$

so daß M nach einem bekannten Kriterium[15]) ein $\mathfrak{De}$-Verband ist.

Der Satz 19 läßt sich mit einer in der Natur der Sache liegenden Einschränkung umkehren, wie weiterhin (Satz 26) gezeigt wird. Die Betrachtungen werden erleichtert, wenn wir zunächst auf einige Struktureigentümlichkeiten der $\mathfrak{De}$-Verbände eingehen, wobei sich eine wohl zuerst von Dedekind[16]) bemerkte interne Zuordnung von Nutzen erweist.

Satz 20. *Es seien a und b zwei nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines* $\mathfrak{De}$*-Verbandes M. Es sei x ein Element aus M derart, daß*

(20) $$a \cup b > x > a$$

stattfindet. Es werde

(21) $$y = b \cap x$$

---

[13]) Vgl. [Verb. 3], S. 417.
[14]) Vgl. [Verb. 2], S. 602.
[15]) Vgl. [Verb. 4], S. 272.
[16]) Dedekind [W. XXX], S. 259—260.

gesetzt. Dann gilt

(22) $$a \cap b < y < b$$

und

(23) $$x = a \cup y.$$

Ist umgekehrt y ein (22) *genügendes Element aus M und wird x durch* (23) *erklärt, so gelten* (20) *und* (21).

Beweis. 1. Wegen $x > a$ findet[17])

$$(a \cup b) \cap x = (x \cap b) \cup a$$

statt. Hiernach folgt aus (21) und (20)

$$a \cup y = a \cup (b \cap x) = x \cap (b \cup a) = x,$$

d. h. (23), und aus (20)

$$b \cap (a \cup b) > b \cap x > a \cap b,$$

d. h. (22).

2. Ähnlich folgt aus (23) und (22)

$$b \cap x = b \cap (a \cup y) = y \cup (a \cap b) = y,$$

d. h. (21), und aus (22)

$$a \cup (a \cap b) < a \cup y < a \cup b,$$

d. h. (20).

Erklärung 3. Daß x und y zwei den Beziehungen (20) bis (23) genügende Elemente eines De-Verbandes M sind, werde durch

$$x \leftrightarrow y \qquad (M;\ a, b)$$

ausgedrückt[18]).

Satz 21. *Das Symbol $\leftrightarrow$ stellt eine* (1, 1)*-deutige Zuordnung dar; insbesondere gilt*

$$\left.\begin{array}{l} a \cup b \leftrightarrow b \\ a \leftrightarrow a \cap b \end{array}\right| \qquad (M;\ a, b).$$

Satz 22. *Aus $a > b$ und $x \leftrightarrow y$ folgt $x = a$, $y = b$.*

Aus $a < b$ und $x \leftrightarrow y$ folgt $x = y$.

Dieser Satz stimmt inhaltlich mit Satz 17 in [Verb. 2], S. 603 überein.

Satz 23. *Sind x_1 und x_2 zwei voneinander abhängige bzw. unabhängige Elemente eines De-Verbandes, so sind auch die zugeordneten Elemente y_1 und y_2 voneinander abhängig bzw. unabhängig und umgekehrt. Ist x_1 oberer bzw. unterer Nachbar von x_2, so ist auch y_1 oberer bzw. unterer Nachbar von y_2 und umgekehrt. Ist insbesondere $a \cup b$ oberer Nachbar von a, so ist b oberer Nachbar von $a \cap b$ und umgekehrt.*

[17]) Vgl. [Verb. 4], S. 272.

[18]) Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so kann der Hinweis auf den Verband M und die Elemente a und b unterbleiben.

Satz 24. *Mit*

$$x_1 \longleftrightarrow y_1,$$
$$x_2 \longleftrightarrow y_2$$

ilt auch

$$x_1 \cup x_2 \longleftrightarrow y_1 \cup y_2,$$
$$x_1 \cap x_2 \longleftrightarrow y_1 \cap y_2.$$

Beweis. 1. Aus

$$x_1 = a \cup y_1,$$
$$x_2 = a \cup y_2$$

olgt

$$x_1 \cup x_2 = a \cup (y_1 \cup y_2).$$

2. Aus

$$y_1 = b \cap x_1,$$
$$y_2 = b \cap x_2$$

olgt

$$y_1 \cap y_2 = b \cap (x_1 \cap x_2).$$

Folgerung. Mit

$$x_1 \longleftrightarrow y_1,$$
$$x_2 \longleftrightarrow y_2$$

gilt auch

$$b \cap (x_1 \cup x_2) = (b \cap x_1) \cup (b \cap x_2),$$
$$a \cup (y_1 \cap y_2) = (a \cup y_1) \cap (a \cup y_2);$$

n einem De-Verband gelten also in beschränktem Maße auch die distributiven Gesetze.

Satz 24 ist ferner die Quelle des folgenden Satzes.

Satz 25. *Es seien a und b Elemente eines De-Verbandes M. Es ei X ein Unterverband von M derart, daß für jedes Element x aus X die Beziehung*

$$a \cup b > x > a$$

tattfindet. Dann ist die Menge Y der Elemente y, die vermöge der Zuordnung

$$x \longleftrightarrow y \qquad (M;\ a,\ b)$$

rzeugt werden, ein zu X isomorpher Unterverband von M.

Folgerung 1. Mit X ist auch Y ein $\mathfrak{L}$-Verband; mit X ist auch Y ine Kette in M.

Folgerung 2. Die durch zwei Elemente a und b eines De-Verbandes M bestimmten Unterverbände [19])

$$r(a \cup b,\ a), \qquad r(b,\ a \cap b)$$

ind isomorph.

Wir kommen zur Umkehrung des Satzes 19.

---

[19]) Vgl. [Verb. 4], S. 265.

Satz 26. *Jeder längenendliche* De-*Verband ist auch ein* H-*Verband.*

Beweis. Sind a, b und c Elemente eines längenendlichen De-Verbandes M derart, daß a und b voneinander unabhängig sind und c oberer Nachbar von a und b ist, so gilt nach Satz 3′

$$c = a \cup b;$$

nach Satz 23 ist dann $a \cap b$ unterer Nachbar von a und b, so daß M dem Axiom (α') genügt. Ähnlich zeigt man, daß M auch dem Axiom (α'') genügt.

Folgerung. Ein längenendlicher Verband ist dann und nur dann harmonisch, wenn er Dedekindsch ist.

Satz 27. *Ein Verband M ist dann und nur dann harmonisch, wenn alle Unterverbände von M ausgeglichen sind.*

Beweis. 1. Es sei M ein H-Verband. Nach dem Vorhergehenden ist M ein De-Verband. Nun ist jeder Unterverband eines De-Verbandes selbst Dedekindsch. Infolgedessen ist jeder Unterverband von M auch harmonisch, also nach Satz 13 auch ausgeglichen.

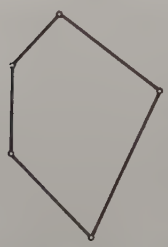


Fig. 9.

2. Es sei M ein Verband derart, daß alle Unterverbände von M — dabei sei M eingeschlossen — ausgeglichen sind. Dann ist M auch Dedekindsch. Wäre das nämlich nicht der Fall, so hätte M nach einem bekannten Satz[20]) mindestens einen Unterverband vom Typ der Fig. 9, der ersichtlich nicht ausgeglichen ist. Aus dem Umstand, daß M längenendlich und Dedekindsch ist, folgt nach Satz 26, daß M harmonisch ist.

§ 5.

Ein Satz über Unterverbände sechster Ordnung.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

Satz 28. *Es sei M ein längenendlicher Verband und N ein eigentlicher Unterverband von M. Dann gibt es in M mindestens einmal zwei benachbarte Elemente x und y derart, daß x Element von N ist, während y nicht Element von N ist.*

Beweis. Es seien a und b Elemente aus M derart, daß a Element von N ist, während b nicht Element von N ist. Nach Voraussetzung gibt es derartige Elemente. Es sei

$$z_1, z_2, \ldots, z_r$$

mit

$$z_1 = a, \quad z_r = a \cap b$$

[20]) Vgl. [Verb. 4], S. 273, Satz 24.

eine a mit $a \cap b$ verbindende Kette in M; es sei

$$z_r, z_{r+1}, \ldots, z_s$$

mit

$$z_s = b$$

eine $a \cap b$ mit b verbindende Kette in M. Dann gehören die Elemente der zusammengesetzten Folge

$$z_1, \ldots, z_r, \ldots, z_s$$

zum Teil zu N, zum Teil nicht zu N. Infolgedessen gibt es in dieser Folge mindestens einmal zwei benachbarte Elemente

$$x = z_\lambda, \quad y = z_{\lambda+1}$$

derart, daß x Element von N ist, während y nicht Element von N ist.

Der in der Überschrift angekündigte Satz lautet:

Satz 29. *Jeder $\mathfrak{H}$-Verband von einer höheren als der k-ten Ordnung enthält für $k \leqq 6$ mindestens einen Unterverband k-ter Ordnung.*

Beweis. Da der Fall $k \leqq 5$ bereits seine Erledigung gefunden hat[21]), beschränken wir uns auf die Behandlung des Falles $k = 6$. Es sei M ein $\mathfrak{H}$-Verband n-ter Ordnung; es sei $n > 6$. Unter $\mathfrak{U}(\mu)$ werde ein Unterverband μ-ter Ordnung von M verstanden. $\delta(z)$ gebe die Anzahl der unteren, $\varepsilon(z)$ die Anzahl der oberen Nachbarn eines Elementes z aus M an.

Da die Behauptung nach einem bekannten Satz[22]) richtig ist, wenn M ein $\mathfrak{L}$-Verband ist, darf angenommen werden, daß es in M mindestens einmal zwei voneinander unabhängige Elemente gibt und infolgedessen auch mindestens ein Element u mit $\delta(u) \geqq 2$ und mindestens ein Element v mit $\varepsilon(v) \geqq 2$.

Wir führen den Nachweis der Existenz eines $\mathfrak{U}(6)$ in der Weise, daß wir die verschiedenen Fälle durchgehen, die hinsichtlich $\delta(u)$ und $\varepsilon(v)$ möglich sind:

I′) M enthalte ein Element u mit $\delta(u) \geqq 3$.

I″) M enthalte ein Element v mit $\varepsilon(v) \geqq 3$.

II) M enthalte kein Element u mit $\delta(u) \geqq 3$ und kein Element v mit $\varepsilon(v) \geqq 3$.

Jeder dieser Fälle führt auf verschiedene Unterfälle, die selbst wieder untergeteilt werden.

I′) Es seien a, b, c drei untere Nachbarn von u. Nach Satz 12 enthält dann M entweder einen $\mathfrak{U}(8)$ vom Typ der Fig. 3 oder einen $\mathfrak{U}(5)$ vom Typ der Fig. 8. Ist das erstere der Fall, so enthält M nach der Anmerkung zu Satz 8 sicher einen $\mathfrak{U}(6)$. Im zweiten Fall läßt sich immer ein $\mathfrak{U}(6)$ herstellen, wie anschließend gezeigt wird. Wir stützen uns dabei auf den in Satz 28 bewiesenen Umstand, daß wenigstens ein Element des obigen $\mathfrak{U}(5)$ Nachbar eines nicht diesem $\mathfrak{U}(5)$ angehörenden Elementes ist.

[21]) Vgl. [Verb. 2], S. 618 ff.

[22]) Vgl. [Verb. 2], S. 608, Satz 26.

Hat u einen *oberen* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$w,\ u,\ a,\ b,\ c,\ v$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 10).

Hat u einen von a, b, c verschiedenen *unteren* Nachbarn w, so sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

Entweder gilt

(24) $$a \frown w = b \frown w = c \frown w,$$

und dann stellt die Menge

$$u,\ a,\ b,\ c,\ w,\ v$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 11).

Oder (24) gilt nicht; es sei etwa

$$a \frown w \neq b \frown w;$$

nach Satz 12 erzeugen dann die Elemente u, a, b, w einen $\mathfrak{U}(8)$ vom Typ der Fig. 3, so daß M sicher einen $\mathfrak{U}(6)$ enthält.

Hat a einen von u verschiedenen *oberen* Nachbar w, so stellt die Menge

$$u \smile w,\ u,\ w,\ a,\ b,\ v$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 12).

Hat a einen von v verschiedenen *unteren* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$u,\ a,\ b,\ v,\ w,\ v \frown w$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 13).

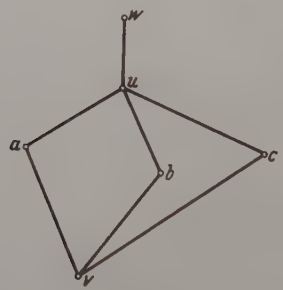


Fig. 10.

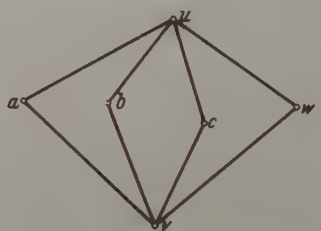


Fig. 11.

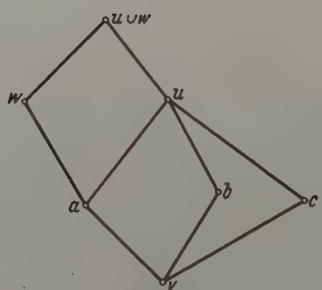


Fig. 12.

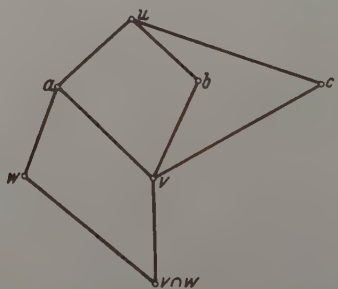


Fig. 13.

Hinsichtlich der Behandlung der noch ausstehenden Elemente b, c und v genügt es zu bemerken, daß bei b und c genau wie bei a, bei v dagegen dual zu u verfahren wird. Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall I′ bewiesen.

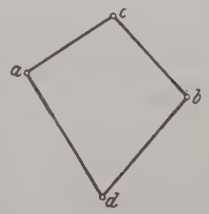


Fig. 14.

I″) Dieser Fall findet in dualer Weise seine Erledigung.

II) In diesem Fall enthält M, wie in Satz 11 gezeigt worden ist, einen $\mathfrak{U}(4)$ vom Typ der Fig. 14, wobei c oberer, d unterer Nachbar von a und b ist. Indem man diesem $\mathfrak{U}(4)$ ähnlich wie bei dem in I′ betrachteten $\mathfrak{U}(5)$ ein Element anhängt, ergibt sich, daß M mindestens einen $\mathfrak{U}(5)$ enthält, der vom Typ der Fig. 15 oder der Fig. 16 ist, wobei im ersten Fall u oberer Nachbar von c, im zweiten Fall v unterer Nachbar von d ist.

Demgemäß legen wir der weiteren Behandlung die folgende Einteilung zugrunde:

II′) M enthalte wenigstens einen $\mathfrak{U}(5)$ vom Typ der Fig. 15.

II″) M enthalte wenigstens einen $\mathfrak{U}(5)$ vom Typ der Fig. 16.

Wie soeben führt jeder dieser Fälle auf verschiedene Unterfälle, die selbst wieder untergeteilt werden.

II′) Hat u einen *oberen* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$w,\ u,\ c,\ a,\ b,\ d$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 17).

Hat u einen von c verschiedenen *unteren* Nachbarn w, so findet

$$w \cap c = a \quad \text{oder} \quad w \cap c = b$$

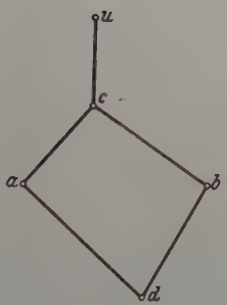


Fig. 15.

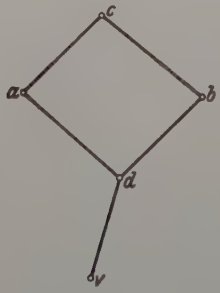


Fig. 16.

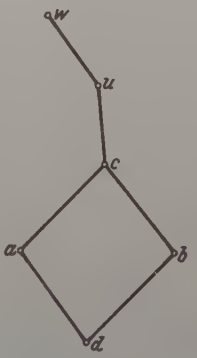


Fig. 17.

statt, da andernfalls $\delta(c) \geqq 3$ wäre; beide Male stellt die Menge

$$u,\ w,\ c,\ a,\ b,\ d$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 18, wo $w \cap c = a$ angenommen ist).

Hat c einen von u verschiedenen *oberen* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$u \cup w,\ u,\ c,\ a,\ b,\ d$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 19).

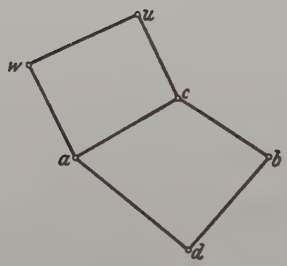


Fig. 18.

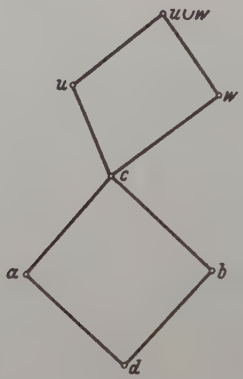


Fig. 19.

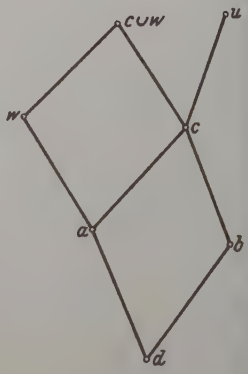


Fig. 20.

Den Fall, daß c einen von a und b verschiedenen *unteren* Nachbarn hat, haben wir ausgeschlossen.

Hat a einen von c verschiedenen *oberen* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$c \cup w,\ w,\ c,\ a,\ b,\ d,$$

wobei $c \cup w$ mit u zusammenfallen kann oder nicht, einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 20, wo $c \cup w \neq u$ angenommen ist).

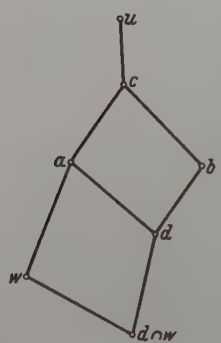


Fig. 21.

Hat a einen von d verschiedenen *unteren* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$u,\ c,\ a,\ b,\ d,\ d \cap w$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 21).

Genau wie a wird b behandelt.

Den Fall, daß d einen von a und b verschiedenen *oberen* Nachbarn hat, haben wir ausgeschlossen.

Hat d einen *unteren* Nachbarn w, so stellt die Menge

$$u,\ c,\ a,\ b,\ d,\ w$$

einen $\mathfrak{U}(6)$ dar (vgl. Fig. 22).

Damit ist die Behauptung des Satzes für den Fall II′ bewiesen.

II″) Dieser Fall findet in dualer Weise seine Erledigung.

Da weitere Möglichkeiten nicht bestehen, ist der Satz 29 in vollem Umfang bewiesen. Zusammenfassend stellen wir fest, daß jeder $\mathfrak{H}$-Verband von einer höheren als der sechsten Ordnung mindestens einen $\mathfrak{U}(6)$, aber nicht notwendigerweise einen $\mathfrak{U}(7)$ enthält.

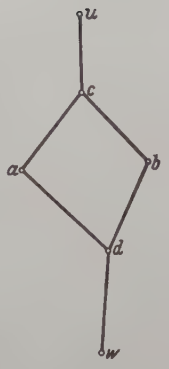


Fig. 22.

(Eingegangen am 23. April 1936.)

Nachtrag (1. Oktober 1936). Das Literaturverzeichnis zur Theorie der Verbände ist zu ergänzen durch O. Ore, On the foundation of abstract algebra I., Annals of Math. 36 (1935), S. 406—437. In der Oreschen Arbeit, die ich während der Drucklegung der vorliegenden kennen gelernt habe, werden insbesondere die Strukturverhältnisse der Dedekindschen Verbände eingehend untersucht.

Über das Berührungsmaß von Kurven.

Von

E. Peschl und K. H. Weise in Jena.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 82
§ 1. Vorbereitende Bemerkungen und Definitionen 83
§ 2. Bedingungsgleichungen für die Berührung k-ter Ordnung 84
§ 3. Elimination der Konstanten und Aufstellen des Berührungsmaßes 86
§ 4. Transformation der Berührungsgrößen 90
§ 5. Spezielle Gruppen 95
Literatur 100

Einleitung.

In vielen geometrischen Arbeiten tritt der Begriff der Berührungsordnung von Kurven auf. Dabei wird meistenteils von vornherein auf beiden Kurven ein Parameter ausgewählt, der durch die Geometrie des betrachteten Raumes (z. B. durch eine Gruppe) ausgezeichnet ist[1]). Dem gegenüber wenden wir uns in dieser Arbeit *Berührungsgrößen* und *Relativkrümmungen* von Kurven zu, *die* auf keinerlei Auszeichnung solcher Parameter bezug nehmen und *bei beliebigen* (genügend oft differenzierbaren) *topologischen Abbildungen sinnvoll* sind. Zwar ist der *Begriff der Berührungsordnung* verschiedentlich auch durchaus allgemein formuliert worden (siehe z. B. Duschek-Mayer [2], Behnke-Thullen [1]): Danach spricht man von einer Berührung mindestens k-ter Ordnung etwa zweier Kurven $\mathfrak{x}(s)$, $\mathfrak{y}(t)$ des R_n im Punkte $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{y}(0)$ (die näheren Differenzierbarkeitseigenschaften siehe § 1), wenn es eine Zuordnung $s = \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu t^\nu$ gibt, derart daß $\lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{x}(s(t)) - \mathfrak{y}(t)}{t^{k+1}}$ existiert und endlich bleibt. Wie man jedoch entscheiden kann, ob es im Einzelfalle solche Konstanten gibt, bleibt dabei noch eine völlig offene Frage.

Wir wollen in der vorliegenden Untersuchung das Hauptaugenmerk auf die Elimination dieser Konstanten λ_ν lenken und werden sukzessive

[1]) Man vgl. hierzu im besonderen: V. Hlavatý [3].

für die Berührung k-ter Ordnung Kriterien erhalten, welche *unmittelbar* bei beliebiger Parameterdarstellung der beiden Kurven eine Anwendung gestatten. Auf diese Weise finden wir gewisse (vektorielle) Berührungsgrößen, die *unter Voraussetzung der Berührung k-ter Ordnung* ein Berührungsmaß $(k+1)$-ter Ordnung darstellen, das sich *bei beliebigen im kleinen linearen* (d. h. genügend oft differenzierbaren topologischen) *Transformationen* des Raumes als Invariante erweist. Liegt speziell eine Geometrie zugrunde, die es erlaubt, durch jeden Punkt des Raumes in jeder Richtung eine Normalkurve (mit ausgezeichnetem Parameter versehen) anzugeben (z. B. geodätische Linien im Riemannschen Raum, Parabeln in der affinen Ebene), so läßt sich eine beliebige Kurve in jedem ihrer Punkte mit einer Normalkurve dieses Systems vergleichen und so aus dem Berührungsmaß eine Krümmungsinvariante erhalten.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf die Berührung zweier mehrdimensionaler Gebilde (F_p mit F_p, bzw. F_p mit F_q im R_n) ausdehnen, sowie auch auf den Fall der Ordnung des „Linear-abhängigwerdens" von drei oder mehreren Kurven durch einen Punkt im R_n. Doch sei in dieser Arbeit nicht darauf eingegangen.

Im § 1 bringen wir die genauen Voraussetzungen und Definitionen und stellen dann im § 2 die Bedingungsgleichungen unter Zuhilfenahme der noch willkürlichen Konstanten λ_ν auf. Diese werden im § 3 sukzessive eliminiert. Die dabei auftretenden neuen Gleichungen stellen die endgültigen Kriterien dar. Dabei zeigen wir drei Wege auf, die die Elimination der Konstanten leisten. Eine nähere Untersuchung der Differentialausdrücke und ihre Transformationsweise wird dann im § 4 vorgenommen. Im anschließenden Paragraphen gehen wir kurz auf spezielle Gruppen ein.

§ 1.

Vorbereitende Bemerkungen und Definitionen.

Wir betrachten eine Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des R_n[2]) durch den Punkt P_0: $\mathfrak{x}(0)$. Wir nennen sie (samt ihrer Parameterdarstellung) *stetig differenzierbar*, wenn sie in den Komponenten durch stetig differenzierbare Funktionen $x^i(t)$, $-t_0 \leqq t \leqq +t_0$, $(i = 1, \ldots, n)$ gegeben ist und wenn $\dot{\mathfrak{x}}(0) \neq 0$ ist.

[2]) Unter dem R_n verstehen wir einen leeren, im kleinen linearen n-dimensionalen Raum, d. h. eine n-dimensionale Zahlenmannigfaltigkeit, in der beliebige samt ihrer Umkehrung genügend oft differenzierbare topologische Transformationen gestattet sind. Wir betrachten übrigens im R_n nur Teilstücke oder Umgebungen eines Punktes P_0.

Eine (samt ihrer Parameterdarstellung) stetig differenzierbare Kurve nennen wir von der Klasse $\mathfrak{C}_k\,(k \geqq 1)$, wenn im angegebenen t-Intervall die k-ten Ableitungen von $x^i(t)$ noch existieren und stetig sind.

Seien zwei stetig differenzierbare Kurven $\mathfrak{x}(s)$, $\mathfrak{y}(t)$ durch denselben Punkt P_0 gegeben: $x^i(s)$, $y^i(t)\,(-s_0 \leqq s \leqq s_0, \quad -t_0 \leqq t \leqq t_0)$ mit $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{y}(0) = \mathfrak{x}_0$. Ihre Ableitungen in P_0 bezeichnen wir:

$$\left(\frac{d^p}{d\,s^p}\,\mathfrak{x}(s)\right)_0 = \mathfrak{x}_0^{(p)}, \quad \left(\frac{d^p}{d\,t^p}\,\mathfrak{y}(t)\right)_0 = \mathfrak{y}_0^{(p)}.$$

Die Kurven *berühren* sich in P_0, wenn sie dieselbe Tangente haben, d. h. wenn

$$\boxed{\dot{\mathfrak{x}}_0 \times \mathfrak{y}_0' = 0}\ ^{3})$$

ist, und *wir wollen dann auch immer* (etwa durch Übergang von s zu λs) *normieren*:

$$\dot{\mathfrak{x}}_0 = \mathfrak{y}_0', \quad \left[\dot{} = \frac{d}{d\,s}, \ ' = \frac{d}{d\,t}\right].$$

Von jetzt ab seien die betrachteten Kurven als *sich berührend und normiert vorausgesetzt. Für zwei sich in P_0 berührende Kurven der Klasse $\mathfrak{C}_{k+1}$ sei die Berührungsordnung auf folgende Weise erklärt:*

Wir sagen von den beiden Kurven, daß sie sich in P_0 *von mindestens k-ter Ordnung berühren*, wenn es eine samt ihrer Umkehrung in $U(P_0)$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Zuordnung der Parameter $s = s(t)$ gibt, so daß

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathfrak{x}(s(t)) - \mathfrak{y}(t)}{t^{k+1}} = \mathfrak{A}$$

existiert und endlich ist. Ist $\mathfrak{A} \neq 0$, so nennen wir die Berührung von *genau k-ter Ordnung*[4]).

§ 2.

Bedingungsgleichungen für die Berührung k-ter Ordnung.

Um die Bedingungsgleichungen aufzustellen, schreiben wir die Kurvendarstellungen und Parameterzuordnungen:

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{x}_0 + \dot{\mathfrak{x}}_0\,s + \frac{\ddot{\mathfrak{x}}_0}{2!}\,s^2 + \ldots + \frac{\mathfrak{x}_0^{(k)}}{k!}\,s^k + \mathfrak{r}_1^{(k+1)}$$

$$\text{mit} \quad \mathfrak{r}_1^{(k+1)} = \left\{\left(\frac{d^{k+1}x^i}{d\,s^{k+1}}\right)_{\mathfrak{y}_0^{(1)}} \frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\right\}, \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{X}_0 + \mathfrak{X}_1\,s + \mathfrak{X}_2\,s^2 + \ldots + \mathfrak{X}_k\,s^k + \mathfrak{r}_1^{(k+1)}.$$

---

[3]) $\dot{\mathfrak{x}}_0 \times \mathfrak{y}_0'$ bedeutet ein äußeres Produkt. Bezüglich der Schreibweise dieser und anderer Vektorprodukte schließen wir uns der Arbeit: R. König und E. Peschl [4] an.

[4]) Man vgl. Duschek-Mayer [2], Behnke-Thullen [1].

$$\eta(t) = \eta_0 + \eta_0' t + \frac{\eta_0''}{2!} t^2 + \ldots + \frac{\eta_0^{(k)}}{k!} t^k + r_2^{(k+1)}$$

mit $r_2^{(k+1)} = \left\{\left(\frac{d^{k+1} y^i}{d t^{k+1}}\right)_{\vartheta_i^{(2)} t} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$, oder

$$\eta(t) = \mathfrak{Y}_0 + \mathfrak{Y}_1 t + \mathfrak{Y}_2 t^2 + \ldots + \mathfrak{Y}_k t^k + r_2^{(k+1)}.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$\mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{X}_0, \quad \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{X}_1.$$

Ferner

$$s(t) = t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + \ldots + \lambda_k t^k + r_{k+1}$$

$$[s(t)]^\nu = t^\nu + \lambda_{\nu+1}^\nu t^{\nu+1} + \lambda_{\nu+2}^\nu t^{\nu+2} + \ldots$$

Also z. B.

$$\lambda_\nu^1 = \lambda_\nu, \quad \nu = 2, \ldots$$

$$\lambda_3^2 = 2\lambda_2, \quad \lambda_4^2 = ((\lambda_2)^2 + 2\lambda_3), \quad \lambda_5^2 = 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4), \ldots$$

$$\lambda_4^3 = 3\lambda_2, \quad \lambda_5^3 = 3((\lambda_2)^2 + \lambda_3), \ldots$$

$$\lambda_5^4 = 4\lambda_2, \ldots$$

$$\lambda_{\nu+1}^\nu = \nu\lambda_2, \ldots$$

Allgemein haben wir die Rekursionsformeln:

$$\boxed{\lambda_\sigma^{i+k} = \sum_{\substack{\varrho+\tau=\sigma \\ \varrho \geqq i \\ \tau \geqq k}} \lambda_\varrho^i \lambda_\tau^k}$$

mit

$$\lambda_k^k = 1, \quad \lambda_k^1 = \lambda_k.$$

Somit folgt:

$$x(s(t)) - \eta(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{X}_\nu (t^\nu + \lambda_{\nu+1}^\nu t^{\nu+1} + \ldots) + r_1^{(k+1)} - \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{Y}_\nu t^\nu - r_2^{(k+1)}$$

$$= \sum_{\nu=2}^{k} [\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathfrak{X}_\mu \lambda_\nu^\mu + \mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu] t^\nu + \ldots$$

Für die Berührung mindestens k-ter Ordnung folgen hieraus die Bedingungsgleichungen:

1) $$\boxed{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \mathfrak{X}_\mu \lambda_\nu^\mu + \mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu = 0} \qquad \nu = 2, \ldots, k.$$

Ausführlich:

$$\lambda_2 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2 = 0,$$

$$\lambda_3 \mathfrak{X}_1 + 2\lambda_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3 = 0,$$

$$\lambda_4 \mathfrak{X}_1 + ((\lambda_2)^2 + 2\lambda_3) \mathfrak{X}_2 + 3\lambda_2 \mathfrak{X}_3 + \mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4 = 0,$$

$$\lambda_5 \mathfrak{X}_1 + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_4) \mathfrak{X}_2 + 3((\lambda_2)^2 + \lambda_3) \mathfrak{X}_3 + 4\lambda_2 \mathfrak{X}_4 + \mathfrak{X}_5 - \mathfrak{Y}_5 = 0,$$

. . . . . .

Umgekehrt sehen wir sogleich ein, daß diese Bedingungsgleichungen (1) auch *hinreichend* sind. Existiert nämlich ein System von Konstanten $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$, so daß das System (1) für $\nu = 2, \ldots, k$ in P_0 erfüllt ist, so ist die Transformation

$$s = t + \sum_{\nu=2}^{k} \lambda_\nu t^\nu$$

sicher in $U(P_0)$ eindeutig umkehrbar und samt ihrer Umkehrung $(k+1)$-mal stetig differenzierbar und liefert genau die Limes-Bedingungen der Definition.

§ 3.

Elimination der Konstanten und Aufstellen des Berührungsmaßes.

a) Dafür, daß eine Berührung mindestes k-ter Ordnung stattfindet, ist also notwendig und hinreichend die Existenz von gewissen Konstanten λ_ν von der Art, daß das System (1) für $\nu = 2, \ldots, k$ erfüllt ist. *Wann aber gibt es solche Konstanten?* Die Aufstellung wirklicher Kriterien verlangt die Elimination dieser Konstanten, die wir auf dreierlei Weise bewerkstelligen. Für den einen Weg der Elimination führen wir einen kovarianten Vektor $\breve{\mathfrak{Z}}$ mit den Komponenten z_i durch die Gleichung

$$\mathfrak{x}_1 \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 1^5) \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^{n} x_0^i z_i = 1$$

ein. (Durch diese Bedingung ist $\breve{\mathfrak{Z}}$ keineswegs eindeutig festgelegt.) Durch skalare Multiplikation der Bedingungsgleichungen (1) mit $\breve{\mathfrak{Z}}$ erhalten wir

$$\lambda_\nu + \sum_{\mu=2}^{\nu-1} \mathfrak{x}_\mu \circ \breve{\mathfrak{Z}} \cdot \lambda_\nu^\mu + (\mathfrak{x}_\nu - \mathfrak{y}_\nu) \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 0.$$

Da in der Summe Σ nur $\lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ vorkommen, (wie aus dem rekurrenten Gesetz der λ_ν^μ folgt), so lassen sich hieraus die λ_ν der Reihe nach berechnen, z. B. ist:

$$\lambda_2 = (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}},$$

$$\lambda_3 = (\mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3) \circ \breve{\mathfrak{Z}} - 2(\mathfrak{x}_2 \cdot \breve{\mathfrak{Z}}) \cdot (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}}.$$

$$\lambda_4 = (\mathfrak{y}_4 - \mathfrak{x}_4) \circ \breve{\mathfrak{Z}} - 3(\mathfrak{x}_3 \circ \breve{\mathfrak{Z}}) \cdot (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}} - (\mathfrak{x}_2 \circ \breve{\mathfrak{Z}}) \{(\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}}\}^2$$
$$- 2(\mathfrak{x}_2 \circ \breve{\mathfrak{Z}}) \cdot (\mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3) \circ \breve{\mathfrak{Z}} + 4(\mathfrak{x}_2 \circ \breve{\mathfrak{Z}})^2 (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}}.$$

Führen wir noch einen zweiten kovarianten Vektor $\breve{\mathfrak{U}}$ mit der Bedingung

$$\mathfrak{x}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$$

---

5) Man vgl. Fußnote 3).

ein, oder in Komponenten:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_0^i \, u_i = 0.$$

Die Elimination gelingt nun, indem wir die Gleichungen (1) mit $\breve{\mathfrak{U}}$ skalar multiplizieren:

$$\sum_{\mu=2}^{\nu-1} (\mathfrak{X}_\mu \circ \breve{\mathfrak{U}}) \cdot \lambda_\nu^\mu + (\mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu) \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$$

und die darin noch vorkommenden $\lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ aus den obigen Auflösungsformeln einsetzen.

Wir erhalten so der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0,\\
&(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) \circ \breve{\mathfrak{U}} + 2\,(\mathfrak{X}_2 \circ \breve{\mathfrak{U}}) \cdot (\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 0,\\
&(\mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4) \circ \breve{\mathfrak{U}} + 3\,(\mathfrak{X}_3 \circ \breve{\mathfrak{U}})\,(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}} + (\mathfrak{X}_2 \circ \breve{\mathfrak{U}})\,\{(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}}\}^2\\
&\quad + 2\,(\mathfrak{X}_2 \circ \breve{\mathfrak{U}})\,(\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{X}_3) \circ \breve{\mathfrak{Z}} - 4\,(\mathfrak{X}_2 \circ \breve{\mathfrak{U}})\,\mathfrak{X}_2 \circ \mathfrak{Z})\,(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

usw.

Bezeichnen wir die linken Seiten dieser Gleichungen (2) mit J_2, J_3, $J_4, \ldots$ so ist *für die Berührung mindestens k-ter Ordnung notwendig:*

$$\boxed{J_2 = J_3 = \ldots = J_k = 0}$$

für jedes $\breve{\mathfrak{U}}$, $\breve{\mathfrak{Z}}$ mit $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$, $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 1$.

Berühren sich zwei Kurven der Klasse $\mathfrak{C}_{k+1}$ mindestens k-ter Ordnung, so hängt, wie wir später zeigen, J_{k+1} nicht von der Wahl der eingeführten Größe $\breve{\mathfrak{Z}}$, wohl aber (in einfacher Weise) von $\breve{\mathfrak{U}}$ ab. Die Größe $\breve{\mathfrak{U}}$ gibt uns die Ebenenkoordinaten einer E_{n-1} Stellung durch P_0, welche die Tangentenrichtung enthält. Wir haben also damit ein „Berührungsmaß in bezug auf eine Hyperebenenstellung $\breve{\mathfrak{U}}$". (Über das weitere Transformationsverhalten siehe § 4). Wir zeigen: Sind die Größen $J_2, \ldots, J_k$ *für alle* $\breve{\mathfrak{U}}$ *mit* $\breve{\mathfrak{U}} \circ \mathfrak{X}_1 = 0$ (und ein gewisses $\breve{\mathfrak{Z}}$) gleich null, so sind auch die Bedingungsgleichungen (1) für $\nu = 2, \ldots, k$ erfüllt und wir haben damit eine Berührung mindestens k-ter Ordnung. Das Verschwinden der zweiten bis k-ten Berührungsmasse J_ν in bezug auf *jede* Hyperebenenstellung durch $\mathfrak{X}_1$ ist also dann auch für die Berührung mindestens k-ter Ordnung als *hinreichend* bewiesen.

Beweis: Jede Gleichung $J_\nu = 0$ hat die Form

$$\mathfrak{A}_\nu \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0,$$

worin in $\mathfrak{A}_\nu$ kein $\breve{\mathfrak{U}}$ mehr vorkommt. Besteht aber diese Gleichung zusammen mit

$$\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$$

für jedes mögliche $\breve{\mathfrak{U}}$, so folgt daraus:

$$\mathfrak{A}_\nu \times \mathfrak{X}_1 = 0$$

und (wegen $\mathfrak{X}_1 \neq 0$)

$$\mathfrak{A}_\nu + \mu_\nu \mathfrak{X}_1 = 0$$

mit gewissen μ_ν.

Nun haben aber diese Ausdrücke $\mathfrak{A}_\nu + \mu_\nu \mathfrak{X}_1 = 0$ die Form:

$$\sum_{\varrho=2}^{\nu-1} \mathfrak{X}_\varrho \lambda_\nu^\varrho + \mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu + \mu_\nu \mathfrak{X}_1 = 0,$$

worin für die $\lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ die mittels $\breve{\mathfrak{Z}}$ erhaltenen Auflösungen eingesetzt zu denken sind. Diese Auflösungsausdrücke liefern aber in unserem Falle genau die $\mu_2, \ldots, \mu_{k-1}$, also gelten die Bedingungen (1), $\nu = 2, \ldots, k$, für unsere $\mu_2, \ldots, \mu_k$ als Konstantensystem.

b) Die zweite Art der Elimination vermeidet die Einführung solcher willkürlichen Größen wie $\breve{\mathfrak{U}}$, $\breve{\mathfrak{Z}}$, läßt sich aber bei jeweils fester Dimension n des Raumes R_n nur bis zu einer gewissen Berührungsordnung durchführen.

Durch äußere Produktbildung mit $\mathfrak{X}_1$ erhalten wir aus der Gleichung (1), $\nu = 2$,

$$(3)_2 \qquad \boxed{\mathfrak{R}_2 \equiv (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \times \mathfrak{X}_1 = 0.}$$

Ebenso bekommen wir, wenn wir im System (1) die Gleichungen $\nu = 2$ bzw. $= 3$ von rechts her mit $2\mathfrak{X}_2$ bzw. $\mathfrak{X}_1$ multiplizieren und addieren:

$$(3)_3 \qquad \boxed{\mathfrak{R}_3 \equiv (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) \times \mathfrak{X}_1 + 2(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \times \mathfrak{X}_2 = 0.}$$

Schreiben wir schließlich die Gleichungen (1), $\nu = 2, 3$, in dieser Form:

$$\lambda_2 \mathfrak{X}_1 = -(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2),$$
$$\lambda_3 \mathfrak{X}_1 + 2\lambda_2 \mathfrak{X}_2 = -(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3)$$

und multiplizieren die linken und die rechten Seiten für sich, dann erhalten wir:

$$2\lambda_2^2 (\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2) - (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \times (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) = 0.$$

Fügen wir den Gleichungen (1), $\nu = 2, 3, 4$, rechts den „äußeren" Faktor $6\mathfrak{X}_3$, $4\mathfrak{X}_2$, bzw. $2\mathfrak{X}_1$ hinzu und addieren wir die so entstehenden Gleichungen zu der zuletzt erhaltenen, so entsteht die Gleichung:

$$2(\mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4) \times \mathfrak{X}_1 + 6(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \times \mathfrak{X}_3 - (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) \times (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) + 4(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) \times \mathfrak{X}_2 = 0$$

oder vereinfacht:

$$(3)_4 \qquad \boxed{\mathfrak{R}_4 \equiv (\mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4) \times \mathfrak{X}_1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_3) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Y}_2 \times \mathfrak{Y}_3) + \tfrac{5}{2}(\mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{Y}_3) - \tfrac{5}{2}(\mathfrak{Y}_2 \times \mathfrak{X}_3) = 0.}$$

Man überlegt sich leicht, daß *mittels äußerer Produkte aus je zwei Faktoren für $\nu \geqq 5$ die Elimination der λ_ν nicht mehr zu erreichen ist.* Wohl aber gelingt diese Elimination für $\nu = 5$ z. B. mittels äußerer

Produkte aus je *drei* Faktoren. Man erhält hierbei z. B. die folgenden zwei Ausdrücke:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{L}_5^{(1)} \equiv\ & 6\,(\mathfrak{X}_5 - \mathfrak{Y}_5)\times\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_3 - 7\,(\mathfrak{X}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{X}_4) - 17\,(\mathfrak{X}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{Y}_4)\\ & + 19\,(\mathfrak{Y}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{X}_4) + 5\,(\mathfrak{Y}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{Y}_4) + (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2)\times\mathfrak{Y}_3\times(\mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4) = 0\end{aligned}}$$

und

$$\boxed{\mathfrak{L}_5^{(2)} \equiv 2(\mathfrak{X}_5 - \mathfrak{Y}_5)\times\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_2 + 9\,\mathfrak{X}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{Y}_3 - 3\mathfrak{Y}_2\times\mathfrak{X}_3\times\mathfrak{Y}_3 - 8\mathfrak{X}_2\times\mathfrak{Y}_2\times\mathfrak{X}_4 = 0.}$$

Es würde einer weiteren Untersuchung bedürfen, ob für $\nu = 5$ die Ausdrücke $\mathfrak{L}_5^{(1)}$ und $\mathfrak{L}_5^{(2)}$ bei Berührung von mindestens vierter Ordnung noch unabhängig voneinander sind, sowie ob ihr Verschwinden ihrerseits die Berührung fünfter Ordnung nach sich zieht. Für $\nu > 5$ werden diese Fragen noch schwieriger. Doch überlegt man sich leicht, daß die Elimination der λ_ν aus (1) durch Bilden von *äußeren Produkten zu je l-Faktoren* hinsichtlich der Dimension n von R_n nicht bloß eine untere Grenze $n \geqq l$ hat, sondern auch (wegen des Auftretens beliebig hoher Potenzen der λ_ν in den λ_ν^μ [μ genügend groß]) eine obere Schranke $n \leqq N(l)$.

Daß (im Falle $l = 2$) für die Ordnung $k = 2, 3, 4$ das Verschwinden von $\mathfrak{K}_\nu$ ($\nu = 2, \ldots, k$) auch hinreichend für die Berührung k-ter Ordnung ist, sieht man sukzessive ein. (Beweis siehe z. B. c)).

c) Unter *Zuhilfenahme geeigneter Parameternormierungen* läßt sich der Eliminationsprozeß mittels zweistufiger Größen für beliebige Ordnung durchführen. Berühren sich die Kurven mindestens zweiter Ordnung, so gilt:

$$(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2)\times\mathfrak{X}_1 = 0, \text{ also (wegen } \mathfrak{X}_1 \neq 0):$$

$$\mathfrak{X}_1\lambda_2 + \mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2 = 0, \text{ mit einem gewissen } \lambda_2.$$

Wie wir nachträglich im folgenden Paragraphen sehen werden, hängt aber der Begriff der Berührungsordnung nicht von der Wahl des Parameters ab. Führen wir mittels

$$t = \tau - \lambda_2\tau^2$$

einen neuen Parameter τ ein, so erhalten wir

$$s = \tau + \lambda_3\tau^3 + \ldots$$

und

$$\boxed{\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2 = 0}$$

als neue Normierung N_2. Dann schreibt sich

$$\mathfrak{K}_3 = (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3)\times\mathfrak{X}_1.$$

Ist $\mathfrak{K}_3 = 0$, so gilt

$$\mathfrak{X}_1\lambda_3 + \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3 = 0$$

mit einem gewissen λ_3.

Der Übergang $\tau = \tau^* - \lambda_3 \tau^{*3}$ liefert die neue Normierung N_3

$$\boxed{\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3 = 0}, \quad s = \tau^* + \lambda_4 \tau^4 + \dots$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = (\mathfrak{X}_4 - \mathfrak{Y}_4) \times \mathfrak{X}_1.$$

Bis $\nu = 4$ stimmen die Ausdrücke $\mathfrak{R}_\nu$ bei jeweiliger Normierung $N_2 \dots N_{\nu-1}$ mit den Ausdrücken $\mathfrak{R}_\nu$ aus b) überein. Dieses Verfahren der *fortschreitenden Normierung* liefert aber *ganz allgemein* für *beliebig großes k* gewisse analoge Ausdrücke $\mathfrak{R}_k$, die *Berührungsgrößen k-ter Ordnung*:

Berühren sich die Kurven von mindestens $(k-1)$-ter Ordnung, und haben wir uns bereits eine Beziehung zwischen den Parametern s, t dieser Form:

$$s = t + \lambda_k t^k + \dots$$

hergestellt, was ja immer möglich ist, so bestehen die Beziehungen:

N_ν $$\boxed{\mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu = 0}, \qquad \nu = 2, \dots, k-1$$

und wir erhalten aus der Gleichung $\nu = k$ des Systems (1) als *notwendige* und *hinreichende Bedingung für die Berührung k-ter Ordnung*:

$$\mathfrak{R}_k \equiv (\mathfrak{X}_k - \mathfrak{Y}_k) \times \mathfrak{X}_1 = 0.$$

(Unter Voraussetzung der Normierungen $N_2, \dots, N_{k-1}$.)

Ist $\mathfrak{R}_k = 0$ und sind die Normierungen $N_2, \dots, N_{k-1}$ erfüllt, so gilt

$$\mathfrak{X}_1 \lambda_k + (\mathfrak{X}_k - \mathfrak{Y}_k) = 0$$

mit einem gewissen λ_k und dann führt eine neue Transformation $t = \tau - \lambda_k \tau$ die neue Normierung

N_k: $$\mathfrak{X}_k - \mathfrak{Y}_k = 0, \quad s = \tau + \lambda_{k+1} \tau^{k+1} + \dots$$

herbei; wir erhalten dann aus Gleichung $\nu = k+1$ des Systems (1) als notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\mathfrak{R}_{k+1} \equiv (\mathfrak{X}_{k+1} - \mathfrak{Y}_{k+1}) \times \mathfrak{X}_1 = 0.$$

Bei Berührung k-ter Ordnung gibt uns die auf diese sukzessive Weise erklärte Größe $\mathfrak{R}_{k+1}$ *eine* (vektorielle) *Relativkrümmungsgröße* $(k+1)$-*ter Ordnung* der beiden Kurven.

§ 4.

Transformation der Berührungsgrößen.

4.1. Wir zeigen zunächst:

Der Begriff der *Berührung* mindestens *k-ter Ordnung bleibt erhalten*

a) bei beliebigen Transformationen der beiden *Kurvenparameter*:

$$s = s(\sigma), \quad t = t(\tau),$$

welche in einer Umgebung $U(P_0)$ eindeutig umkehrbar und samt ihrer Umkehrung $(k+1)$ mal stetig differenzierbar sind,

b) bei Vertauschung der *Reihenfolge* der beiden Kurven,

c) bei beliebigen in einer Umgebung $U(P_0)$ eindeutig umkehrbaren und samt ihrer Umkehrung $(k+1)$ mal stetig differenzierbaren Abbildungen *des Raumes* R_n.

Um a) *zu beweisen* genügt die Überlegung, daß $s(\sigma)$ und $t(\tau)$ von dieser Form sind: $s(\sigma) = \alpha_1 \sigma + \ldots$, $t(\tau) = \beta_1 \tau + \ldots$ mit $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$ sowie, daß auch $\sigma(s) = \frac{1}{\alpha_1} s + \ldots$ mit genügend vielen stetigen Ableitungen existiert. Dann ist auch $\sigma\big(s\big(t(\tau)\big)\big) = \sigma(\tau)$ von der in der Definition der Berührungsordnung verlangten Eigenschaft und es ist $x^i\big(s(\sigma)\big) = \xi^i(\sigma)$, $y^i\big(t(\tau)\big) = \eta^i(\tau)$ gesetzt:

$$\frac{x^i(s(t)) - y^i(t)}{t^{k+1}} = \frac{\xi^i(\sigma(\tau)) - \eta^i(\tau)}{\tau^{k+1}} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{k+1}.$$

Somit

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\xi^i(\sigma(t)) - \eta^i(\tau)}{\tau^{k+1}} = \beta_1^{k+1} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{x^i(s(t)) - y^i(t)}{t^{k+1}},$$

womit alles gezeigt ist.

b) Setzt man schließlich $t = \lambda(\tau)$, unter $\lambda(\tau)$ die Inverse von $s(t)$ verstanden, so hat man nach a) auch b) bewiesen.

Um c) zu beweisen, sei $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \ldots, x^n)$ eine Raumtransformation der gewünschten Art. (Insbesondere folgt aus den verlangten Eigenschaften, daß die Funktionaldeterminante in P_0 nicht verschwindet.) Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \bar{x}^i_k, \qquad \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} = \bar{x}^i_{kl}, \qquad \frac{\partial^3 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l \partial x^m} = \bar{x}^i_{klm}, \text{ usw.}$$

so transformieren sich die *Differentiale*:

$$\begin{aligned}
d\bar{x}^i &= \bar{x}^i_k \, dx^k, \\
d^2\bar{x}^i &= \bar{x}^i_{kl} \, dx^k dx^l + \bar{x}^i_k d^2 x^k, \\
d^3\bar{x}^i &= \bar{x}^i_{klm} \, dx^k dx^l dx^m + 3\, \bar{x}^i_{kl} d^2 x^k dx^l + \bar{x}^i_k d^3 x^k, \\
d^4\bar{x}^i &= \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Komponenten von $\mathfrak{X}_\nu$, $\nu = 1, \ldots$ mit X^i_ν, von $\mathfrak{Y}_\nu$ mit Y^i_ν so ist:

$$X^i_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu x^i(s)}{ds^\nu}, \qquad Y^i_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu y^i(t)}{dt^\nu}$$

und wir haben für die Transformierten $\widetilde{X}_\nu^i$, $\widetilde{Y}_\nu^i$:

$$(4)_1 \qquad \begin{aligned} \widetilde{X}_1^i &= \widetilde{x}_k^i X_1^k, \\ \widetilde{X}_2^i &= \tfrac{1}{2}\widetilde{x}_{kl}^i X_1^k X_1^l + \widetilde{x}_k^i X_2^k, \\ \widetilde{X}_3^i &= \tfrac{1}{3!}\widetilde{x}_{klm}^i X_1^k X_1^l X_1^m + \widetilde{x}_{kl}^i X_2^k X_1^l + \widetilde{x}_k^i X_3^k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Allgemein: $\widetilde{X}_\nu^i = \widetilde{x}_j^i X_\nu^j +$ Glieder, welche nur X_ϱ^j mit $\varrho \leqq \nu - 1$ enthalten, ebenso:

$$(4)_2 \qquad \begin{aligned} \widetilde{Y}_1^i &= \widetilde{x}_k^i Y_1^k, \\ \widetilde{Y}_2^i &= \tfrac{1}{2}\widetilde{x}_{kl}^i Y_1^k Y_1^l + \widetilde{x}_k^i Y_2^k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Zunächst ist:

$$\widetilde{X}_1^i - \widetilde{Y}_1^i = \widetilde{x}_k^i (X_1^k - Y_1^k),$$

(wenn wir hierbei, wie auch im folgenden, bedenken, daß sowohl die X_ν^i wie die Y_ν^i in *demselben* Punkte P_0 *einer* Transformation unterworfen werden). Bilden wir die linken Seiten der Bedingungsgleichung (1) ($\nu = 2$) in den neuen Koordinaten:

$$\lambda_2 \widetilde{X}_1^i + \widetilde{X}_2^i - \widetilde{Y}_2^i = \widetilde{x}_k^i (\lambda_2 X_1^k + X_2^k - Y_2^k) + \tfrac{1}{2}\widetilde{x}_{kl}^i (X_1^k X_1^l - Y_1^k Y_1^l).$$

Hieraus erkennt man:

1. Es gilt immer: $\widetilde{X}_1^i - \widetilde{Y}_1^i = \widetilde{x}_k^i (X_1^k - Y_1^k)$, und damit bleibt $X_1^k - Y_1^k = 0$ erhalten.

2. Unter der Voraussetzung $X_1^k - Y_1^k = 0$, d. h. der Berührung 1. Ordnung und Normierung N_1 ist:

$$\lambda_2 \widetilde{X}_1^i + \widetilde{X}_2^i - \widetilde{Y}_2^i = \widetilde{x}_k^i (\lambda_2 X_1^k + X_2^k - Y_2^k)$$

und damit bleibt auch die Berührung 2. Ordnung erhalten. Bezeichnen wir die linken Seiten des Systems (1) mit:

$$\mathfrak{B}_\nu, \quad \nu = 2, \ldots, \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{Y}_1$$

und die Komponenten von $\mathfrak{B}_\nu$ mit B_ν^i, so *gilt allgemein*:

I. *Das System der Gleichungen* $\mathfrak{B}_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, k$, *geht über in* $\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, k$, worin $\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu$ die entsprechenden Ausdrücke in den neuen Koordinaten sind.

II. *Unter Voraussetzung* $\mathfrak{B}_\nu = 0$, $\nu = 1, \ldots, k$, gilt für $\mathfrak{B}_{k+1}$ das Transformationsgesetz:

$$\boxed{\widetilde{B}_{k+1}^i = \widetilde{x}_l^i B_{k+1}^l,}$$

d. h. $\mathfrak{B}_{k+1}$ *transformiert sich* unter dieser Voraussetzung *wie ein kontravarianter Vektor.*

Um dies für beliebiges k zu beweisen, sei $\mathfrak{B}_1 = \ldots \mathfrak{B}_k = 0$ vorausgesetzt ($k \geqq 1$). Das ist nach früherem gleichbedeutend mit der Tatsache, daß sich die Kurven mindestens k-ter Ordnung berühren. Nach § 3 c) können wir dann immer für die Kurve $\mathfrak{y}(t)$ den Parameter t so normiert annehmen, daß die Beziehungen gelten:

$$\lambda_\nu = 0,\ 1 < \nu \leqq k, \text{ also: } s(t) = t + \lambda_{k+1} t^{k+1} + \ldots \text{ und}$$
$$(5) \qquad \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{X}_\nu - \mathfrak{Y}_\nu = 0,\ 1 \leqq \nu \leqq k,$$
$$\mathfrak{B}_{k+1} = \lambda_{k+1} \mathfrak{X}_1 + (\mathfrak{X}_{k+1} - \mathfrak{Y}_{k+1}).$$

Bilden wir die transformierten $\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu$ und ihre Komponenten $\widetilde{B}^i_\nu$, so folgt aus den Formeln $(4)_1$, $(4)_2$, (5) trivialerweise:

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_\nu = \widetilde{\mathfrak{X}}_\nu - \widetilde{\mathfrak{Y}}_\nu = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq k.$$

Wegen der besonderen Gestalt der allgemeinen Gleichung

$(4)_1$: $\widetilde{X}^i_{k+1} = \tilde{x}^i_j X^j_{k+1} +$ Glieder, in denen nur X^i_ν mit $\nu \leqq k$ vorkommen,

und der analogen Gleichung $(4)_2$ für $\widetilde{Y}^i_{k+1}$ ergibt sich aus

$$X^i_\nu = Y^i_\nu, \quad (\nu \leqq k):$$
$$\widetilde{B}^i_{k+1} = \lambda_{k+1} \widetilde{X}^i_1 + (\widetilde{X}^i_{k+1} - \widetilde{Y}^i_{k+1}) = \lambda_{k+1} \tilde{x}^i_j X^j_1 + \tilde{x}^i_j (X^j_{k+1} - Y^j_{k+1})$$
$$= \tilde{x}^i_j B^j_{k+1}.$$

Damit ist I und II gezeigt, wenigstens für den Fall, daß t ein „normierter" Parameter ist. Nun ist aber eine Transformation auf einen normierten Parameter von der Gestalt: $t = 1 \cdot \tau + \ldots$ und läßt daher nach 4. 1 (a) die Größen $\mathfrak{B}_k$ unverändert, womit also I und II auch allgemein bewiesen ist.

Zugleich haben wir damit gezeigt, daß der Begriff der Berührung *genau* k-ter Ordnung ebenfalls gegenüber den Raumtransformationen 4,1 (c) invariant ist, und überdies haben wir in II bereits das Transformationsgesetz der $\mathfrak{B}_\nu$ mit erhalten.

4. 2. Wenden wir uns den Transformationsgesetzen der übrigen Berührungsgrößen im einzelnen zu.

a) Parametertransformationen auf beiden Kurven:

$$s = \alpha_1 \sigma + \alpha_2 \sigma^2 + \ldots$$
$$t = \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \ldots \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = \beta_1.$$

Bei solchen verhalten sich, wie man aus 4. 1 a) entnimmt, die $\mathfrak{B}_\nu$ *als relative Invarianten des Gewichtes ν unter Voraussetzung*

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \ldots = \mathfrak{B}_{\nu-1} = 0.$$

Daß sich bei Berührung mindestens $(\nu - 1)$-ter Ordnung die Berührungsgrößen $\mathfrak{I}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ ebenfalls als relative Invarianten vom Gewicht ν bzw. $\nu + 1$ erweisen, folgt aus diesem Verhalten der $\mathfrak{B}_\nu$ unmittelbar.

b) Raumtransformationen der in 4. 1 c) beschriebenen Art.

Zunächst seien die Berührungsgrößen § 3 a) betrachtet. Die Festsetzungen $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 1$, $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$ bleiben erhalten bei Raumtransformationen der in 4. 1 c) beschriebenen Art. Gemäß den in 4. 1 c) angegebenen Entwicklungen sind die Ausdrücke

$$\mathfrak{B}_\nu \circ \breve{\mathfrak{Z}}, \quad \mathfrak{B}_\nu \circ \breve{\mathfrak{U}}$$

gegenüber Raumtransformationen 4. 1 c) unter Voraussetzung des Verschwindens von $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{\nu-1}$ *absolute Invarianten*. Daher sind auch die Auflösungsformeln für λ_ν in § 3 a) bei Berührung k-ter Ordnung bis zu $\nu = k+1$ *absolute Invarianten* und aus dem gleichen Grunde ist bei Berührung k-ter Ordnung $\mathfrak{Z}_{k+1}$ *gegenüber Raumtransformationen* 4. 1 c) eine *absolute Invariante*.

Wenden wir uns den Größen $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots$ von § 3 b), c) zu, so ist es nach dem bisherigen, insbesondere den Entwicklungen 4. 1 c) klar,

1. daß wir uns, eventuell nach einer Transformation $t = t(\tau)$ die Größen $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$ von § 3 b) in der speziellen Form des § 3 c) hergestellt denken können und somit nur noch das Transformationsverhalten der Größen $\mathfrak{K}_\nu$, $\nu = 2, \ldots$, von § 3 c) zu betrachten haben.

2. Für diese in § 3 c) allgemein eingeführten $\mathfrak{K}_\nu$ aber folgt aus den Überlegungen von 4. 1 c), daß sie sich bei Raumtransformationen 4. 1 c) unter Voraussetzung der Berührung $(\nu-1)$-ter Ordnung wie *zweistufige (kontravariante) Vektoren* verhalten.

c) Bezeichnen wir die Berührungsgröße J_ν in Abhängigkeit von der Hyperebenenstellung $\breve{\mathfrak{U}}$ mit $J_\nu(\breve{\mathfrak{U}})$ und wählt man $(n-1)$ linear unabhängige $\breve{\mathfrak{U}}_\varrho$ mit $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}}_\varrho = 0$, $\varrho = 1, \ldots n-1$, so erkennt man leicht die *Art der Abhängigkeit der J_ν von den $\breve{\mathfrak{U}}_\varrho$*. Sei nämlich $\breve{\mathfrak{U}} = \gamma_u^\varrho \breve{\mathfrak{U}}_\varrho$ irgendeine Lösung von $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$, so ist:

$$\boxed{J_\nu(\breve{\mathfrak{U}}) = \gamma_u^\varrho J_\nu(\breve{\mathfrak{U}}_\varrho)}.$$

d) Schließlich zeigt man noch:

Die Größen J_k sind von der Wahl *von* $\breve{\mathfrak{Z}}$ mit $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 1$ *gänzlich unabhängig*, vorausgesetzt $J_2 = \ldots = J_{k-1} = 0$. Zu diesem Zwecke setze man die allgemeine Lösung $\breve{\mathfrak{Z}}^*$ von $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{Z}}^* = 1$ in der Form $\breve{\mathfrak{Z}}^* = \breve{\mathfrak{Z}} + \breve{\mathfrak{U}}$, worin $\breve{\mathfrak{U}}$ die allgemeine Lösung von $\mathfrak{X}_1 \circ \breve{\mathfrak{U}} = 0$ ist. Verfolgt man den sukzessiven Eliminationsprozeß der $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ in § 3 a) vermittels der $\breve{\mathfrak{Z}}^*$, so kommen zu den $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ nur Größen $\mathfrak{A}_\nu \circ \breve{\mathfrak{U}}$, $\nu = 2, \ldots, k-1$, hinzu, die unter Voraussetzung der Berührung k-ter Ordnung verschwinden.

e) Seien z. B. in der Ebene drei Kurven durch einen Punkt P_0 gegeben: $\mathfrak{x}(s)$, $\mathfrak{y}(t)$, $\mathfrak{z}(u)$, $(\mathfrak{x}_0' = \mathfrak{y}_0' = \mathfrak{z}_0')$, welche sich in P_0 von *genau*

$(\nu - 1)$-ter Ordnung berühren und sei die Berührungsgröße $\mathfrak{K}_\nu$ für die Kurven $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ bzw. $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{K}_{\nu(12)}$, $\mathfrak{K}_{\nu(13)}$ bzw. $\mathfrak{K}_{\nu(23)}$ bezeichnet, so sind also

$$\frac{\mathfrak{K}_{\nu(12)}}{\mathfrak{K}_{\nu(13)}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{K}_{\nu(13)}}{\mathfrak{K}_{\nu(23)}}$$

absolute topologische Relativkrümmungsinvarianten ν-ter Ordnung. (Unter „topologischen" Abbildungen immer „genügend oft differenzierbare topologische" verstanden.) Sie hängen auch nicht von den Parametern der Kurven ab, sofern nur $\mathfrak{x}_0' = \mathfrak{y}_0' = \mathfrak{z}_0'$ als Normierung bleibt.

§ 5.

Spezielle Gruppen.

Wir wollen in diesem Abschnitt Anwendungen auf die orthogonale und speziell-affine Gruppe geben und wir werden hierbei zeigen, daß der Begriff des Berührungsmaßes ausreicht Kurven differentialgeometrisch zu charakterisieren.

Die orthogonale Gruppe in der Ebene.

Es sei eine beliebige genügend oft stetig differenzierbare Kurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t)$ gegeben. Wir wollen als Vergleichskurve eine Gerade wählen, die wir mit einem ausgezeichneten Parameter in der Form schreiben:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}s + \mathfrak{b}; \quad |\mathfrak{a}| = 1.$$

Die Gerade berühre die Kurve C in P_0 von mindestens erster Ordnung:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{y}(t_0); \quad \mathfrak{a} = \lambda \left(\frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,t}\right)_{t=t_0}.$$

Um die von uns stets geforderte Normierung der Länge der Tangentenvektoren zu erhalten ($\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$), führen wir in C an Stelle von $t - t_0$ den Parameter $\tau = (t - t_0)\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|$ ein und erhalten so:

$$\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{y}(t_0) + \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}\tau + \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2!\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}\tau^2 + \frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{3!\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}\tau^3 + \ldots;$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}, \quad \mathfrak{Y}_2 = \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2!\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}, \quad \mathfrak{Y}_3 = \frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{3!\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{y}(t_0) + \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}s; \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}, \quad \mathfrak{X}_2 = 0, \quad \mathfrak{X}_3 = 0.$$

Wir haben zunächst eine Größe $\mathfrak{U}$ einzuführen: $\mathfrak{U} \circ \mathfrak{X}_1 = 0$. Infolge der Eigenschaften der orthogonalen Gruppe können wir für $\mathfrak{U}$ einen Vektor

nehmen, der senkrecht auf der Kurve in P_0 steht und normiert die Länge eins hat, d. h. aber

$$\breve{\mathfrak{U}} = \mathfrak{n} \quad \text{(Kurvennormalvektor)}.$$

Es wird:

$$J_2 = \breve{\mathfrak{U}} \circ (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) = \mathfrak{n} \circ \left(-\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}\right).$$

Um die Bedeutung von J_2 zu ermitteln, beziehen wir C auf die Bogenlänge und benutzen die Frenet-Formeln:

$$\left.\frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,s}\right|_0 = \mathfrak{t}; \quad \frac{d\,\mathfrak{t}}{d\,s} = \varkappa\,\mathfrak{n} = \left(\frac{d^2\,\mathfrak{y}}{d\,t^2}\left(\frac{d\,t}{d\,s}\right)^2 + \frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,t}\,\frac{d^2\,t}{d\,s^2}\right)_0; \quad \varkappa = \frac{\mathfrak{n} \circ \ddot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2},$$

d. h. aber:

$$\boxed{J_2 = -\tfrac{1}{2}\varkappa.}$$

Ergebnis: Das Berührungsmaß J_2 zwischen einer beliebigen (genügend oft stetig differenzierbaren) ebenen Kurve und einer Geraden, die von erster Ordnung berührt, ist unter Zugrundelegung der orthogonalen Gruppe bis auf einen (unwesentlichen) Zahlfaktor gleich der Krümmung der Kurve in P_0.

Wir wählen jetzt als Vergleichskurve einen Kreis in der Darstellung:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{m} + r\,\mathfrak{a}\cos\frac{\varphi}{r} + r\,\mathfrak{b}\sin\frac{\varphi}{r}; \quad \mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} = 1; \quad \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = 0, \ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{b} = 1.$$

Es ist:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{y}(t_0); \quad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{b}, \ \mathfrak{X}_2 = -\frac{1}{2r}\mathfrak{a}, \ \mathfrak{X}_3 = -\frac{1}{6r}\mathfrak{b};$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}, \quad \mathfrak{Y}_2 = \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}, \quad \mathfrak{Y}_3 = \frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{3!\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}.$$

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1, \ \mathfrak{b} = \frac{\dot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}, \ \mathfrak{a} = \left(-\frac{\dot{y}_0^2}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}, +\frac{\dot{y}_0^1}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|}\right)^6).$$

Für $\breve{\mathfrak{U}}$ können wir diesmal $\breve{\mathfrak{U}} = \mathfrak{a}$ nehmen. Es wird:

$$J_2 = \mathfrak{a} \circ \left(-\frac{1}{2r}\mathfrak{a} - \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}\right)$$

Um den Vergleichskreis festzulegen, fordern wir auch $J_2 = 0$, d. h.

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{a} \circ \ddot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2} = -\frac{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}\,^6).$$

Für $\breve{\mathfrak{Z}}$ können wir $\mathfrak{b}$ nehmen: $\breve{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{b}$.

---

6) Die Schreibweise $\mathfrak{a} = (a^1, a^2)$ bedeute: $\mathfrak{a}$ habe die Komponenten a^1, a^2; $|\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|$ bedeute die zweireihige Determinante aus den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Es folgt:

$$J_3 = \left(-\frac{1}{6r}\mathfrak{b} - \frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{6|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}\right) \circ \mathfrak{a} + 2\left(-\frac{1}{2r}\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a}\right)\left(\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2} + \frac{1}{2r}\mathfrak{a}\right) \circ \mathfrak{b}$$

$$= -\frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0 \circ \mathfrak{a}}{6|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3} - \frac{1}{r}\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0 \circ \mathfrak{b}}{2|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}$$

oder:

$$J_3 = -\frac{1}{6}\frac{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^4} + \frac{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^4} \cdot \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0 \circ \dot{\mathfrak{y}}_0}{2|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}.$$

Um ebenfalls die Bedeutung der J_3 zu ermitteln, führen wir statt t die euklidische Bogenlänge s ein. Dies stört die Normierung im betrachteten Punkte nicht, läßt daher nach früherem auch J_3 ungeändert. Also ist:

$$J_3 = -\frac{1}{6}|\mathfrak{y}_0' \times \mathfrak{y}_0'''|; \quad \left(' = \frac{d}{ds}\right),$$

oder:

$$\boxed{J_3 = -\frac{1}{6}\frac{d\varkappa}{ds}.}$$

Ergebnis: Das Berührungsmaß J_3 zwischen einer Kurve der Klasse drei und einem von mindestens zweiter Ordnung berührenden Kreise in P_0 ist bis auf einen Zahlfaktor gleich $\frac{d\varkappa}{ds}$ in P_0.

Die orthogonale Gruppe im dreidimensionalen Raum.

Es sei eine beliebige genügend oft differenzierbare Kurve $\mathfrak{y}(t)$ gegeben. Wir wählen als Vergleichskurve eine Gerade, die in P_0 von mindestens erster Ordnung berührt. Die einzuführenden Normierungen bedingen genau die obige Darstellung (6).

Es soll $\breve{\mathfrak{U}} \circ \mathfrak{X}_1 = 0$, $\breve{\mathfrak{Z}} \circ \mathfrak{X}_1 = 1$ sein. Wir wählen für

$\breve{\mathfrak{U}} = \cos\varphi \cdot \mathfrak{h} + \sin\varphi\,\mathfrak{b}$ — $\mathfrak{h}$ Hauptnormale in P_0

$\breve{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{X}_1$ — $\mathfrak{b}$ Binormale in P_0

φ beliebig

Es wird:

$$J_2 = \breve{\mathfrak{U}} \circ (\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_2) = (\cos\varphi\,\mathfrak{h} + \sin\varphi\,\mathfrak{b}) \circ \left(\frac{-\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2}\right).$$

Nun ist:

$$\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2} = \left(\varkappa_1\mathfrak{h} - \mathfrak{t}\frac{d^2t}{ds^2}\right)_0.$$

Damit wird:

$$\boxed{J_2 = -\frac{\varkappa_1}{2}\cos\varphi.}$$

In Abhängigkeit von der Ebenenstellung $\breve{\mathfrak{U}}$ erreicht das Berührungsmaß J_2 für die Schmiegebenenrichtung $\varphi = 0$ einen Extremwert und stimmt dort bis auf den Faktor $(-\frac{1}{2})$ mit der ersten Krümmung der Raumkurve überein. Für die Richtung der rektifizierenden Ebene verschwindet J_2 und wir können, um auch in diesem Falle ein Berührungsmaß zu erhalten, J_3 bilden.

Es wird:

$$J_3 = \breve{\mathfrak{U}} \circ (\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Y}_3) + 2(\mathfrak{X}_2 \circ \breve{\mathfrak{U}})(\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{X}_2) \circ \breve{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{b} \circ \left(-\frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{6\,|\dot{\mathfrak{y}}_0|^3}\right) + 2 \cdot 0.$$

Wegen $\mathfrak{b} \circ \ddot{\mathfrak{y}}_0 = 0$ ist:

$$\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,s}\frac{d\,s}{d\,t}\ddot{\mathfrak{y}}_0 + \mathfrak{b} \circ \dddot{\mathfrak{y}}_0 = 0,$$

$$J_3 = \frac{1}{6}\frac{\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,s} \circ \ddot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0|^2} = \frac{1}{6}\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,s} \circ \left(\frac{d\,t}{d\,s} - t\frac{d^2t}{d\,s^2}\right)_0; \quad \frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,s} = -\varkappa_2\,\mathfrak{h}.$$

$$\boxed{J_3 = -\tfrac{1}{6}\varkappa_1\varkappa_2}$$

Ergebnis: In Richtung der rektifizierenden Ebene ergibt sich für das Berührungsmaß bis auf den Faktor $(-\frac{1}{6})$ das Produkt aus erster und zweiter Krümmung der Raumkurve in P_0.

Die speziell-affine Gruppe in der Ebene.

Es sei wiederum eine beliebige genügend oft differenzierbare Kurve $\mathfrak{y}(t)$ gegeben:

$$\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{y}(t_0) + \dot{\mathfrak{y}}_0(t - t_0) + \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots; \quad \mathfrak{Y}_1 = \dot{\mathfrak{y}}_0, \quad \mathfrak{Y}_2 = \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2},$$

$$\mathfrak{Y}_3 = \frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{6}, \quad \mathfrak{Y}_4 = \frac{\mathfrak{y}^{IV}}{24}.$$

Als Vergleichskurve wähle ich eine Parabel (auf einen normierten Parameter bezogen):

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}s + \frac{\mathfrak{c}}{2}s^2; \quad |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| = 1;$$

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{b}; \quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\mathfrak{c}}{2}; \quad \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{X}_4 = 0.$$

Um die Parabel festzulegen, müssen wir eine Berührung mindestens dritter Ordnung fordern. Dazu haben wir noch $\breve{\mathfrak{U}}$ und $\breve{\mathfrak{Z}}$ einzuführen.

$$\breve{\mathfrak{U}} \circ \mathfrak{X}_1 = 0, \quad \breve{\mathfrak{U}} = \lambda \cdot (-\dot{y}_0^2, +\dot{y}_0^1); \quad \breve{\mathfrak{Z}} \circ \mathfrak{X}_1 = 1, \quad \breve{\mathfrak{Z}} = (+c^2, -c^1)^6).$$

Es ist:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{y}(t_0), \quad \mathfrak{b} = \dot{\mathfrak{y}}_0;$$

$$J_2 = \breve{\mathfrak{U}} \circ \left(\frac{\mathfrak{c}}{2} - \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{2}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| - \frac{1}{2}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0| = 0.$$

$$J_3 = \breve{\mathfrak{U}} \circ \left(-\frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{6}\right) + 2\left(\frac{\mathfrak{c}}{2} \circ \breve{\mathfrak{U}}\right)\left(\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2} - \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) \circ \breve{\mathfrak{Z}} = 0$$

oder

$$J_3 = -\frac{\lambda}{6}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0| + |\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| \cdot \frac{1}{2}|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = 0.$$

Wir wollen J_4 berechnen. Nach (2) ist

$$J_4 = \breve{\mathfrak{U}} \circ \left(-\frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{24}\right) + 3 \cdot 0 + \left(\frac{\mathfrak{c}}{2} \circ \breve{\mathfrak{U}}\right)\left\{\left(\frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{2} - \frac{\mathfrak{c}}{2}\right) \circ \breve{\mathfrak{Z}}\right\}^2 + 2\left(\frac{\mathfrak{c}}{2} \circ \breve{\mathfrak{U}}\right)\left(\frac{\dddot{\mathfrak{y}}_0}{6} \circ \breve{\mathfrak{Z}}\right) - 4 \cdot 0$$

$$-\frac{\lambda}{24}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddddot{\mathfrak{y}}_0| + \frac{\lambda}{2}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}|\left\{\frac{|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}|}{2}\right\}^2 + \frac{1}{6}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| \cdot |\dddot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}|.$$

Aus $J_3 = 0$ folgt $|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = \frac{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}{\lambda}$, Normierung: $|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = 1$; aus $J_3 = 0$ folgt $|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = \frac{\lambda^2}{3} \cdot \frac{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|}{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}$.

Aus

$$\left.\begin{aligned} &|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = 1 \\ &|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \mathfrak{c}| = \tfrac{1}{3}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|\,|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0| \end{aligned}\right\} \text{ folgt } \mathfrak{c} = -\frac{1}{3}|\dot{\mathfrak{y}}^0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|\dot{\mathfrak{y}}_0 + \frac{\ddot{\mathfrak{y}}_0}{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}.$$

Damit wird:

$$J_4 = -\frac{1}{24}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0| \cdot |\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddddot{\mathfrak{y}}_0| + \frac{1}{72}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|^3 \cdot |\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|^2$$

$$+\frac{1}{18}|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|^2 - \frac{1}{6}\frac{|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0|}{|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0|}.$$

Um J_4 mit dem bekannten Invarianten zu vergleichen, denken wir uns (da ja J_4 gegenüber Parametertransformationen $t = \tau + \ldots$ invariant ist) auf $\mathfrak{y}(t)$ die Affinbogenlänge als Parameter eingeführt. Dann wird:

$|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddot{\mathfrak{y}}_0| = 1$, $|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0| = 0$, $|\dot{\mathfrak{y}}_0 \times \ddddot{\mathfrak{y}}_0| = -|\ddot{\mathfrak{y}}_0 \times \dddot{\mathfrak{y}}_0| = \varkappa =$ Affinkrümmung

und schließlich:

$$\boxed{J_4 = \tfrac{1}{8}\varkappa.}$$

Ergebnis: Das Berührungsmaß vierter Ordnung zwischen einer beliebigen ebenen Kurve der Klasse vier und einer in P_0 von mindestens dritter Ordnung berührenden Parabel ist unter Zugrundelegung der speziell-affinen Gruppe gleich $\frac{1}{8}$ der Affinkrümmung der Kurve in P_0.

Diese Beispiele wollen zeigen,

1) welche geometrische Bedeutung der allgemein eingeführte Begriff des Berührungsmaßes in speziellen Geometrien hat,

2) sollen sie veranschaulichen, welchen Weg man einzuschlagen hat, um in irgendeiner speziellen Differentialgeometrie die geometrischen Invarianten einer Kurve aus dem Berührungsmaß zu erhalten. Es ist dazu nur erforderlich, in jeder Richtung durch jeden Punkt des R_n eine „Normalkurve" mit ausgezeichnetem Parameter als Vergleichskurve zur Verfügung zu haben.

Literatur.

Behnke-Thullen:

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math. III, 3 (1934), S. 23.

Duschek-Mayer:

[2] Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band I (1930), S. 53.

Hlavatý:

Les courbes de la variété générale à n dimensions. Mémorial des sc. math. 63 (1934), S. 28—30.

König-Peschl:

Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum I, II. Leipziger Berichte 86 (1934).

Jena, den 11. April 1936.

(Eingegangen am 9. Mai 1936.)

Integralgeometrie 16.

Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n *).

Von

Arno Müller in Breslau.

Ist durch Parameter $u_1, \ldots, u_m$ irgend eine Menge geometrischer Größen gegeben und erweist sich, die Integration über eine beliebige Teilmenge genommen, das Integral

$$\int \ldots \int F(u_1, \ldots, u_m)\, du_1, \ldots, du_m$$

gegenüber einer bestimmten Transformationsgruppe als invariant, so stellt der wegen der Beliebigkeit des Integrationsgebietes gleichfalls invariante Integrand

$$D = F(u_1, \ldots, u_m)\, du_1 \ldots du_m$$

die „Dichte" der vorliegenden Menge gegenüber dieser Transformationsgruppe dar[1]); die Funktion F ist, soweit sie überhaupt existiert, eindeutig, d. h. bis auf eine Konstante, bestimmbar, sobald die fragliche Gruppe transitiv ist. Im folgenden sollen einige Dichten mittels der infinitesimalen Transformationen verschiedener Gruppen berechnet werden.

Seien diese infinitesimalen Transformationen gegeben durch

$$U_\lambda f = \sum_{\mu=1}^{m} \omega_{\lambda\mu}(u_1, \ldots, u_m) \frac{\partial f}{\partial u_\mu}, \qquad [\lambda = 1, \ldots, l]$$

wo l die Anzahl der Parameter der Gruppe bedeutet, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Invarianz des Integrals, daß F den folgenden Gleichungen genügt[2]):

$$\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_\mu}(\omega_{\lambda\mu} F) = 0 \qquad [\lambda = 1, \ldots, l] \tag{1}$$

§ 1.

Es sei uns ein n-dimensionaler projektiver Raum und in ihm irgendeine $(n-1)$-dimensionale, nicht singuläre quadratische Hyperfläche F_2 gegeben.

*) Von der Philosophischen Fakultät der Universität Breslau genehmigte Dissertation.

[1]) Siehe etwa Integralgeometrie von W. Blaschke, Paris 1935.

[2]) Siehe etwa Deltheil, Probabilités géométriques, Paris 1926, S. 27ff.

Deren Gleichung lautet in Matrizenform

$$\mathfrak{X}' \mathfrak{M} \mathfrak{X} = \mathfrak{O},$$

wenn wir

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n+1,1} & \cdots & m_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

definieren, wobei $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{M}| \neq 0$ gelten soll.

Die x sollen dabei irgendwelche projektiven Koordinaten sein. Wir können sie umkehrbar eindeutig in solche Koordinaten z transformieren, deren Koordinaten-Simplex ein Polar-Symplex in bezug auf F_2 ist, und in denen die Gleichung von F_2

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k z_k^2 = 0$$

lautet, wobei $\varepsilon_k = \pm 1$ bedeuten soll. Wird weiter

$$z_k^* = \sum_{\lambda=1}^{n+1} p_{k\lambda} \varrho_\lambda z_\lambda \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda} p_{k\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \mu,$$

sind also die $p_{k\lambda}$ die Koordinaten der λ-ten Ecke eines Polar-Simplex bezüglich F_2 und soll letzteres beim Übergang von z zu z^* invariant bleiben, so haben wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\lambda=1}^{n+1} \sum_{\mu=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda} p_{k\mu} \varrho_\lambda \varrho_\mu z_\lambda z_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n+1} \varrho_\lambda^2 z_\lambda^2 \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda}^2 = \sum_{\lambda=1}^{n+1} \varepsilon_\lambda z_\lambda^2 = 0,$$

$$\varrho_\lambda = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_\lambda}{\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda}^2}}.$$

Je nach der Wahl der Vorzeichen für jedes λ bestehen noch $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} = 2^n$ Möglichkeiten; die $p_{k\gamma}$ hängen von $\binom{n+1}{2}$ unabhängigen Parametern ab.

Es lassen sich also irgend zwei Koordinatensysteme $S(F_2)$ in $z^{(1)}$ bzw. $z^{(2)}$, in denen F_2 dieselbe Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k z_k^{(i)2} = 0 \qquad [i = 1, 2]$$

hat und für die mithin gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda}^{(i)} p_{k\mu}^{(i)} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \ldots, n+1; \quad \mu = 1, \ldots, n+1 \quad \text{und} \quad \lambda \neq \mu;$$

$$\operatorname{sgn} \varepsilon_\lambda = \operatorname{sgn} \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\lambda}^{(i)2}; \qquad [\lambda = 1, \ldots, n+1]$$

$$e_\lambda^{(i)} = \sum_{\mu=1}^{n+1} \left\{ \pm p_{\lambda\mu}^{(i)} \sqrt{\frac{\varepsilon_\mu}{\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k p_{k\mu}^{(i)2}}} \right\},$$

wo die $p_{k\lambda}^{(i)}$, bzw. $e_\lambda^{(i)}$ die Koordinaten der Grundpunkte, bzw. des Einheitspunktes jeweilig des einen Systems im anderen sind, durch eine und nur eine gegenüber F_2 invariante projektive Transformation ineinander überführen, und jede Transformation dieser Gruppe bildet ein Koordinatensystem $z^{(i)}$ auf ein solches der obigen Eigenschaften ab. Jeder Abbildung der z, die F_2 invariant läßt, entspricht eine ebensolche in den x und umgekehrt. Jedes System $S(F_2)$ läßt sich mithin durch diejenige Transformation der Gruppe eindeutig kennzeichnen, die es aus irgendeinem festgehaltenen erzeugt, bzw. die entsprechende Transformation $\mathfrak{A}$ in den x. Bedeutet $\mathfrak{B}$ eine weitere Transformation der Gruppe, so haben wir also von der Gleichung

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \tag{2}$$

auszugehen, wenn wir die Dichte aller solchen Systeme $S(F_2)$ gegenüber der vorliegenden Transformationsgruppe berechnen wollen. Dabei wollen wir uns im folgenden auf Transformationen mit positiver Determinante, bzw. die entsprechende Teilmenge der $S(F_2)$ beschränken, was allerdings nur bei ungeradem n eine wirkliche Einschränkung bedeutet.

Ist $\mathfrak{S} = (a_{ik}) = -\mathfrak{S}'$ eine beliebige, $(n+1)$-reihige schiefsymmetrische Matrix, so können wir analog zu der Cayleyschen Darstellung orthogonaler Matrizen[3]) schreiben

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}^{-1},$$

wo $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix bedeutet. Die Anzahl der unabhängigen Elemente von $\mathfrak{S}$ ist in der Tat $\binom{n+1}{2}$. $|\mathfrak{A}| = 1$ ist positiv; daß es genau plus Eins ist, ist wegen der Homogenität der Koordinaten keine Einschränkung. Es ist ferner

$$\{\mathfrak{E} - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\}\,\mathfrak{M}\,\{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\} = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{M} = \{\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\}\,\mathfrak{M}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\};$$

$$\{\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\}^{-1}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\}\,\mathfrak{M}\,\{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}^{-1} = \mathfrak{A}'\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{M},$$

wie es sein muß. Weiter gilt

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M} = 2\,\{\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\}^{-1}$$

$$|\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}| \cdot |\mathfrak{E} + \mathfrak{A}| = 2^{n+1}.$$

Bei gegebenem $\mathfrak{A}$ ist also $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmbar, sobald die Inverse der Matrix $\mathfrak{E} + \mathfrak{A}$ existiert; doch sind die damit zunächst ausgeschlossenen Fälle von $\mathfrak{A}$ als Grenzwerte gegen Unendlich strebender Elemente von $\mathfrak{S}$ gleichfalls durch den obigen Ansatz erreichbar, wie Frobenius gezeigt hat[4]). Andererseits bedeutet auch das Weglassen derjenigen Kombinationen der a_{ik}, für die $|\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}| = 0$ ist, keine Einschränkung, weil ein solches System der a_{ik} keinem wirklich vorkommenden Falle von $\mathfrak{A}$

[3]) Siehe A. Cayley, Math. papers 1, S. 322—335.

[4]) Siehe Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen; Journ. f. d. reine u. angew. Math. (Crelle) 84.

entspricht, dessen Elemente jedenfalls endlich sind, so daß immer $|\mathfrak{E}+\mathfrak{A}| \neq \infty$ gilt. Wir erhalten also durch unseren obigen Ansatz tatsächlich die gewünschte Gruppe.

Es ist nun

$$\mathfrak{A}^* = \{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_{a^*}\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_{a^*}\mathfrak{M}\}^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_{a^*}\mathfrak{M} = 2\{\mathfrak{E}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}^{-1} = 2\{\mathfrak{A}'\mathfrak{M}+\mathfrak{M}\mathfrak{B}\}^{-1}\mathfrak{A}'\mathfrak{M}.$$

Mit der Frage, wieweit $\{\mathfrak{E}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}^{-1}$ existiert, brauchen wir uns nicht weiter zu beschäftigen, da es nach der Theorie der infinitesimalen Gruppen genügt, die Transformationsformeln in einer Umgebung der Identität zu kennen, wobei vorausgesetzt ist, daß diese durch Nullsetzen der Parameter erzielt wird. Das ist hier der Fall, und aus Stetigkeitsgründen $\{\mathfrak{E}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}^{-1}$ in einer Umgebung der Identität jedenfalls vorhanden. Wir erhalten weiter

$$\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_{a^*}\mathfrak{M} = 2\Big\{\{\mathfrak{E}+\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}^{-1}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}\mathfrak{M}+\mathfrak{M}\{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\}^{-1}\Big\}^{-1}$$
$$\{\mathfrak{E}+\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}^{-1}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}\mathfrak{M}$$
$$= \{\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\}^{-1}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}$$

$$\mathfrak{S}_{a^*}-\mathfrak{S}_a = \{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}\mathfrak{S}_b\{\mathfrak{E}+\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b\}^{-1}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}$$
$$= \{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}\mathfrak{S}_b\{\mathfrak{E}-\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\} - \{\mathfrak{E}+\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b$$
$$\{\mathfrak{E}+\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b\}^{-1}\{\mathfrak{E}-\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}$$

$$\mathfrak{S}_{a^*}-\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}_b+\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b-\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a-\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a+\ldots,$$

wo die Punkte diejenigen Glieder vertreten, in denen die b_{ik} nur noch in einer höheren als in der ersten Potenz vorkommen. Also $(i<k)$

$$a^*_{ik}-a_{ik} = b_{ik}+\sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1}\{a_{i\lambda}m_{\lambda\mu}b_{\mu k}-b_{i\lambda}m_{\lambda\mu}a_{\mu k}\}$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{\varrho=1}^{n+1}a_{i\lambda}m_{\lambda\mu}b_{\mu\nu}m_{\nu\varrho}a_{\varrho k}+\ldots.$$

Daraus ergeben sich folgende infinitesimale Transformationen:

$$\delta a_{ik} = \{1+\sum_{\lambda=1}^{n+1}(a_{i\lambda}m_{\lambda i}-a_{\lambda k}m_{k\lambda}+\sum_{\varrho=1}^{n+1}a_{i\lambda}a_{\varrho k}(m_{\lambda k}m_{i\varrho}-m_{\lambda i}m_{\varrho k}))\}\,\delta t;$$

$$\delta a_{i\mu} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1}(a_{\mu\lambda}m_{k\lambda}+\sum_{\varrho=1}^{n+1}a_{i\lambda}a_{\varrho\mu}(m_{\lambda k}m_{i\varrho}-m_{\lambda i}m_{k\varrho}))\}\,\delta t,$$
$$[i+1 \leqq \mu \neq k \leqq n+1];$$

$$\delta a_{\mu i} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1}(a_{\lambda\mu}m_{\lambda k}+\sum_{\varrho=1}^{n+1}a_{\mu\lambda}a_{\varrho i}(m_{\lambda k}m_{i\varrho}-m_{\lambda i}m_{k\varrho}))\}\,\delta t,$$
$$[1 \leqq \mu \leqq i-1];$$

$$\delta a_{\mu k} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1}(a_{\mu\lambda}m_{\lambda i}+\sum_{\varrho=1}^{n+1}a_{\mu\lambda}a_{\varrho k}(m_{\lambda k}m_{i\varrho}-m_{\lambda i}m_{k\varrho}))\}\,\delta t,$$
$$[1 \leqq \mu \neq i \leqq k-1];$$

$$\delta a_{k\mu} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1}(a_{\lambda\mu} m_{i\lambda} + \sum_{\varrho=1}^{n+1} a_{k\lambda} a_{\varrho\mu}(m_{\lambda k} m_{i\varrho} - m_{\lambda i} m_{k\varrho}))\}\,\delta t,$$

$$[k+1 \leqq \mu \leqq n+1];$$

$$\delta a_{\mu\nu} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\varrho=1}^{n+1} a_{\mu\lambda} a_{\varrho\nu}(m_{\lambda k} m_{i\varrho} - m_{\lambda i} m_{k\varrho})\}\,\delta t,$$

$$\left[1 \leqq \begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix} \neq \mu < \nu \neq \begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix} \leqq n+1\right].$$

Dann lautet das zweite Glied $\sum_{\mu=1}^{m} \omega_{\lambda\mu} \frac{\partial F}{\partial u_\mu}$ von (1):

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ik}} - \sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1}\Big\{m_{i\lambda} a_{\lambda\mu} \frac{\partial F}{\partial a_{\mu k}} - \frac{\partial F}{\partial a_{i\mu}} a_{\mu\lambda} m_{\lambda k} + \sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_{\varrho=1}^{n+1} m_{i\lambda} a_{\lambda\mu} \frac{\partial F}{\partial a_{\mu\nu}} a_{\nu\varrho} m_{\varrho k}\Big\}.$$

Das ist das allgemeine Glied von

$$\mathfrak{S}_F - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_a\,\mathfrak{S}_F + \mathfrak{S}_F\,\mathfrak{S}_a\,\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_a\,\mathfrak{S}_F\,\mathfrak{S}_a\,\mathfrak{M},$$

wenn

$$\mathfrak{S}_F = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{\partial F}{\partial a_{12}} & \cdots & +\frac{\partial F}{\partial a_{1,n+1}} \\ -\frac{\partial F}{\partial a_{12}} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{\partial F}{\partial a_{1,n+1}} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & 0 \end{pmatrix} \text{ definiert wird.}$$

Das erste Glied von (1) dagegen wird

$$2nF \sum_{\mu=1}^{n+1}\sum_{\varrho=1}^{n+1} m_{i\varrho} a_{\varrho\mu} m_{\mu k},$$

so daß wir als Gleichungssystem für F schließlich erhalten:

$$\{\mathfrak{E} - \mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_a\}\,\mathfrak{S}_F\,\{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}_a\,\mathfrak{M}\} = -2nF\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{S}_a\,\mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{S}_F = -nF[\{\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a\}^{-1} - \{\mathfrak{M}^{-1} + \mathfrak{S}_a\}^{-1}].$$

Ist $M_{ik} = M_{ki}$ die Adjungierte von m_{ik} und $|\mathfrak{M}| = M$, so erhalten wir danach:

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ik}} = -\frac{nF}{|\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a|}\Big\{\frac{\partial |\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a|}{\partial\left\{\frac{M_{ik}}{M} + a_{ik}\right\}} \cdot \frac{d\left\{\frac{M_{ik}}{M} + a_{ik}\right\}}{da_{ik}} + \frac{\partial |\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a|}{\partial\left\{\frac{M_{ik}}{M} - a_{ik}\right\}} \cdot \frac{d\left\{\frac{M_{ik}}{M} - a_{ik}\right\}}{da_{ik}}\Big\}$$

$$= -\frac{nF}{|\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a|} \cdot \frac{\partial |\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a|}{\partial a_{ik}}$$

und da es auf eine Konstante nicht ankommt,

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_a \mathfrak{M}|^n}}.$$

Dieses Ergebnis ändert sich nicht, wenn wir statt (2) schreiben

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_{a^*}\mathfrak{M} &= \{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}^{-1}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\}\\ \mathfrak{S}_{a^*} - \mathfrak{S}_a &= \{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\}^{-1}\mathfrak{S}_b\{\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}\\ &= \mathfrak{S}_b + \mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a - \mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b - \mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\mathfrak{S}_b\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a + \ldots\end{aligned}$$

und daraus wie oben

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\}\mathfrak{S}_F\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\} &= -2nF\mathfrak{M}\mathfrak{S}_a\mathfrak{M}\\ \mathfrak{S}_F &= -nF[\{\mathfrak{M}^{-1} - \mathfrak{S}_a\}^{-1} - \{\mathfrak{M}^{-1} + \mathfrak{S}_a\}^{-1}].\end{aligned}$$

Im euklidischen Raum entspricht der berechneten Dichte die sogenannte „kinematische" Dichte[5]); an Stelle der $S(F_2)$ tritt die Menge aller n-Beine aus orthogonalen Einheitsvektoren. Untersuchen wir zunächst nur die Rotation $\mathfrak{R}$, so können wir mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$ und Ersetzung von n durch $n - 1$, wo in

$$\mathfrak{X}^* = \mathfrak{R}\,\mathfrak{X}$$

die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nun inhomogene Koordinaten des n-dimensionalen euklidischen Raumes bedeuten, die vorige Rechnung übernehmen und erhalten

$$\boxed{F_E = \frac{1}{|\mathfrak{E} - \mathfrak{S}|^{n-1}}}.$$

Daran ändert die Hinzunahme der Translation nichts mehr. Definieren wir deren Matrix wie folgt mit

$$\mathfrak{T}_\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

so haben wir $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{R}_\alpha\{\mathfrak{R}_\beta\mathfrak{X} + \mathfrak{T}_\beta\} + \mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{R}_\beta\mathfrak{X} + \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{T}_\beta + \mathfrak{T}_\alpha$,

$$\mathfrak{T}_{\alpha^*} - \mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{T}_\beta.$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem (1) mit

$$\mathfrak{R}'_\alpha\mathfrak{T}_F = \mathfrak{O}, \text{ also } \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0.$$

Bei anderer Reihenfolge wird $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{R}_\beta\mathfrak{R}_\alpha\mathfrak{X} + \mathfrak{R}_\beta\mathfrak{T}_\alpha + \mathfrak{T}_\beta$,

$$\mathfrak{T}_{\alpha^*} - \mathfrak{T}_\alpha = 2\mathfrak{S}_b\mathfrak{T}_\alpha + \mathfrak{T}_\beta + 2\mathfrak{S}_b^2\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}_\beta\}^{-1}\mathfrak{T}_\alpha.$$

[5]) s. Blaschke, Integralgeometrie §§ 4 ff.

Das liefert zu der zum Parameter b_{ik} gehörenden infinitesimalen Transformation noch $\delta\alpha_i = 2\alpha_k\delta t$, $\delta\alpha_k = -2\alpha_i\delta t$, sowie zum Parameter β_i die Transformation $\delta\alpha_i = \delta t$. Also ist auch hier wieder $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0$ und es ändert sich an F nichts.

In F_x brauchen wir nun $\mathfrak{S}$ in keiner Weise mehr zu beschränken, da $|\mathfrak{E} - \mathfrak{S}|$ in jedem Falle ungleich Null ist. Denn es ist $|x\mathfrak{E} - \mathfrak{S}| = x^n + \sum_{j=1}^{n} c_j x^{n-j}$, wo die c_j Summen wiederum schiefsymmetrischer Determinanten, also entweder Null, falls j ungerade, oder bei geradem j Summen von Quadraten sind.

§ 2.

Wir wollen nun wieder zum projektiven Raum und den Transformationen $\mathfrak{A}$ des vorigen Paragraphen zurückkehren und gegenüber diesen Transformationen die Dichte aller entweder im Innern oder im Äußeren von F_2 liegenden Punkte berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}^* - \mathfrak{X} &= \{\mathfrak{A} - \mathfrak{E}\}\,\mathfrak{X} = 2\,[\mathfrak{S}\,\mathfrak{M} + (\mathfrak{S}\,\mathfrak{M})^2\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}^{-1}]\,\mathfrak{X} \\ &= 2\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{X} + \ldots\end{aligned}$$

$$(3)\qquad x_i^* - x_i = -2\sum_{\lambda=1}^{i-1} a_{\lambda i}\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{\lambda\mu}x_\mu + 2\sum_{\lambda=i+1}^{n+1} a_{i\lambda}\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{\lambda\mu}x_\mu + \ldots$$

und daraus die infinitesimalen Transformationen

$$(4,1)\quad 1.\ \delta x_i = \sum_{\mu=1}^{n+1} m_{k\mu}x_\mu\,\delta t,\ \delta x_k = -\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{i\mu}x_\mu\,\delta t,\ [1 \leqq i < k \leqq n+1].$$

Außerdem liefert die Homogenität der Koordinaten die Transformation

$$(4.2)\qquad 2.\ \delta x_j = x_j\,\delta t.$$

Das ergibt die Gleichungen

$$1.\ \frac{\partial F}{\partial x_i}\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{k\mu}x_\mu - \frac{\partial F}{\partial x_k}\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{i\mu}x_\mu = 0$$

und

$$2.\ \sum_{\mu=1}^{n+1} x_j\frac{\partial F}{\partial x_i} + (n+1)\,F = 0,$$

1. bleibt richtig auch für $i = k$; multiplizieren wir es mit k und summieren über k von 1 bis $n+1$, so erhalten wir mittels 2.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1} x_\lambda m_{\lambda\mu}x_\mu = -(n+1)\,F\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{i\mu}x_\mu$$

$$= -\frac{n+1}{2}F\left\{\sum_{\lambda=1}^{n+1} x_\lambda m_{\lambda i} + \sum_{\mu=1}^{n+1} m_{i\mu}x_\mu\right\},$$

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{X}'\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{X}|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

Führen wir inhomogene Koordinaten $y_j = \frac{x_j}{x_{n+1}}$ ein, so übertragen sich die Transformationen (4) nach der Formel

$$\delta y_j = \frac{\delta x_j - y_j \delta x_{n+1}}{x_{n+1}}$$

und wir erhalten in analoger Rechnung wie oben, wenn wir

$$\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

definieren,

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{Y}' \mathfrak{M} \mathfrak{Y}|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

Ist F_2 die Einheitshyperkugel, so lautet danach die Dichte der in ihrem Innern gelegenen Punkte, also der Punkte der hyperbolischen Geometrie,

$$D_H = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n} dy_\lambda}{\{1 - \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^2\}^{\frac{n+1}{2}}} = \prod_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{Co}^{\lambda-1} x_\lambda \, dx_\lambda,$$

wo

$$y_\lambda = \frac{\mathfrak{Sin}\, x_\lambda}{\prod_{j=1}^{\lambda} \mathfrak{Co}\, x_j}$$

gesetzt ist. Ist dagegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$, haben wir es also mit der elliptischen Geometrie zu tun, so wird

$$D_E = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n} dy_\lambda}{\{1 + \sum_{\lambda=1}^{n} y^2\}^{\frac{n+1}{2}}} = \prod_{\lambda=1}^{n} \cos^{\lambda-1} \varphi_\lambda \, d\varphi_\lambda,$$

wo jetzt

$$y_\lambda = -\frac{\cos \varphi_\lambda}{\prod_{j=1}^{\lambda} \sin \varphi_j}$$

gesetzt wurde.

§ 3.

Wir wollen nun die Dichte aller r-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten E_r im n-dimensionalen projektiven Raum gegenüber der gleichen Transformationsgruppe wie bisher untersuchen. Die E_r erscheinen

als Schnitt von $(n-r)$ Räumen E_{n-1}, sind also durch ein lineares Gleichungssystem gegeben, dessen Matrix den Höchstrang hat und es mithin gestattet, nach den ersten $(n-r)$ Koordinaten — bei passender Numerierung — aufzulösen. Wir haben also

$$x_\lambda = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\mu} x_\mu \qquad [\lambda = 1, \ldots, n-r]. \tag{5}$$

Werden darin die x durch $x + \delta x$ und die $q_{\lambda\mu}$ durch $q_{\lambda\mu} + \delta q_{\lambda\mu} = q_{\lambda\mu} + \omega_{\lambda\mu}\,\delta t$ ersetzt und die Koeffizienten von δt gleich Null gesetzt, so erhalten wir, wenn wir noch gemäß (5) die $x_1, \ldots, x_{n-r}$ durch die $x_{n-r+1}, \ldots, x_{n+1}$ ersetzen, die folgenden Gleichungen:

1. $1 \leqq i < k \leqq n-r$:

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{k\mu} x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n-r} m_{k\lambda} \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\mu} x_\mu + \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{k\mu} x_\mu = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} \omega_{i\mu} x_\mu;$$

$$-\sum_{\mu=1}^{n+1} m_{i\mu} x_\mu = -\sum_{\lambda=1}^{n-r} m_{i\lambda} \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\mu} x_\mu - \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{i\mu} x_\mu = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} \omega_{k\mu} x_\mu;$$

$$0 = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} \omega_{\lambda\mu} x_\mu \qquad [\lambda \neq \begin{Bmatrix} i \\ k \end{Bmatrix}.$$

Setzen wir nun noch die Koeffizienten von x_μ gleich Null, so haben wir

$$\delta q_{i\mu} = \{m_{k\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-r} q_{\lambda\mu} m_{\lambda k}\}\,\delta t; \quad \delta q_{k\mu} = -\{m_{i\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-r} q_{\lambda\mu} m_{i\lambda}\}\,\delta t; \quad \delta q_{\lambda\mu} = 0.$$

In analoger Weise ergeben sich

2. $1 \leqq i \leqq n-r < k \leqq n+1$:

$$\delta q_{i\mu} = \{m_{k\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-r} q_{\lambda\mu} m_{\lambda k} + q_{ik}(m_{i\mu} + \sum_{\lambda=1}^{n-r} q_{\lambda\mu} m_{i\lambda})\}\,\delta t, \quad \delta q_{\lambda\mu}_{\lambda \neq i}$$

$$= q_{\lambda k}(m_{i\mu} + \sum_{j=1}^{n-r} q_{j\mu} m_{ij})\,\delta t.$$

3. $n-r+1 \leqq i < k \leqq n+1$:

$$\delta q_{\lambda\mu} = \{q_{\lambda k} m_{i\mu} - q_{\lambda i} m_{k\mu} + \sum_{j=1}^{n-r} q_{j\mu}(q_{\lambda k} m_{ij} - q_{\lambda i} m_{jk})\}\,\delta t.$$

Danach lautet das Gleichungssystem (1), wenn wir die folgenden Matrizen wie nachstehend definieren:

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} q_{1,\,n-r+1} & \cdots & q_{1,\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n-r,\,n-r+1} & \cdots & q_{n-r,\,n+1} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial q_{1,\,n-r+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial q_{1,\,n+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial q_{n-r,\,n-r+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial q_{n-r,\,n+1}} \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,\,n-r+1} & q_{1,\,n-r+2} & \cdots & q_{1,\,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n-r,\,n-r+1} & q_{n-r,\,n-r+2} & \cdots & q_{n-r,\,n+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,\,n-r} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{1,\,n-r} & \cdots & m_{n-r,\,n-r} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{M}_2 = \begin{pmatrix} m_{1,\,n-r+1} & \cdots & m_{1,\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n-r,\,n-r+1} & \cdots & m_{n-r,\,n+1} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{M}_3 = \begin{pmatrix} m_{n-r+1,\,n-r+1} & \cdots & m_{n-r+1,\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n+1,\,n-r+1} & \cdots & m_{n+1,\,n+1} \end{pmatrix};$$

1. $\mathfrak{F}\{\mathfrak{M}_2' + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_1\} - \{\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}\}\mathfrak{F}' = \mathfrak{O};$
2. $\mathfrak{F}\{\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_2\} + \{\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}\}\mathfrak{F}'\mathfrak{Q} + (n+1)F\{\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}\} = \mathfrak{O};$
3. $\{\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2'\mathfrak{Q}\}\mathfrak{F}'\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{F}\{\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_2\}$
$$- (n+1)F\{\mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_2'\mathfrak{Q}\} = \mathfrak{O}.$$

1. und 2. ergeben zusammen

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2'\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}\} = -(n+1)F\{\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}\},$$

worin

$$\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2'\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q} = Q'\mathfrak{M}Q$$

ist. Wir haben zu untersuchen, wann dieses Matrizenprodukt eine Inverse besitzt. Dazu definieren wir noch die beiden Koordinatenmatrizen

$$\mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{n-r+1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dann lauten die Gleichungen von E_r:

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Q}\mathfrak{X}_2$$

und von F_2:

$$\mathfrak{X}'\mathfrak{M}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1'\mathfrak{M}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_1'\mathfrak{M}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_2'\mathfrak{M}_2'\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2'\mathfrak{M}_3\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{O}.$$

Die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$ in bezug auf F_2 ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{P}_1'\mathfrak{M}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{P}_1'\mathfrak{M}_2\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{P}_2'\mathfrak{M}_2'\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{P}_2'\mathfrak{M}_3\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{O},$$

wo die Matrizen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ analog zu $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ definiert seien. Soll nun E_r tangential zu F_2 sein, so muß es ein

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix}$$

derart geben, daß der Pol der E_{n-1}

$$\Lambda' \mathfrak{X}_1 = \Lambda' \Omega \mathfrak{X}_2$$

auf E_r und damit auch auf F_2 gelegen ist. Sei dieser Pol jetzt $\mathfrak{P}$, so bestehen für ihn, wenn $c \neq 0$ irgendeine Konstante bedeutet, die folgenden Gleichungen

$$\mathfrak{P}_1' \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{P}_2' \mathfrak{M}_2' = c\Lambda'$$
$$\mathfrak{P}_1' \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{P}_2' \mathfrak{M}_3 = -c\Lambda' \Omega$$

und nach Multiplikation der ersten mit Ω von rechts her und Addition

$$\mathfrak{P}_1' \mathfrak{M}_1 \Omega + \mathfrak{P}_1' \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{P}_2' \mathfrak{M}_2' \Omega + \mathfrak{P}_2' \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{O}.$$

Wegen $\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_2' \Omega'$ aber wird dies

$$\mathfrak{P}_2' \{\mathfrak{M}_3 + \Omega' \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2' \Omega + \Omega' \mathfrak{M}_1 \Omega\} = \mathfrak{O}. \tag{6}$$

$\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{O}$ zieht $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{O}$ und also $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}$ nach sich. $\mathfrak{P}$ sollte aber wirklich existieren, also muß

$$|\mathfrak{M}_3 + \Omega' \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2' \Omega + \Omega' \mathfrak{M}_1 \Omega| = 0$$

gelten. Ist dies umgekehrt der Fall, so liefert das lineare Gleichungssystem (6) ein $\mathfrak{P}_2 \neq \mathfrak{O}$ und die Gleichung

$$\mathfrak{P}_2' \{\Omega' \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2'\} = c\Lambda'$$

die Matrix Λ, die mithin existiert, weshalb E_r zu F_2 tangential ist. Wir dürfen also nur entweder alle die E_r unserer Berechnung zugrunde legen, die F_2 überhaupt nicht, oder die es in mehr als einem Punkte schneiden (F_2 sollte nicht singulär sein). Mithin haben wir

$$\mathfrak{F} = -(n+1) F \{\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1 \Omega\} \{Q' \mathfrak{M} Q\}^{-1}.$$

Wie leicht zu verifizieren ist, erfüllt dieses $\mathfrak{F}$ auch Gleichung 3. Es ist nun, i und k von $(n-r+1)$ bis $(n+1)$,

$$Q' \mathfrak{M} Q = (g_{ik})$$
$$= (m_{ik} + \sum_{j=1}^{n-r} q_{ji} m_{jk} + \sum_{j=1}^{n-r} q_{jk} m_{ij} + \sum_{h=1}^{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} q_{hi} m_{hj} q_{jk}) = (g_{ki}),$$

und wenn $|g_{ik}| = G$ und die Adjungierte von g_{ik}

$$G_{ik} = G_{ki}$$

gesetzt wird, so gilt

$$\frac{\partial G}{\partial q_{\lambda\mu}} = 2 \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} G_{\mu\nu}\Big(m_{\lambda\nu} + \sum_{j=1}^{n-r} q_{j\nu} m_{\lambda j}\Big) = -\frac{2G}{(n+1)F} \cdot \frac{\partial F}{\partial q_{\lambda\mu}}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{|Q' \mathfrak{M} Q|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

Ist E_r nicht in der speziellen Form (5), sondern allgemein durch

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} v_{\lambda\mu} x_\mu = 0 \qquad [\lambda = 1, \ldots, n-r]$$

gegeben, so können wir auch in den Parametern v die Dichte berechnen. Es wird in der gleichen Weise wie oben

1. $$\delta v_{\lambda\mu} = \{m_{i\mu} v_{\lambda k} - m_{k\mu} v_{\lambda i}\}\, \delta t,$$

wo wir jetzt allerdings die Koeffizienten von x_1 bis x_{n+1} Null gesetzt haben. Dafür müssen wir noch berücksichtigen, daß, wenn

$$\mathfrak{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1,\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-r,\,1} & \cdots & v_{n-r,\,n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathsf{P} = \begin{pmatrix} \varrho_{11} & \cdots & \varrho_{1,\,n-r} \\ \vdots & & \vdots \\ \varrho_{n-r,\,1} & \cdots & \varrho_{n-r,\,n-r} \end{pmatrix}$$

definiert werden, wo die ϱ völlig willkürliche Größen sind, E_r auch mit

$$\mathsf{P}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{x} = \mathfrak{O}$$

gegeben ist. Also haben wir noch

2. $$\delta v_{i\mu} = v_{k\mu}\, \delta t \qquad [i = 1, \ldots, n-r;\ k = 1, \ldots, n-r]$$

wird jetzt

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial v_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial v_{1,\,n+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial v_{n-r,\,1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial v_{n-r,\,n+1}} \end{pmatrix},$$

so lautet das Gleichungssystem (1) nun

1. $\mathfrak{M}\, \mathfrak{F}'\, \mathfrak{V} = \mathfrak{V}'\, \mathfrak{F}\, \mathfrak{M}$; 2. $\mathfrak{F}\, \mathfrak{V}' + (n+1) F\, \mathfrak{E} = \mathfrak{O}$

und daraus

$$\mathfrak{M}\, \mathfrak{F}'\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{V}' + (n+1) F\, \mathfrak{V}' = \mathfrak{O}.$$

$|\mathfrak{V}\, \mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{V}'| = 0$ ist nun wieder dann und nur dann der Fall, wenn E_r tangential zu F_r ist. Haben $\mathfrak{P}$ und Λ die gleiche Bedeutung wie oben, so gilt jetzt

$$\mathfrak{P}'\, \mathfrak{M} = c\, \Lambda'\, \mathfrak{V}$$

$$\mathfrak{P} = c\, \mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{V}'\, \Lambda$$

$$\mathfrak{V}\, \mathfrak{P} = c\, \{\mathfrak{V}\, \mathfrak{M}^{-1}\, \mathfrak{V}'\}\, \Lambda = \mathfrak{O}.$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die λ, das dann und nur dann sinnvolle, d. h. von Null verschiedene Lösungen Λ ergibt, wenn

$$|\mathfrak{B}\,\mathfrak{M}^{-1}\,\mathfrak{B}'| = 0$$

ist. Unter Ausschaltung der tangentialen E_r können wir also weiter rechnen und erhalten ganz analog wie oben

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{B}\,\mathfrak{M}^{-1}\,\mathfrak{B}'|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

§ 4.

Wir wollen nun unsere Transformationsgruppe dahin spezialisieren, daß die F_2 die $(n-1)$-dimensionale Einheitshyperkugel sei. Den Punkten der Hyperkugel können wir in stereographischer Projektion aus dem „Südpol" $\{0, \ldots, 0, -1, +1\}$ in die „Äquator"-Hyperebene M_{n-1}, die die Gleichung $x_n = 0$ hat, die Punkte dieses $(n-1)$-dimensionalen Raumes umkehrbar eindeutig zuordnen, wenn wir M_{n-1} als den $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raum vermehrt um einen unendlich fernen Punkt, dem der „Südpol" selbst entspricht, auffassen. Durch Projektion der Schnitte ihrer Polar-Hyperebenen mit der Hyperkugel entsprechen dann den Punkten des n-dimensionalen projektiven Raumes, die im Äußeren der Hyperkugel gelegen sind, die M-Hyperkugeln in M_{n-1}, und den projektiven Transformationen, die die Einheitshyperkugel in sich überführen, d. h. den hyperbolischen Bewegungen, die Gruppe der Möbiusschen Kreisverwandtschaften. Mit Rücksicht auf die Möglichkeit dieser Ausdeutung wollen wir unseren weiteren Betrachtungen statt eines n-dimensionalen einen $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raum zugrunde legen.

Bevor wir uns jedoch mit den Kreisverwandtschaften unmittelbar beschäftigen, wollen wir die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen im $(n+1)$-dimensionalen projektiven Raum noch dahin einschränken, daß außer der Einheitshyperkugel als Ganzes ein einzelner Punkt fest bleiben soll, und gegenüber dieser Gruppe die Dichte aller E_{r+1} durch den festen Punkt untersuchen.

Sei die Koordinatenmatrix dieses Punktes

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

so wäre nun $\mathfrak{S}$ so zu bestimmen, daß

$$\gamma\mathfrak{C} = \{\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}^{-1}\mathfrak{C} \qquad [\gamma \neq 0]$$

gilt, wo jetzt

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist. Es wird

$$\{(\gamma - 1)\,\mathfrak{E} - (\gamma + 1)\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{S}\}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{O};$$

γ ist $\neq -1$, da jedenfalls $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{O}$, wir können also $\frac{1-\gamma}{1+\gamma} = \varkappa$ setzen und bekommen

$$\{\varkappa\,\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}\}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{O}.$$

Die ersten $(n+1)$ Zeilen ergeben folgende Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{n+2} \{\varkappa\,\delta_{\lambda\mu} + \sum_{\nu=1}^{n+2} a_{\lambda\nu}\,m_{\nu\mu}\}\,c_\mu = \varkappa\,c_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n+1} a_{\lambda\mu}\,c_\mu - a_{\lambda,\,n+2} = 0$$

$$a_{\lambda,\,n+2} = \varkappa\,c_\lambda + \sum_{\mu=1}^{n+2} a_{\lambda\mu}\,c_\mu.$$

In die letzte Zeile eingesetzt ergibt das

$$\varkappa - \sum_{\lambda=1}^{n+1} a_{\lambda,\,n+2}\,c_\lambda = \varkappa\{1 - \sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda^2\} - \sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1} a_{\lambda\mu}\,c_\lambda\,c_\mu = \varkappa\{1 - \sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda^2\} = 0.$$

Liegt also der feste Punkt auf der Einheitshyperkugel, so ist $\varkappa$ beliebig; andernfalls

$$\varkappa = 0.$$

Für i von 1 bis $n+1$ erhalten wir nun unter Berücksichtigung von (3)

$$x_i^* - x_i = 2\Big\{\sum_{\lambda=i+1}^{n+1} a_{i\lambda}\{x_\lambda - c_\lambda\,x_{n+2}\} - \sum_{\lambda=1}^{i-1} a_{\lambda i}\{x_\lambda - c_\lambda\,x_{n+2}\} - \varkappa\,c_i\,x_{n+2}\Big\} + \dots$$

und

$$x_{n+2}^* - x_{n+2} = 2\Big\{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=\lambda+1}^{n+1} a_{\lambda\mu}\{c_\lambda\,x_\mu - c_\mu\,x_\lambda\} - \varkappa\sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda\,x_\lambda\Big\} + \dots.$$

Daraus ergeben sich die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$(7)\quad \begin{cases} 1.\quad \delta\,x_i = \{x_k - c_k\,x_{n+2}\}\,\delta\,t, \qquad \delta\,x_k = -\{x_i - c_i\,x_{n+2}\}\,\delta\,t, \\ \qquad\qquad \delta\,x_{n+2} = \{c_i\,x_k - c_k\,x_i\}\,\delta\,t; \\ 2.\quad \delta\,x_j = c_j\,x_{n+2}\,\delta\,t\,[j = 1, \dots, n+1], \quad \delta\,x_{n+2} = \{\sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda\,x_\lambda\}\,\delta\,t. \end{cases}$$

Darin gilt 2. nur, wenn $\sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda^2 = 1$ ist. Die Punkte von M_n sind mit denen der Einheitshyperkugel durch die folgende Formel verknüpft:

$$(8)\quad \xi_j = \frac{x_j}{x_{n+1} + x_{n+2}}$$

$$\delta\,\xi_j = \frac{\delta\,x_j - \xi_j(\delta\,x_{n+1} + \delta\,x_{n+2})}{x_{n+1} + x_{n+2}},$$

wo die ξ inhomogene kartesische Koordinaten in M_n sind. Ist der feste Punkt der „Südpol" selbst, lauten also die Transformationen (7)

1a. $\delta x_i = x_k \delta t, \quad \delta x_k = -x_i \delta t, \quad \delta x_{n+2} = 0, \qquad [1 \leqq i < k \leqq n];$

1b. $\delta x_i = \{x_{n+1} + x_{n+2}\} \delta t, \quad \delta x_{n+1} = -x_i \delta t, \quad \delta x_{n+2} = x_i \delta t,$

$[1 \leqq i \leqq n];$

2. $\delta x_{n+1} = -x_{n+2} \delta t, \quad \delta x_{n+2} = -x_{n+1} \delta t,$

so haben wir es in der entsprechenden Untergruppe der Kreisverwandtschaften mit den Ähnlichkeitstransformationen zu tun. In der Tat bekommen wir in den ξ:

$$1a. \quad \delta \xi_i = +\xi_k \delta t, \quad \delta \xi_k = -\xi_i \delta t;$$

$$1b. \quad \delta \xi_i = \delta t;$$

$$2. \quad \delta \xi_j = \xi_j \delta t.$$

Der Parameter $\varkappa$ liefert dabei die Streckung; da wir nur reine Bewegungen bzw. dazu isomorphe Gruppen untersuchen wollen, so kann also auch im Fall $\sum_{\lambda=1}^{n+1} c_\lambda^2 = 1$ die infinitesimale Transformation (7, 2) wegbleiben.

Die E_{r+1} durch den festen Punkt seien nun gegeben durch

$$(9) \qquad x_\lambda - c_\lambda x_{n+2} = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\mu} (x_\mu - c_\mu x_{n+2}) \quad [\lambda = 1, \ldots, n-r];$$

verfahren wir analog wie bei (5) im § 3, so erhalten wir

I. $1 \leqq i < k \leqq n-r$:

$$\delta q_{i\mu} = \{q_{k\mu} - (c_i q_{k\mu} - c_k q_{i\mu})(c_i - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{i\nu} c_\nu)\} \delta t,$$

$$\delta q_{k\mu} = \{-q_{i\mu} - (c_i q_{k\mu} - c_k q_{i\mu})(c_k - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{k\nu} c_\nu)\} \delta t,$$

$$\delta q_{\lambda\mu} = -(c_i q_{k\mu} - c_k q_{i\mu})(c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu) \delta t.$$

II. $1 \leqq i \leqq n-r < k \leqq n+1$:

$$\delta q_{ik} = \{1 - c_i (c_i - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{i\nu} c_\nu) + q_{ik} \{q_{ik} + c_k (c_i - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{i\nu} c_\nu)\}\} \delta t,$$

$$\delta q_{i\mu} = q_{i\mu} \{q_{ik} + c_k (c_i - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu)\} \delta t,$$

$$\delta q_{\lambda k} = \{-c_i (c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu) + q_{\lambda k} \{q_{ik} + c_k (c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu)\}\} \delta t,$$

$$\delta q_{\lambda\mu} = q_{i\mu} \{q_{\lambda k} + c_k (c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu)\} \delta t.$$

III. $n-r+1 \leqq i < k \leqq n+1$:

$$\delta q_{\lambda i} = \{q_{\lambda k} + c_k (c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu)\}\,\delta t,$$

$$\delta q_{\lambda k} = \{-q_{\lambda i} - c_i (c_\lambda - \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\nu} c_\nu)\}\,\delta t.$$

Definieren wir

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} q_{1,n-r+1} & \cdots & q_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n-r,n-r+1} & \cdots & q_{n-r,n+1} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -q_{1,n-r+1} & \cdots & -q_{1,n+1} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & -q_{n-r,n-r+1} & \cdots & -q_{n-r,n+1} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial q_{1,n-r+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial q_{1,n+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial q_{n-r,n-r+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial q_{n-r,n+1}} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{C}_2 = \begin{pmatrix} c_{n-r+1} \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix},$$

so können wir danach das Gleichungssystem (1) wie folgt schreiben:

I. $$\mathfrak{Q}\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}\mathfrak{Q}' + \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\mathfrak{F}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{F}'\mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1' = (n+1)F\{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2'\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_1'\}.$$

II. $$\mathfrak{Q}\mathfrak{F}'\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\} - \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\mathfrak{F} + \mathfrak{F} + (n+1)F\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\} = \mathfrak{O}.$$

III. $$\mathfrak{F}'\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\} = \{\mathfrak{Q}' + \mathfrak{C}_2\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\}\mathfrak{F}.$$

Mittels III lautet II

$$\{\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'\mathfrak{G}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\}\mathfrak{F} = -(n+1)F\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\}.$$

Es ist

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}' = \mathfrak{G}\mathfrak{G}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{G}\mathfrak{C},$$

mithin

$$\{\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'\}\mathfrak{F} = -(n+1)F\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\}.$$

Um festzustellen, wann $|\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'| = 0$ ist, untersuchen wir wieder die Bedingungen, unter denen die E_{r+1} durch $\mathfrak{C}$ tangential zur Einheits-

hyperkugel sind. Führen wir inhomogene Koordinaten $y_j = \frac{x_j}{x_{n+1}}$ ein und definieren

$$\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix},$$

so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{C}) = \mathfrak{O}$ die Gleichung (9) in Matrizenform. Die Gleichung der Einheitshyperkugel wird $\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$, die Polare eines Punktes $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}.$$

Hat Λ wieder die gleiche Bedeutung wie in § 3, so haben wir

$$\Lambda'\mathfrak{G}\mathfrak{Y} = \Lambda'\mathfrak{G}\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad \Lambda'\mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{P}'\mathfrak{Y} = \Lambda'\mathfrak{G}\mathfrak{C},$$

$$\Lambda'\mathfrak{G} = \Lambda'\mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{P}',$$

$$\mathfrak{G}'\Lambda = \mathfrak{P}\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\Lambda,$$

und da $\mathfrak{P}$ auf E_{r+1} liegen soll, so wird, wenn wir von links mit $\mathfrak{G}$ multiplizieren

$$\{\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'\}\Lambda = \mathfrak{O}.$$

Also existiert Λ dann und nur dann, wenn $|\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'| = 0$ ist. Wir müssen also wieder die tangentialen E_{r+1} ausschließen. Dann wird

$$\mathfrak{F} = -(n+1)F\{\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'\}^{-1}\{\mathfrak{Q} + \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2'\}.$$

Dieses $\mathfrak{F}$ genügt auch der Gleichung I, wie sofort zu sehen ist, wenn wir I

$$\{\mathfrak{E} - \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'\}\{\mathfrak{F}\mathfrak{Q}' + (n+1)F\mathfrak{E}\} = \{\mathfrak{Q}\mathfrak{F}' + (n+1)F\mathfrak{E}\}\{\mathfrak{E} - \mathfrak{G}\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1'\}$$

schreiben. Wir haben nun weiter $\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}' = (h_{ik})$ und

$$h_{ik} = \delta_{ik} - c_i c_k + \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} c_k c_\mu q_{i\mu} + \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} c_i c_\mu q_{k\mu}$$

$$+ \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{i\mu} q_{k\mu} - \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} \sum_{\nu=n-r+1}^{n+1} c_\mu c_\nu q_{i\mu} q_{k\nu} = h_{ki},$$

wo sowohl i wie k von 1 bis $n-r$ läuft. Ist $H_{ik} = H_{ki}$ die Adjungierte von h_{ik} und $|h_{ik}| = H$, so wird

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha\beta}} = 2\sum_{\lambda=1}^{n-r} H_{\alpha\lambda}\left\{c_\beta c_\lambda + q_{\lambda\beta} - c_\beta \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} c_\mu q_{\lambda\mu}\right\}$$

$$= -\frac{2H}{(n+1)F}\frac{\partial F}{\partial q_{\alpha\beta}}.$$

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}'|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{G}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -q_{1,n-r+1} & \dots & -q_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -q_{n-r,n-r+1} & \dots & -q_{n-r,n} \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} -q_{1,n+1} \\ \vdots \\ -q_{n-r,n+1} \end{pmatrix},$$

so wird

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}\mathfrak{G}' - \alpha^2 \mathfrak{R}\mathfrak{R}' = \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_n' + (1-\alpha^2)\mathfrak{R}\mathfrak{R}'.$$

Für $\alpha = -1$ haben wir es in M_n mit den euklidischen Bewegungen zu tun; den E_{r+1} durch den „Südpol" entsprechen in M_n einfach ihre Schnitte mit $x_{n+1} = 0$ — diese sind zugleich die stereographischen Projektionen der Schnitte der Einheitshyperkugel mit den E_{r+1}. Mithin ist die Dichte der durch die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=n-r+1}^{n} q_{\lambda\mu} y_\mu + q_{\lambda,n+1} \qquad [\lambda = 1, \dots, n-r]$$

gegebenen E_r des n-dimensionalen euklidischen Raumes gegenüber euklidischen Bewegungen

$$D = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n-r} \prod_{\mu=n-r+1}^{n+1} dq_{\lambda\mu}}{|\mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_n'|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Sei nun $\alpha \neq \pm 1$ und zugleich $\neq 0$. Dann lautet die Gleichung der Polar-Hyperebene des festen Punktes $y_{n+1} = \frac{1}{\alpha}$; in $y_\lambda = \sum_{\mu=n-r+1}^{n} q_{\lambda\mu} y_\mu + q_{\lambda,n+1}(y_{n+1} - \alpha)$ eingesetzt, ergibt sich als konstantes Glied $\frac{1-\alpha^2}{\alpha} q_{\lambda,n+1}$. Setzen wir

$$\mathfrak{R}^* = \frac{1-\alpha^2}{\alpha}\mathfrak{R},$$

was auch für $\alpha \to \infty$ sinnvoll bleibt, vorausgesetzt, daß gleichzeitig $\mathfrak{R} \to \mathfrak{O}$ geht, so wird

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_n \mathfrak{G}_n' + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\mathfrak{R}^*\mathfrak{R}^{*\prime}.$$

Läuft nun $\alpha \to \infty$ und schreiben wir alsdann statt $\mathfrak{R}^*$ einfach wieder $\mathfrak{R}$, so wird die Dichte der durch die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=n-r+1}^{n} q_{\lambda\mu}\, y_\mu + q_{\lambda, n+1}$$

mit $q_{\lambda, n+1}^2 < 1 + \sum_{\mu=n-r+1}^{n} q_{\lambda\mu}^2$, gegebenen E_r des n-dimensionalen Klein-Lobatschefskijschen hyperpolischen Raumes gegenüber den hyperbolischen Bewegungen

$$D_H = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n-r} \prod_{\mu=n-r+1}^{n+1} d\, q_{\lambda\mu}}{|\mathfrak{G}_n\, \mathfrak{G}_n' - \mathfrak{R}\, \mathfrak{R}'|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Wird schließlich $\alpha = 0$, so haben wir für die Dichte der durch die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=n-r+1}^{n+1} q_{\lambda\mu}\, y_\mu \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n+1} y_j^2 = 1$$

gegebenen r-dimensionalen „Großkreise“ auf der n-dimensionalen Einheitshyperkugel gegenüber den Drehungen der Hyperkugel um ihren Mittelpunkt

$$D_E = \frac{\prod_{\lambda=1}^{n-r} \prod_{\mu=n-r+1}^{n+1} d\, q_{\lambda\mu}}{|\mathfrak{G}_n\, \mathfrak{G}_n' + \mathfrak{R}\, \mathfrak{R}'|^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Statt (9) können wir E_{r+1} auch wieder mit

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} v_{\lambda\mu}\,(x_\mu - c_\mu\, x_{n+2}) = 0 \qquad [\lambda = 1, \ldots, n-r]$$

ansetzen, worin die Matrix $\mathfrak{V}$ der $v_{\lambda\mu}$ selbstverständlich den Höchstrang besitzen soll. Die gleichen Rechnungen wie bisher führen zu den Gleichungen

1. $\mathfrak{F}'\{\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\} = \{\mathfrak{V}' - \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\,\mathfrak{V}'\}\,\mathfrak{F}$,
2. $\mathfrak{F}\,\mathfrak{V}' + (n+1)\,F\,\mathfrak{E} = 0$,

wenn $\mathfrak{F}$ wieder die analoge Bedeutung hat wie bisher. So wird

$$\{\mathfrak{V}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\,\mathfrak{V}'\}\,\mathfrak{F} = -(n+1)\,F\,\mathfrak{V}\,\{\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\}.$$

Da die über $\mathfrak{G}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\,\mathfrak{G}'$ angestellten Betrachtungen von der besonderen Eigenart von $\mathfrak{G}$ unabhängig waren, gelten sie auch hier und wir erhalten

$$\boxed{F = \frac{1}{|\mathfrak{V}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{C}')\,\mathfrak{V}'|^{\frac{n+1}{2}}}}.$$

Alle weiteren obigen Untersuchungen lassen sich ohne weiteres übertragen, wenn wir nur stets $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{V}$ ersetzen, bzw. die Abwandlungen von $\mathfrak{G}$ durch die analogen von $\mathfrak{V}$.

§ 5.

Wir wollen nun gegenüber derjenigen Untergruppe der Möbiusschen Kreisverwandschaften, die den hyperbolischen Bewegungen mit positiver Determinante entsprechen, in M_n die Dichte der Menge aller r-dimensionalen M-Hyperkugeln untersuchen. Diese seien gegeben durch die E_{r+1}, in der sie enthalten sind, und die $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel mit gleichem Mittelpunkt und Radius. Wir haben also insgesamt

$$(n-r-1)(r+1)+n+1=(n-r)(r+2)$$

eindeutig festgelegte Bestimmungsstücke. Die Gleichungen lauten

$$\xi_\lambda - p_\lambda = \sum_{\mu=n-r}^{n} q_{\lambda\mu}(\xi_\mu - p_\mu) \quad [\lambda = 1, \ldots, n-r-1]$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - p_j)^2 = R^2.$$

Die Transformationen (4, 1) lauten, wenn $\mathfrak{M}$ den Wert von Seite 114 hat,

1. $\delta x_i = x_k \delta t, \qquad \delta x_k = -x_i \delta t \quad [1 \leqq i < k \leqq n+1].$
2. $\delta x_i = x_{n+2}\delta t, \quad \delta x_{n+2} = x_i \delta t \qquad [1 \leqq i \leqq n+1].$

Nach (8) ergibt das in den ξ

$$\left.\begin{array}{ll}
1\,\text{a}. & \delta\xi_i = \xi_k \delta t, \quad \delta\xi_k = -\xi_i \delta t \\
1\,\text{b}. & \delta\xi_i = \tfrac{1}{2}\{1 + 2\xi_i^2 - \sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\}\delta t, \\
 & \delta\xi_j = \xi_i \xi_j \delta t; \\
2\,\text{a}. & \delta\xi_i = \tfrac{1}{2}\{1 - 2\xi_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\}\delta t, \\
 & \delta\xi_j = -\xi_i \xi_j \delta t; \\
2\,\text{b}. & \delta\xi_j = \xi_j \delta t.
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} [1 \leqq i \leqq k \leqq n]; \\ \\ [i = 1, \ldots, n], \end{array}$$

Diese Transformationen übertragen sich nun auf die p, q und R wie folgt:

1 a, α. $1 \leqq i < k \leqq n-r-1$:

$$\delta q_{i\mu} = q_{k\mu}\delta t, \quad \delta q_{k\mu} = -q_{i\mu}\delta t;$$
$$\delta p_i = p_k \delta t, \quad \delta p_k = -p_i \delta t, \quad \delta R = 0.$$

1 a, ϱ. $1 \leqq i \leqq n-r-1 < k \leqq n$:

$$\delta q_{ik} = (1+q_{ik}^2)\delta t, \quad \delta q_{\lambda\mu} = q_{i\mu}q_{\lambda k}\delta t; \quad (\lambda, \mu \neq i, k)$$
$$\delta p_i = p_k \delta t, \quad \delta p_k = -p_i \delta t, \quad \delta R = 0.$$

1 a, γ. $n-r \leqq i < k \leqq n$:

$$\delta q_{\lambda i} = q_{\lambda k}\delta t, \quad \delta q_{\lambda k} = -q_{\lambda i}\delta t;$$
$$\delta p_i = p_k \delta t, \quad \delta p_k = -p_i \delta t; \quad \delta R = 0.$$

1 b, α. $1 \leqq i \leqq n-r-1$:

$$\delta q_{i\mu} = \{-p_\mu - \sum_{\lambda=1}^{n-r-1} q_{\lambda\mu} p_\lambda + q_{i\mu}(p_i - \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{i\nu} p_\nu)\}\,\delta t,$$

$$\underset{\lambda \neq i}{\delta q_{\lambda\mu}} = q_{i\mu}(p_\lambda - \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{\lambda\nu} p_\nu)\,\delta t;$$

$$\delta p_i = \{\tfrac{1}{2}\{1 + R^2 + 2p_i^2 - \sum_{j=1}^{n} p_j^2\} + \eta_i\}\,\delta t,$$

$$\underset{j \neq i}{\delta p_j} = \{p_i p_j + \eta_j\}\,\delta t; \quad \delta R = p_i R\,\delta t.$$

Darin sind die η Größen, welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$\eta_i = \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{i\nu}\eta_\nu - R^2, \quad \eta_\lambda = \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{\lambda\nu}\eta_\nu \qquad [\lambda \neq i],$$

$$\eta_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n-r-1} \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{\lambda\mu} q_{\lambda\nu}\eta_\nu = q_{i\mu} R^2.$$

Definieren wir eine Matrix Q analog Seite 110, unter Ersetzung von n durch $(n-1)$, so ist die Matrix des vorstehenden Gleichungssystems für die $\eta_{n-r}, \ldots, \eta_n$

$$Q'Q.$$

Setzen wir $Q' = (\alpha_{ik})$, wo $i = 1, \ldots, r+1$; $k = 1, \ldots, n$ und $r+1 \leqq n$ gilt, so wird

$$|Q'Q| = |\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{kj}| = \sum_{V_{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_{1,j_1} & \alpha_{1,j_2} & \ldots & \alpha_{1,j_{r+1}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{r+1,j_1} & & \ldots & \alpha_{r+1,j_{r+1}} \end{vmatrix} \prod_{\mu=1}^{r+1} \alpha_{\mu,j_\mu},$$

wo $\sum_{V_{r+1}}$ bedeuten soll, daß die Summe über alle Variationen ohne Wiederholung der $(r+1)$-ten Klasse in j zu nehmen ist. Bedeutet $\sum_{K_{r+1}}$ das entsprechende für die Kombinationen der $(r+1)$-ten Klasse, bzw. $\sum_{P}$ die Summe über alle Permutationen der $(r+1)$ Elemente $j_1, \ldots, j_{r+1}$, so wird weiter

$$(10)\quad |Q'Q| = \sum_{K_{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_{1,j_1} & \ldots & \alpha_{1,j_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r+1,j_1} & \ldots & \alpha_{r+1,j_{r+1}} \end{vmatrix} \sum_{P} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r+1 \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_{r+1} \end{pmatrix} \alpha_{1,j_1}\alpha_{2,j_2}\ldots\alpha_{r+1,j_{r+1}}$$

$$= \sum_{K_{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_{1,j_1} & \ldots & \alpha_{1,j_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r+1,j_1} & \ldots & \alpha_{r+1,j_{r+1}} \end{vmatrix}^2.$$

Im vorliegenden Falle haben wir danach $|Q'Q| = 1 + \sum_{\mu=1}^{r+1} \{\Sigma D_\mu^2\}$, wo ΣD_μ die Summe aller μ-reihigen Determinanten bedeuten soll, die sich aus der Matrix $\mathfrak{Q}$ bilden lassen, wenn auch $\mathfrak{Q}$ wieder, unter Ersetzung von n durch $(n-1)$, die gleiche Bedeutung haben soll wie auf Seite 110. Also ist in jedem Falle $|Q'Q| \neq 0$, und die η sind eindeutig bestimmbar, und zwar unabhängig von den p.

1b, β. $n - r \leqq i \leqq n$:

$$\delta q_{\lambda i} = \{p_\lambda - \sum_{\mu=n-r}^{n} q_{\lambda\mu} p_\mu + q_{\lambda i}(p_i + \sum_{j=1}^{n-r-1} q_{ji} p_j)\}\,\delta t,$$

$$\underset{\mu \neq i}{\delta q_{\lambda\mu}} = q_{\lambda i}(p_\mu + \sum_{j=1}^{n-r-1} q_{j\mu} p_j)\,\delta t;$$

$$\delta p_i = \{\tfrac{1}{2}(1 + R^2 + 2p_i^2 - \sum_{j=1}^{n} p_j^2) + \zeta_i\}\,\delta t,$$

$$\underset{j \neq i}{\delta p_j} = \{p_i p_j + \zeta_j\}\,\delta t, \quad \delta R = p_i R\,\delta t,$$

wo die ζ den folgenden Gleichungen gehorchen:

$$\zeta_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n-r-1} q_{\lambda\mu}\zeta_\lambda = 0$$

und

$$\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{n-r-1} \sum_{\mu=n-r}^{n} q_{\lambda\mu} q_{j\mu} \zeta_j = q_{\lambda i} R^2.$$

Hat $\mathfrak{G}$ die gleiche Bedeutung wie Seite 116, nur unter Ersetzung von n durch $(n-1)$, so lautet die Determinante des Gleichungssystems für die $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-r-1}$

$$|\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'| = |Q'Q| = 1 + \sum_{\mu=1}^{r+1} \{\Sigma D_\mu^2\} \neq 0.$$

Auch die ζ sind also eindeutig zu bestimmen und unabhängig von den p.

2a, α. $1 \leqq i \leqq n - r - 1$:

$$\delta q_{i\mu} = \{p_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n-r-1} q_{\lambda\mu} p_\mu - q_{i\mu}(p_i - \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{i\nu} p_\nu)\}\,\delta t,$$

$$\underset{\lambda \neq i}{\delta q_{\lambda\mu}} = -\,q_{i\mu}(p_\lambda - \sum_{\nu=n-r}^{n} q_{\lambda\nu} p_\nu)\,\delta t;$$

$$\delta p_i = \{\tfrac{1}{2}(1 - R^2 - 2p_i^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2) - \eta_i\}\,\delta t,$$

$$\underset{j \neq i}{\delta p_j} = -\,\{p_i p_j + \eta_j\}\,\delta t, \quad \delta R = -\,p_i R\,\delta t.$$

2a, β. $n-r \leqq i \leqq n$:

$$\delta q_{\lambda i} = \{-p_\lambda + \sum_{\mu=n-r}^{n} q_{\lambda\mu} p_\mu - q_{\lambda i}(p_i + \sum_{j=1}^{n-r-1} p_j q_{ji})\}\,\delta t,$$

$$\underset{\mu \neq i}{\delta q_{\lambda\mu}} = -q_{\lambda i}(p_\mu + \sum_{j=1}^{n-r-1} q_{j\mu} p_j)\,\delta t;$$

$$\delta p_i = \{\tfrac{1}{2}(1 - R^2 - 2p_i^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2) - \zeta_i\}\,\delta t,$$

$$\underset{j \neq i}{\delta p_j} = -\{p_i p_j + \zeta_j\}\,\delta t, \quad \delta R = -p_i R\,\delta t.$$

2b. $\delta p_j = p_j\,\delta t; \quad \delta R = R\,\delta t; \quad \delta q_{\lambda\mu} = 0.$

Das ergibt nach (1) die folgenden Gleichungen:

1a, α. $$\sum_{\mu=n-r}^{n} \left\{q_{k\mu}\frac{\partial F}{\partial q_{i\mu}} - q_{i\mu}\frac{\partial F}{\partial q_{k\mu}}\right\} + p_k\frac{\partial F}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial F}{\partial p_k} = 0.$$

1a, β. $$\frac{\partial F}{\partial q_{ik}} + \sum_{\lambda=1}^{n-r-1}\sum_{\mu=n-r}^{n} q_{i\mu}q_{\lambda k}\frac{\partial F}{\partial q_{\lambda\mu}} + p_k\frac{\partial F}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial F}{\partial p_k} + n q_{ik} F = 0.$$

1a, γ. $$\sum_{\lambda=1}^{n-r-1}\left\{q_{\lambda k}\frac{\partial F}{\partial q_{\lambda i}} - q_{\lambda i}\frac{\partial F}{\partial q_{\lambda k}}\right\} + p_k\frac{\partial F}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial F}{\partial p_k} = 0.$$

2b. $$\sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\partial F}{\partial p_j} + R\frac{\partial F}{\partial R} + (n+1)F = 0.$$

Addieren wir 1b, α und 2a, α, bzw. 1b, β und 2a, β, so ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0,$$

eine Lösung, die auch die vier Gleichungsarten jede für sich befriedigt; denn unter Benutzung der Gleichungen zu 1a und 2b lassen sich schreiben

1b, α: $$\left\{1 + R^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2\right\}\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2\sum_{j=1}^{n}\{p_i p_j - \eta_j\}\frac{\partial F}{\partial p_j};$$

1b, β: $$\left\{1 + R^2 + \sum_{j=1}^{n} p_j^2\right\}\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2\sum_{j=1}^{n}\{p_i p_j - \zeta_i\}\frac{\partial F}{\partial p_j}.$$

Wenn $\mathfrak{F}$ die analoge Bedeutung wie bisher hat, lassen sich alsdann die Gleichungen zu 1a schreiben:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}\mathfrak{F}' = \mathfrak{O}; \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{F}'\mathfrak{Q} + \mathfrak{F} + nF\mathfrak{Q} = \mathfrak{O}; \quad \mathfrak{F}'\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{F} = \mathfrak{O}.$$

Die mittlere Gleichung lautet mit Hilfe der letzten

$$\{\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'\}\mathfrak{F} = -nF\mathfrak{Q}.$$

Wie oben gezeigt wurde, ist $|\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'| = |\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'|$ stets ungleich Null, daher

$$\mathfrak{F} = -nF\,\{\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}\}^{-1}\,\mathfrak{Q},$$

eine Lösung, die auch die erste Gleichung befriedigt. Folglich

$$F = \frac{\Phi(R)}{|\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'|^{\frac{n}{2}}}.$$

Die Gleichung 2b. liefert für $\Phi(R)$: $R\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,R} + (n+1)\,\Phi = 0$, also

$$\boxed{F = \frac{1}{R^{n+1}\,|\mathfrak{E} + \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'|^{\frac{n}{2}}}}.$$

Ist $r = n - 1$, so sind gar keine q vorhanden, und es wird die Dichte der M-„Kugeln" in M_n

$$D = \frac{d\,R\,\prod_{j=1}^{n} dp_j}{R^{n+1}}.$$

(Eingegangen am 8. Juni 1936).

Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Erste Mitteilung:

Additions- und Multiplikationstheoreme.

Von

Artur Erdélyi in Brünn.

In der Theorie der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome, der Besselschen Funktionen und anderer Sonderfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktionen wurde öfter die Methode der Funktionaltransformationen mit großem Erfolg angewendet. Die dabei erzielten Ergebnisse sind teils theoretisch von einem gewissen Interesse, teils bilden sie für die Anwendungen wichtige Formeln und Sätze. Mit Rücksicht darauf, daß nicht nur die erwähnten Sonderfälle, sondern auch die allgemeinen, von zwei Parametern abhängigen konfluenten hypergeometrischen Funktionen $M_{k,m}(t)$ und $W_{k,m}(t)$ in den verschiedensten Zweigen der Analysis und auch in den Anwendungen eine nicht unbedeutende Rolle spielen, sollen in einer Reihe von Arbeiten mit Hilfe der Laplace-Transformation einige Funktionalbeziehungen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen abgeleitet werden. Durch besondere Wahl der Parameter k und m ergibt sich aus den allgemeinen eine große Anzahl speziellerer Funktionalrelationen, die wir in der Regel aus Raumrücksichten nicht gesondert anschreiben werden. Viele dieser Sonderfälle waren schon früher bekannt, was wir bei einigen ausdrücklich vermerken werden, ohne dabei Vollständigkeit anzustreben.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst in § 1 einige im folgenden oft gebrauchte Formeln betreffend die Erklärungen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen und ihre Sonderfälle zusammengestellt; in § 2 werden die Laplace-Transformierten aller dieser Funktionen bestimmt, hierauf mit deren Hilfe in den §§ 3 bis 6 ein transzendentes Additionstheorem (vom Faltungstypus) für die Parameter und ein entsprechend gebautes für das Argument, sowie zwei auf das Argument bezügliche Multiplikationstheoreme abgeleitet.

Die Ableitung der Additionstheoreme erfolgt, ebenso wie die Ableitung der entsprechenden Additionstheoreme für die Hermiteschen Polynome (also einem Sonderfalle der hier aufgestellten allgemeineren) in einer

Arbeit von Doetsch[1]), auf Grund des Faltungssatzes. Bei der Ableitung der Multiplikationstheoreme wird die Methode der Reihenentwicklungen angewendet, d. h. es wird die Laplace-Transformierte der entsprechenden Funktion in elementarer Weise in eine Reihe entwickelt, deren einzelne Glieder dann als Laplace-Transformierte gewisser Funktionen interpretiert werden[2]).

Mit Hilfe derselben Methode können auch Produkte von konfluenten hypergeometrischen Funktionen untersucht werden, da die Laplace-Transformierte auch für ein Produkt beliebig vieler M-Funktionen berechnet wurde[3]), doch möchten wir auf diese Frage erst in einer späteren Mitteilung näher eingehen.

§ 1.

Die konfluenten hypergeometrischen Funktionen und ihre Sonderfälle.

Die von Whittaker eingeführten Funktionen $M_{k,m}(t)$ und $W_{k,m}(t)$ können durch folgende Gleichungen erklärt werden[4]):

$$(1,1) \qquad M_{k,m}(t) = t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} {}_1F_1(m+\tfrac{1}{2}-k;\ 2m+1;\ t),$$

$$(1,2) \qquad W_{k,m}(t) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)} M_{k,m}(t) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} M_{k,-m}(t),$$

wobei in der üblichen Pochhammer-Barnesschen Bezeichnungsweise

$$(1,3) \qquad {}_1F_1(a;\ \varrho;\ z) = 1 + \frac{a}{1!\,\varrho} z + \frac{a(a+1)}{2!\,\varrho(\varrho+1)} z^2 + \cdots$$

einen von Kummer untersuchten Grenzfall der Gaußschen hypergeometrischen Reihe bedeutet. Diese Reihe konvergiert für alle endlichen Werte von z und stellt also eine ganze transzendente Funktion von z dar. Um eine einfachere Schreibweise zu erzielen, erklären wir noch die Funktion $N_{k,m}(t)$ mittels der Gleichung

$$(1,4) \quad N_{k,m}(t) = \frac{t^{m-\frac{1}{2}} M_{k,m}(t)}{\Gamma(2m+1)} = \frac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)} {}_1F_1(m+\tfrac{1}{2}-k;\ 2m+1;\ t).$$

---

[1]) [3]. Die in eckige Klammern gesetzten Ziffern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Aufsatzes.

[2]) Das erste Additionstheorem und die beiden Multiplikationstheoreme können auch durch „Übertragung" gewisser bekannter Beziehungen aus der Theorie der Besselschen Funktionen gewonnen werden. Vgl. auch [5].

[3]) Vgl. [4].

[4]) Vgl. [13], § 16, 1 und § 16, 41.

st $2m$ eine ganze Zahl n, so versagt (1, 2), doch kann man die W-Funktion für diesen Fall durch den stets existierenden Grenzwert

$$W_{k,\frac{n}{2}}(t) = \lim_{m \to \frac{n}{2}} W_{k,m}(t)$$

rklären. Ist insbesondere $2m$ eine negative ganze Zahl, so verliert auch lie Definition der M-Funktion ihren Sinn, doch existiert die Funktion $V_{k,-\frac{n}{2}}(t)$ und es ist, wie man aus (1, 4) leicht ersieht

(1, 5) $$N_{k,-\frac{n}{2}}(t) = \lim_{m \to -\frac{n}{2}} N_{k,m}(t)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-k\right)} t^{-n} N_{k,\frac{n}{2}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-k\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-k\right)} t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} M_{k,\frac{n}{2}}(t),$$

worin wie im folgenden stets n eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet. Wir werden noch gelegentlich von der Kummerschen Formel [5])

(1, 6) $$M_{k,m}(t\,e^{\pm\pi i}) = e^{\pm(m+\frac{1}{2})\pi i} M_{-k,m}(t),$$

bzw. von der entsprechenden Formel für die N-Funktionen

(1, 7) $$N_{k,m}(t\,e^{\pm\pi i}) = e^{\pm 2m\pi i} N_{-k,m}(t)$$

Gebrauch machen.

Ist $\frac{1}{2}+m-k$ eine negative ganze Zahl oder Null, so bricht die hypergeometrische Reihe in (1, 1) bzw. (1, 4) ab. Ist insbesondere $k = \pm(m+\frac{1}{2})$, so erhalten wir aus (1, 1) bzw. (1, 4) und (1, 6) bzw. (1, 7)

(1, 8)
$$\begin{cases} M_{m+\frac{1}{2},m}(t) = t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t}, \quad N_{m+\frac{1}{2},m}(t) = \dfrac{t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)}, \\ M_{-m-\frac{1}{2},m}(t) = t^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}t}, \quad N_{-m-\frac{1}{2},m}(t) = \dfrac{t^{2m} e^{\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+1)}. \end{cases}$$

Für $k = \pm(m+\frac{1}{2}+n)$ stellt die abbrechende Kummersche Reihe im wesentlichen ein verallgemeinertes Laguerresches Polynom dar [6]) und es ist

(1, 9)
$$\begin{cases} N_{m+\frac{1}{2}+n,m}(t) = \dfrac{n!\,t^{2m} e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(t), \\ N_{-m-\frac{1}{2}-n,m}(t) = \dfrac{n!\,t^{2m} e^{\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(-t). \end{cases}$$

Die Laguerreschen Polynome lassen sich aber auch durch die W-Funktionen ausdrücken. Da für $k = m+\frac{1}{2}+n$ der Nenner des zweiten

[5]) [13], § 16, 11.
[6]) Vgl. z. B. [4] S. 699, ferner [6].

Gliedes auf der rechten Seite von (1, 2) unendlich groß wird, so ist

$$W_{m+\frac{1}{2}+n,\,m}(t) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(-2m-n)} M_{m+\frac{1}{2}+n,\,m}(t)$$

und hieraus folgt, da auf Grund des Ergänzungssatzes der Γ-Funktion[7])

$$\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(-2m-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(2m+n+1)}{\Gamma(2m+1)}$$

ist, unter Zuhilfenahme von (1, 9) und (1, 4)

$$W_{m+\frac{1}{2}+n,\,m}(t) = (-1)^n t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} L_n^{(2m)}(t).$$

Setzen wir außerdem noch $m = -\frac{1}{4}$ bzw. $m = \frac{1}{4}$, so erhalten wir M-Funktionen, die mit den Hermiteschen Polynomen $H_n(t)$ in folgender Weise zusammenhängen[8]):

$$(1,10)\qquad \begin{cases} M_{n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}(t) = (-1)^n \dfrac{n!}{(2n)!} t^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t} H_{2n}(\sqrt{t}), \\ M_{n+\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}}(t) = (-1)^{n+1} \dfrac{n!}{2\cdot(2n+1)!} t^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t} H_{2n+1}(\sqrt{t}). \end{cases}$$

Für $m = -\frac{1}{4}$ und $k = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}$ (ν beliebig) erhalten wir W-Funktionen die mit den bekannten Funktionen des parabolischen Zylinders $D_\nu(t)$ in folgender Weise zusammenhängen[9]):

$$(1,11)\qquad W_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}(t) = 2^{-\frac{\nu}{2}} t^{\frac{1}{4}} D_\nu(\sqrt{2t}).$$

Ist insbesondere ν eine gerade bzw. ungerade nichtnegative ganze Zahl, so reduziert sich die W-Funktion auf eine M-Funktion, da alsdann wegen des unendlich werdenden Nenners auf der rechten Seite von (1, 2) das zweite bzw. erste Glied verschwindet, so daß wir folgende Beziehungen erhalten:

$$(1,12)\qquad \begin{cases} M_{n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}(t) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2^{-n} t^{\frac{1}{4}} D_{2n}(\sqrt{2t}), \\ M_{n+\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}}(t) = \dfrac{\Gamma(-\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} 2^{-n-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}} D_{2n+1}(\sqrt{2t}). \end{cases}$$

Durch Vergleichen dieser Beziehungen mit (1, 10) wird der bekannte Zusammenhang zwischen den Funktionen des parabolischen Zylinders mit einem ganzzahligen Index und den Hermiteschen Polynomen sofort ersichtlich.

---

[7]) Vgl. z. B. [13], § 12, 14.
[8]) Vgl. z. B. [4], S. 697.
[9]) [13], § 16, 5.

Auf eine andere Gruppe wohlbekannter Funktionen, nämlich auf die Zylinderfunktionen, führt der Sonderfall $k = 0$. Es ist bekanntlich[10])

$$(1,13)\quad \begin{cases} M_{0,m}(t) = 2^{2m} e^{-\frac{m\pi}{2} i}\, \Gamma(m+1)\, t^{\frac{1}{2}}\, J_m\left(\frac{t}{2}\, e^{\frac{\pi}{2} i}\right), \\ W_{0,m}(t) = \frac{1}{2} e^{(m+1)\frac{\pi}{2} i} \sqrt{\pi t}\, H_m^{(1)}\left(\frac{t}{2}\, e^{\frac{\pi}{2} i}\right), \end{cases}$$

wobei $J_m(w)$ bzw. $H_m^{(1)}(w)$ die Besselsche Funktion bzw. Hankelsche Zylinderfunktion erster Art mit dem Argumente w und dem Index m bedeuten. Aus dieser Beziehung und aus dem Zusammenhang zwischen W-Funktionen und Laguerreschen Polynomen geht ein bemerkenswerter, in der Literatur unseres Wissens noch nicht vermerkter Zusammenhang zwischen gewissen Zylinderfunktionen und Laguerreschen Polynomen hervor. Bekanntlich sind für $m = \pm(n + \frac{1}{2})$ die Zylinderfunktionen als Produkte von trigonometrischen bzw. Exponentialfunktionen und gewissen Polynomen darstellbar („Poissonsche Zylinderfunktionen"). *Diese Polynome nun sind im wesentlichen Laguerresche Polynome* bzw. Linearkombinationen aus solchen. Für $k = 0$, $m = -n - \frac{1}{2}$ erhalten wir nämlich aus der früher abgeleiteten Beziehung zwischen den W-Funktionen und den Laguerreschen Polynomen einerseits und (1, 13) andererseits

$$\begin{aligned} W_{0,-n-\frac{1}{2}}(t) &= (-1)^n n!\, t^{-n}\, e^{-\frac{1}{2}t} L_n^{(-2n-1)}(t) \\ &= e^{-i\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi t}}{2}\, H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\, e^{\frac{\pi}{2} i}\right), \end{aligned}$$

woraus mit $t = -2zi$

$$(1,14)\qquad H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, n!\, (2z)^{-n-\frac{1}{2}}\, e^{iz} L_n^{(-2n-1)}(-2zi)$$

folgt. Auf Grund bekannter Beziehungen aus der Theorie der Zylinderfunktionen erhalten wir hieraus für die Hankelschen Zylinderfunktionen

$$(1,15)\quad \begin{cases} H^{(2)}_{-n-\frac{1}{2}}(z) = e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi i}\, H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z\, e^{\pi i}) \\ \qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, n!\, (2z)^{-n-\frac{1}{2}}\, e^{-iz} L_n^{(-2n-1)}(2zi), \\ H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z) = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\, H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z) \\ \qquad\qquad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, n!\, (2z\, e^{\pi i})^{-n-\frac{1}{2}}\, e^{iz} L_n^{(-2n-1)}(-2zi), \\ H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z) = -H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z \cdot e^{\pi i}) \\ \qquad\qquad = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, n!\, (2z\, e^{\pi i})^{-n-\frac{1}{2}}\, e^{-iz} L_n^{(-2n-1)}(2zi), \end{cases}$$

[10]) Vgl, z. B. [13], § 17, 212 und [7] Gleichung (17).

und für die Besselschen Funktionen

$$(1,16)\quad \begin{cases} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\,[H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z) + H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(z)] \\ \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, n!\,(2\,z\,e^{\pi i})^{-n-\frac{1}{2}}\,[e^{iz}\,L_n^{(-2n-1)}(-2\,z\,i) \\ \qquad\qquad - e^{-iz}\,L_n^{(-2n-1)}(2\,z\,i)], \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2}\,[H^{(1)}_{-n-\frac{1}{2}}(z) + H^{(2)}_{-n-\frac{1}{2}}(z)] \\ \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, n!\,(2\,z)^{-n-\frac{1}{2}}\,[e^{iz}\,L_n^{(-2n-1)}(-2\,z\,i) \\ \qquad\qquad + e^{-iz}\,L_n^{(-2n-1)}(2\,z\,i)]. \end{cases}$$

Von den vielen anderen auf bekannte Funktionen führenden Sonderfällen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen wollen wir nur noch die von Bateman[11]) untersuchten k-Funktionen erwähnen, die für $m = \frac{1}{2}$ aus den W-Funktionen entstehen. Es ist nämlich

$$(1,17)\qquad W_{\nu,\frac{1}{2}}(t) = \Gamma(\nu+1)\,k_{2\nu}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ist ν eine ganze Zahl, so reduziert sich die W-Funktion auf eine M-Funktion und wir haben

$$(1,18)\qquad M_{n,\frac{1}{2}}(t) = (-1)^{n-1}\,k_{2n}\left(\frac{t}{2}\right).$$

§ 2.

Die Laplace-Transformierte der konfluenten hypergeometrischen Funktionen und ihrer Sonderfälle.

Die Laplace-Transformierte einer Funktion $F(t)$, oder die zur „Oberfunktion" $F(t)$ gehörende „Unterfunktion" $f(s)$ wird durch die Gleichung

$$f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}\,F(t)\,dt$$

erklärt. Die Beziehung zwischen Ober- und Unterfunktion wollen wir gelegentlich auch durch die Gleichung

$$F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$$

zum Ausdruck bringen. Aus dieser Definition folgen unmittelbar die beiden Rechenregeln

$$f\left(\frac{s}{c}\right) = c\,\mathfrak{L}\{F(c\,t)\},\quad f(s+c) = \mathfrak{L}\{e^{-ct}F(t)\}.$$

Wir werden noch folgenden „Faltungssatz" verwenden: Die zu einem Produkt zweier Unterfunktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ gehörende Oberfunktion ist die als

$$F_1 * F_2(t) \equiv \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau$$

---

[11]) [1].

definierte „Faltung" der zu $f_1(s)$ und $f_2(s)$ gehörenden Oberfunktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ vorausgesetzt, daß die Laplace-Integrale für $F_1(t)$ und $F_2(t)$ absolut konvergieren[12]). In Zeichen:

$$f_1(s) f_2(s) = \mathfrak{L}\{F_1(t)\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2(t)\} = \mathfrak{L}\{F_1 * F_2(t)\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir sofort daran gehen, die Laplace-Transformierte der mit einer Potenz und einer Exponentialfunktion multiplizierten M-Funktion nach einer früher abgeleiteten Formel[13]) zu berechnen, in welcher wir (im Sinne der a. a. O. verwendeten Bezeichnungen) $n = 1$ setzen müssen, wodurch die in der angeführten Formel auftretende Lauricellasche hypergeometrische Reihe sich auf eine gewöhnliche hypergeometrische Reihe reduziert. Wir erhalten so unter Berücksichtigung der a. a. O. gemachten Bemerkungen

$$(2,1) \qquad \mathfrak{L}\{t^q e^{\lambda t} M_{k,m}(\alpha t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-\lambda)t} M_{k,m}(\alpha t)\, t^q\, dt$$

$$= \alpha^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(q+m+\tfrac{3}{2}\right)\left(s-\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^{-q-m-\frac{3}{2}}$$

$$\cdot F\left(q+m+\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2}+m-k;\ 2m+1;\ \frac{\alpha}{s-\lambda+\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$(2,2) \qquad \text{für} \quad q+m+\tfrac{3}{2} > 0 \quad \text{und} \quad s > \lambda \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Durch entsprechende Wahl des bisher nur durch die Bedingung (2, 2) eingeschränkten, im übrigen aber ganz willkürlichen Parameters q läßt sich eine bedeutende Vereinfachung der Gleichung (2, 1) erzielen. Wählen wir nämlich insbesondere $q = m - \frac{1}{2}$, so geht wegen[14])

$$F(2m+1,\ \tfrac{1}{2}+m-k;\ 2m+1;\ z) = (1-z)^{k-m-\frac{1}{2}}.$$

Gleichung (2, 1) über in

$$(2,3) \qquad \mathfrak{L}\{t^{m-\frac{1}{2}} e^{\lambda t} M_{k,m}(\alpha t)\} = \alpha^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(2m+1) \frac{\left(s-\lambda-\frac{\alpha}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s-\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}$$[15])

---

[12]) Wegen der Gültigkeitsgrenzen des Faltungssatzes und gewisser Verallgemeinerungen siehe [2].

[13]) [4] Gleichung (1).

[14]) [13] § 14, 1.

[15]) Aus (2, 3) geht ein sehr einfacher Beweis der in § 1 angeführten Kummerschen Formel hervor. Es ist nämlich

$$\mathfrak{L}\{t^{m-\frac{1}{2}} M_{k,m}(t e^{\pm \pi i})\} = e^{\pm(m+\frac{1}{2})\pi i} \Gamma(2m+1) \frac{(s+\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s-\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{\pm(m+\frac{1}{2})\pi i} \Gamma(2m+1) \frac{(s-\frac{1}{2})^{-k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{-k+m+\frac{1}{2}}} = e^{\pm(m+\frac{1}{2})\pi i} \mathfrak{L}\{t^{m-\frac{1}{2}} M_{-k,m}(t)\}$$

und der Übergang zu den Oberfunktionen liefert gerade die Kummersche Formel.

und insbesondere für $\alpha = 1$ und $\lambda = 0$ in

$$(2,4) \qquad \mathfrak{L}\left\{\frac{t^{m-\frac{1}{2}} M_{k,m}(t)}{\Gamma(2m+1)}\right\} = \mathfrak{L}\{N_{k,m}(t)\} = \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}.$$

Beide Gleichungen gelten unter den Bedingungen

$$(2,5) \qquad 2m+1 > 0$$

und den entsprechenden aus (2, 2) hervorgehenden für s.

Um die zur W-Funktion gehörende Unterfunktion zu finden, gehen wir von (1, 2) aus und finden zunächst unter Anwendung von (2, 1)

$$\mathfrak{L}\{t^q e^{\lambda t} W_{k,m}(\alpha t)\}$$

$$= \frac{\alpha^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)}\Gamma(q+m+\tfrac{3}{2})\left(s-\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^{-q-m-\frac{3}{2}}$$
$$F\left(q+m+\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2}+m-k;\ 2m+1;\ \frac{\alpha}{s-\lambda+\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$+\frac{\alpha^{-m+\frac{1}{2}}\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}\Gamma(q-m+\tfrac{3}{2})\left(s-\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^{-q+m-\frac{3}{2}}$$
$$F\left(q-m+\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2}-m-k;\ -2m+1;\ \frac{\alpha}{s-\lambda+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Unter Zuhilfenahme folgender Transformationsformel der hypergeometrischen Reihe[16])

$$\frac{1}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b-c+1;1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b;\ c-a-b+1;\ 1-z)$$

erhalten wir daraus mit

$$a = q+m+\tfrac{3}{2},\quad b = \tfrac{1}{2}+m-k,\quad c = q-k+2,\quad z = \frac{s-\lambda-\frac{\alpha}{2}}{s-\lambda+\frac{\alpha}{2}}$$

die für

$$(2,6) \qquad q \pm m + \tfrac{3}{2} > 0, \qquad s > \lambda \pm \frac{\alpha}{2}$$

gültige Laplace-Transformierte der W-Funktion

$$(2,7) \qquad \mathfrak{L}\{t^q e^{\lambda t} W_{k,m}(\alpha t)\}$$
$$= \frac{\Gamma(q+m+\frac{3}{2})\Gamma(q-m+\frac{3}{2})\alpha^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(q-k+2)\left(s-\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)^{q+m+\frac{3}{2}}}$$
$$\cdot F\left(q+m+\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2}+m-k;\ q-k+2;\ \frac{s-\lambda-\frac{\alpha}{2}}{s-\lambda+\frac{\alpha}{2}}\right).$$

[16]) [13] § 14, 53.

Mit Hilfe bekannter Transformationsformeln der hypergeometrischen Reihe kann man leicht zeigen, daß die rechte Seite von (2, 7) sich nicht ändert, wenn man m durch $-m$ ersetzt, wie es auch sein muß, da die Funktion $W_{k,m}(t)$ dieselbe Eigenschaft aufweist.

Wir wollen nun noch die zu einigen Sonderfällen der M-Funktionen gehörenden Unterfunktionen angeben. Für die Laguerreschen Polynome erhalten wir aus (2, 4) unter Heranziehung von (1, 9) die bereits bekannte Beziehung [17])

$$\mathfrak{L}\{t^{2m} e^{\lambda t} L_n^{(2m)}(\alpha t)\} = \frac{\Gamma(2m+n+1)}{n!} \frac{(s-\lambda-\alpha)^n}{(s-\lambda)^{n+2m+1}} \tag{2, 8}$$

für $$2m+1 > 0,$$

für die Hermiteschen Polynome aus (1, 10) und (2, 4) in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen von Doetsch [18])

$$\begin{cases} \mathfrak{L}\{t^{-\frac{1}{2}} H_{2n}(\sqrt{t})\} = (-1)^n \sqrt{\pi} \dfrac{(2n)!}{n!} \dfrac{(s-1)^n}{s^{n+\frac{1}{2}}}, \\ \mathfrak{L}\{H_{2n+1}(\sqrt{t})\} = (-1)^{n+1} \sqrt{\pi} \dfrac{(2n+1)!}{n!} \dfrac{(s-1)^n}{s^{n+\frac{3}{2}}}, \end{cases} \tag{2, 9}$$

für die mit den Hermiteschen Polynomen zusammenhängenden Funktionen des parabolischen Zylinders mit ganzzahligem Index aus (1, 12) und (2, 4) unter Heranziehung des Ergänzungssatzes der Γ-Funktion

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$$

die für $s > \frac{1}{2}$ geltenden Beziehungen

$$\begin{cases} \mathfrak{L}\{t^{-\frac{1}{2}} D_{2n}(\sqrt{2t})\} = (-2)^n \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \dfrac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}, \\ \mathfrak{L}\{D_{2n+1}(\sqrt{2t})\} = (-2)^n \Gamma(n+\tfrac{3}{2}) \dfrac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+\frac{3}{2}}} \text{ [19])}, \end{cases} \tag{2, 10}$$

und schließlich aus (1, 15) und (2, 4) für die Batemannschen k-Funktionen mit ganzzahligem Index in Übereinstimmung mit einem Ergebnis von Shastri [20])

$$\mathfrak{L}\{k_{2n}(t)\} = 2(-1)^{n-1} \frac{(s-1)^{n-1}}{(s+1)^{n+1}}. \tag{2, 11}$$

---

[17]) Vgl. z. B. [12] Gleichung (2, 1).
[18]) [3] Gleichungen (B), (C).
[19]) [9].
[20]) [11] Gleichung (4, 1).

Zum Schluß möge noch ein Fall wenigstens Erwähnung finden, in welchem die konfluenten hypergeometrischen Funktionen bei einer Laplace-Transformation als Unterfunktionen auftreten. Aus Integraldarstellungen, die jüngst C. S. Meijer[21]) für die W-Funktionen gegeben hat, kann eine Integraldarstellung der M-Funktion abgeleitet werden[22]), aus welcher sofort folgt, daß

$$(2,12) \qquad \mathfrak{L}\{J_{2m}(2\sqrt{t})\,t^{k-\frac{1}{2}}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}{\Gamma(2m+1)}\,s^{-k}e^{\frac{1}{2s}}M_{k,m}\left(\frac{1}{s}\right)$$

für

$$\tfrac{1}{2}+m+k>0$$

ist. Für $k=m+\frac{1}{2}$ geht diese Formel vermöge der Beziehung (1,8) in eine längst bekannte über[23]). Auf Grund der Meijerschen Integraldarstellungen der W-Funktionen kann man auch sofort Fälle angeben, in denen diese Funktionen als Unterfunktionen auftreten, doch verzichten wir an dieser Stelle auf die ausführliche Wiedergabe der entsprechenden Formeln.

§ 3.

Das erste Additionstheorem.

Die in (2,4) auftretende Unterfunktion ist so beschaffen, daß das Produkt zweier verschiedener, d. h. für verschiedene Werte von k und m gebildeter Unterfunktionen wieder eine Unterfunktion derselben Gestalt ist. Diese aus der Multiplikationsregel der Potenzen folgende höchst einfache Tatsache bedingt eine bemerkenswerte, aus ihr mittels des Faltungssatzes sofort zu folgernde Eigenschaft der N-Funktionen: *Die N-Funktionen bilden der Operation der Faltung gegenüber eine „Gruppe“*, d. h. das Faltungsprodukt zweier derartiger Funktionen ist wieder eine Funktion der Gruppe. Da sich ferner bei der Multiplikation der Unterfunktionen die Parameter k und m additiv zusammensetzen, so muß bei der Faltung der Oberfunktionen dasselbe der Fall sein, so daß wir durch die Faltung ein Additionstheorem für die Parameter der N-Funktionen erhalten müssen. Tatsächlich ist, wie aus dem Faltungssatz und (2, 4) folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{N_{k,m} * N_{k',m'}(t)\} &= \mathfrak{L}\{N_{k,m}(t)\}\,\mathfrak{L}\{N_{k',m'}(t)\}\\ &= \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(s-\frac{1}{2})^{k'-m'-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k'+m'+\frac{1}{2}}} = \frac{(s-\frac{1}{2})^{k+k'-m-m'-1}}{(s+\frac{1}{2})^{k+k'+m+m'+1}}\\ &= \mathfrak{L}\{N_{k+k',\,m+m'+\frac{1}{2}}(t)\},\end{aligned}$$

[21]) [8].

[22]) Vgl. auch eine im Bd. 113 der Math. Annalen veröffentlichte Note des Verfassers.

[23]) Vgl. z. B. [10], Gleichung (29).

und indem wir auf beiden Seiten dieser Gleichung zu den Oberfunktionen übergehen, erhalten wir das angekündigte Additionstheorem

$$(3,1) \qquad N_{k,m}(t) * N_{k',m'}(t) = N_{k+k',\, m+m'+\frac{1}{2}}(t).$$

Diese recht allgemeine Beziehung enthält eine Fülle von Einzelformeln, die nach der Definition der Faltung als Integralformeln erscheinen. Da sie auf Grund der in § 1 mitgeteilten Formeln für die Sonderfälle der M- bzw. N-Funktionen sofort hingeschrieben werden können, kann ihre Mitteilung hier wohl unterbleiben. Nur zwei besonders bemerkenswerte Sonderfälle wollen wir später angeben.

Bevor wir auf diese Sonderfälle eingehen, möchten wir noch eine andere Frage aufwerfen, nämlich die nach möglicherweise vorhandenen „Untergruppen" der Gruppe der N-Funktionen, d. h. nach solchen in ihnen enthaltenen Funktionssystemen, die so wie die Gesamtheit der N-Funktionen selbst die Eigenschaft haben, daß das Faltungsprodukt zweier beliebiger Funktionen des Systems wieder eine Funktion desselben ist. Eine solche Untergruppe bilden zunächst diejenigen N-Funktionen, die nach (1, 4) und (1, 13) auf Besselsche Funktionen führen, da für $k = k' = 0$ auch $k + k' = 0$ ist. Eine andere, ebenfalls wichtige Untergruppe bilden die mit den verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen zusammenhängenden N-Funktionen, die nach § 1 dadurch gekennzeichnet sind, daß für sie $\frac{1}{2} + m - k = -n$ eine negative ganze Zahl ist. Da

$$(\tfrac{1}{2} + m - k) + (\tfrac{1}{2} + m' - k') = \tfrac{1}{2} + (m + m' + \tfrac{1}{2}) - (k + k')$$

ist, bilden auch diese Funktionen eine Untergruppe, bei der die Parameter n bei der Faltung additiv zusammengesetzt werden. Allerdings haben die *speziellen* Laguerreschen Polynome (die aus den allgemeinen für $m = 0$ hervorgehen) ebenso wie die Hermiteschen Polynome diese Gruppeneigenschaft *nicht*. Dagegen hat ein anderer Ausschnitt aus der zweiparametrigen Schar der allgemeinen Laguerreschen Polynome (korrekter ausgedrückt der mit einer entsprechenden Potenz und einer Exponentialfunktion multiplizierter Laguerreschen Polynome) diese Eigenschaft, nämlich die Laguerreschen Polynome nullter Ordnung. Das sind die durch (1, 8) erklärten N-Funktionen. Selbstverständlich ist der „Durchschnitt" zweier Untergruppen, d. i. die Gesamtheit aller Funktionen, die gleichzeitig zwei Untergruppen angehören, wieder eine Untergruppe. So ist der Durchschnitt der „Besselschen Untergruppe" ($k = 0$) und der „Laguerreschen Untergruppe" ($k = m + \frac{1}{2} + n$) wieder eine Untergruppe, und zwar ist sie die Gesamtheit aller derjenigen N-Funktionen, die mit Zylinderfunktionen vom Index $n + \frac{1}{2}$ zusammenhängen und nach § 1 auch durch

Laguerresche Polynome ausgedrückt werden können („Poissonsche Untergruppe)[24]).

Wir wollen noch (3, 1) in der Gestalt einer Integralformel schreiben. Diese Gleichung lautet ausgeschrieben

$$\int_0^t N_{k,m}(\tau)\, N_{k',m'}(t-\tau)\, d\tau = N_{k+k',\, m+m'+\frac{1}{2}}(t)$$

und geht durch die Einführung der neuen Integrationsveränderlichen $u = \frac{\tau}{t}$ über in

$$(3,2) \qquad t\int_0^1 N_{k,m}(ut)\, N_{k',m'}([1-u]t)\, du = N_{k+k',\, m+m'+\frac{1}{2}}(t).$$

In der hier angeschriebenen Form gilt das Additionstheorem nur für solche (reelle oder komplexe) Werte der Parameter, für welche das linksstehende Integral konvergiert. Die Bedingungen hierfür sind

$$(3,3) \qquad \mathfrak{Re}(2m+1) > 0, \quad \mathfrak{Re}(2m'+1) > 0.$$

Da die N-Funktionen an der Stelle $t = 0$ rein multiplikativ verzweigt und sonst in der ganzen Ebene überall regulär sind, so können wir in bekannter Weise[25]) durch Einführung eines Doppelschleifenintegrals (3, 2) so verallgemeinern, daß es für beliebige reelle oder komplexe Werte der Parameter und des Argumentes gilt. Bezeichnen wir mit L eine Doppelschleife, die etwa in einem Punkte beginnend, in welchem

$$\arg u = \arg(1-u) = 0$$

ist, zuerst den Punkt 1 und dann den Punkt 0 in positiver Richtung, hierauf den Punkt 1 und schließlich den Punkt 0 in negativer Richtung umkreist und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt, so folgt aus (1, 4), da ${}_1F_1$ eine eindeutige Funktion von t ist, daß das über den Integrationsweg L erstreckte Integral das $(1-e^{4m\pi i})(1-e^{4m'\pi i})$-fache des von 0 bis 1 erstreckten Integrals ist. Daraus folgt die für alle reelle und komplexe Werte von k, k', m, m' und t gültige Formel

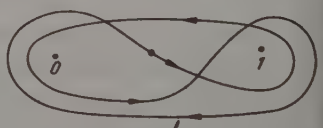


Fig. 1.

$$(3,4) \qquad t\int_L N_{k,m}(ut)\, N_{k',m'}([1-u]t)\, du$$
$$= (1-e^{4m\pi i})(1-e^{4m'\pi i})\, N_{k+k',\, m+m'+\frac{1}{2}}(t).$$

[24]) Diese nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten vorgenommene Einteilung der N-Funktionen liefert also gerade diejenigen Funktionensysteme, die auch bisher als die wichtigsten und gewissermaßen in sich geschlossenen Sondergruppen innerhalb der konfluenten hypergeometrischen Funktionen angesehen wurden.

[25]) Vgl. z. B. [13], § 12, 43.

Ersetzen wir in (3,1) k durch $\frac{m}{2}+\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$, m durch $\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$, k' durch $-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}$ und schließlich m' durch $\frac{m}{2}-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}$, so erhalten wir die Gleichung

$$N_{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}+\frac{k}{2},\,\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}}(t) * N_{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{k}{2},\,\frac{m}{2}-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}(t) = N_{k,m}(t).$$

Die auf der linken Seite dieser Beziehung stehenden N-Funktionen können nach (1,8) durch Potenzen und Exponentialfunktionen ausgedrückt werden. Diese Gleichung ergibt unmittelbar eine bekannte Integraldarstellung der M-Funktionen[26]).

Ein anderer wichtiger Sonderfall von (3,1) entsteht, wenn wir für eine der beiden durch die Faltung verknüpften N-Funktionen wie im vorhergehenden Falle nach (1,8) eine mit einer Potenz multiplizierte Exponentialfunktion, für die andere nach (1,13) eine mit einer geeigneten Potenz multiplizierte Besselsche Funktion setzen. Das merkwürdige ist, daß durch die Faltung zweier so speziell gewählter Funktionen eine beliebige N-Funktion erzeugt werden kann, oder mit anderen Worten, daß durch die Faltung der durch (1,8) erklärten Gesamtheit besonderer N-Funktionen mit der Gesamtheit der durch (1,13) erklärten die *volle* Gesamtheit der N-Funktionen entsteht. In der Tat ergibt die Einsetzung von $m = k - \frac{1}{2}$, $k' = 0$ in (3,1)

$$N_{k,\,k-\frac{1}{2}}(t) * N_{0,\,m'}(t) = N_{k,\,k+m'}(t),$$

oder indem wir m' durch $m-k$ ersetzen

$$N_{k,\,k-\frac{1}{2}}(t) * N_{0,\,m-k}(t) = N_{k,m}(t). \tag{3,5}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir unter Anwendung von (1,4) und (1,8)

$$B(2k,\,2m-2k+1)\,t^{m-\frac{1}{2}}M_{k,m}(t) = t^{2k-1}e^{-\frac{t}{2}} * t^{m-k-\frac{1}{2}}M_{0,m-k}(t), \tag{3,6}$$

worin wie üblich

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

bedeutet, und die auf der rechten Seite stehende M-Funktion nach (1,13) durch eine Besselsche Funktion mit rein imaginärem Argument ausgedrückt werden kann.

Aus (3,4) kann nun eine neue Integraldarstellung der M-Funktionen gewonnen werden, indem in dieser Gleichung genau so, wie wir es soeben mit (3,1) getan haben, $m = k - \frac{1}{2}$, $k' = 0$ gesetzt, hierauf m' durch

[26]) [13], Seite 352, Example 1.

$m-k$ ersetzt wird, und schließlich die im Integral auftretenden N-Funktionen mittels (1, 8) und (1, 13) durch Potenzen, Exponential- und Besselsche Funktionen ausgedrückt werden. So ergibt sich die für alle Werte von $k, m, t(2m+1 \neq -n)$ gültige Integraldarstellung

$$(3,7)\qquad M_{k,m}(t) = -\frac{\Gamma(m-k+1)}{B(2k, 2m-2k+1)} \cdot \frac{2^{2(m-k+1)}\, e^{-(5m-k)\frac{\pi i}{2}}}{\sin 2k\pi \cdot \sin 2(m-k)\pi}$$
$$t^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} \int_L e^{\frac{1}{2}ut} J_{m-k}\left(\frac{iut}{2}\right) u^{m-k} (1-u)^{2k-1}\, du.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung kann für

$$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > \Re e\, k > 0$$

auf ein von 0 bis 1 erstrecktes Integral zurückgeführt werden. Wird eine der Zahlen $2k$, $2m-2k+1$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl, so erscheint die rechte Seite der Gleichung (3, 7) zunächst in unbestimmter Form, doch kann (3, 7) durch eine einfache Umformung mit Hilfe des Ergänzungssatzes der Γ-Funktion in eine auch für diese Fälle gültige Gestalt gebracht werden.

§ 4.

Das zweite Additionstheorem.

Aus (2, 3) kann noch ein zweites, auf die Argumente bezügliches Additionstheorem der N- bzw. M-Funktionen abgeleitet werden. Wir wollen dieses Additionstheorem nur kurz ableiten, ohne an dieser Stelle auf nähere Einzelheiten ausführlicher einzugehen. Es ist

$$\mathfrak{L}\{x^{\frac{1}{2}-m-2l} e^{-\frac{1}{2}yt} N_{k-l+\frac{m}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{m}{2}-\frac{1}{4}+l}(xt)\}$$
$$\mathfrak{L}\{y^{\frac{1}{2}-m+2l} e^{\frac{1}{2}xt} N_{k-l-\frac{m}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{m}{2}-\frac{1}{4}-l}(yt)\}$$
$$= \frac{\left(s+\frac{y}{2}-\frac{x}{2}\right)^{k-2l}}{\left(s+\frac{y}{2}+\frac{x}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left(s-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)^{k-2l}} = \frac{\left(s-\frac{x+y}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s+\frac{x+y}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}$$
$$= \mathfrak{L}\{(x+y)^{-2m} N_{k,m}([x+y]t)\}.$$

Daher gilt auf Grund des Faltungssatzes folgendes Additionstheorem:

$$(4,1)\qquad \begin{cases} (x+y)^{-2m} N_{k,m}([x+y]t) \\ = x^{\frac{1}{2}-m-2l} e^{-\frac{1}{2}yt} N_{k-l+\frac{m}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{m}{2}-\frac{1}{4}+l}(xt) \\ \qquad * y^{\frac{1}{2}-m+2l} e^{\frac{1}{2}xt} N_{k-l-\frac{m}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{m}{2}-\frac{1}{4}-l}(yt), \end{cases}$$

welches zunächst nur für

$$|\Re e\, 2l| < \Re e\, m + \tfrac{1}{2}$$

einen Sinn hat. Sein Gültigkeitsbereich kann aber wegen der rein multiplikativen Verzweigung der in ihm auftretenden Funktionen durch Einführung eines Doppelschleifenintegrals genau so wie im vorigen Paragraphen auf ganz beliebige Werte der Parameter und des Argumentes erweitert werden.

§ 5.

Das erste Multiplikationstheorem.

Wir gehen von folgender, für $\Re e\, \alpha > \frac{1}{2}$ und $\Re e\, s > -\frac{1}{2}$ konvergenten Reihenentwicklung aus:

$$\frac{s^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\alpha)^{k+m+\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha^{-k-m-\frac{1}{2}} s^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+1)^{k+m+\frac{1}{2}}} \left[1-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{s}{s+1}\right]^{-k-m-\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha^{-k-m-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^r \frac{s^{k+r-m-\frac{1}{2}}}{(s+1)^{k+r+m+\frac{1}{2}}},$$

wofür wir nach (2, 3) schreiben können:

$$\mathfrak{L}\{t^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha t} M_{k,m}(\alpha t)\}$$

$$= \alpha^{-k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^r \mathfrak{L}\{t^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} M_{k+r,m}(t)\}.$$

Hierbei bedeutet

$$(p)_0 = 1, \quad (p)_r = p(p+1)\ldots(p+r-1) = \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Gehen wir auf beiden Seiten zu den Oberfunktionen über, was der Stetigkeit der Oberfunktionen wegen nach einem bekannten Satze von Lerch gestattet ist, so erhalten wir unmittelbar die Beziehung

$$(5,1) \qquad e^{-\frac{1}{2}\alpha t} M_{k,m}(\alpha t) = \alpha^{-k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^r e^{-\frac{1}{2}t} M_{k+r,m}(t),$$

die als das erste Multiplikationstheorem der M-Funktionen bezeichnet werden möge. Die auf ihrer rechten Seite stehende unendliche Reihe konvergiert unter der Bedingung

$$(5,2) \qquad \left|1-\frac{1}{\alpha}\right| < 1, \quad \text{also} \quad \Re e\, \alpha > \frac{1}{2}$$

für alle Werte von k, m und t. Durch Ersetzen von α durch $-\alpha$ in (5, 1) und Anwendung der Kummerschen Formel (1, 6) kann dem Multi-

plikationstheorem eine zweite, für $\Re\alpha < -\frac{1}{2}$ gültige Form gegeben werden. Beide Formen versagen jedoch, wenn

$$-\tfrac{1}{2} \leqq \Re\alpha \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Für $k = n$ und $m = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (5, 1) das von Shastri aufgestellte Multiplikationstheorem der Funktion $k_{2n}(t)$[27]). Von sonstigen Sonderfällen wollen wir nur das Multiplikationstheorem der Laguerreschen Polynome explizite hinschreiben. Auf Grund von (1, 9) und (1, 4) liefert (5, 1) für $k = m + \frac{1}{2} + n$

$$(5,3)\quad e^{-\alpha t} L_n^{(2m)}(\alpha t) = \alpha^{-n-2m-1} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^r e^{-t} L_{n+r}^{(2m)}(t).$$

Indessen ist es aber ganz klar, daß $L_n^{(2m)}(\alpha t)$ auch als ein endliches Linearaggregat der Funktionen $L_r^{(2m)}(t)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$ dargestellt werden kann. Tatsächlich bricht die Reihe auf der rechten Seite von (5, 1) ab, wenn wir $k = -m - \frac{1}{2} - n$ setzen, da

$$(-n)_r = (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{für} \quad r \leqq n, \quad \text{und} \quad (-n)_r = 0 \quad \text{für} \quad r > n$$

ist. Ersetzen wir in (5, 1) außerdem noch t durch $-t$, so erhalten wir unter Heranziehung von (1, 9)

$$(5,4)\qquad L_n^{(2m)}(\alpha t) = \alpha^n \sum_{r=0}^{n} \binom{2m+n}{r} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r L_{n-r}^{(2m)}(t).$$

Daraus ergibt sich für $m = \frac{1}{2}$ auch eine Darstellung von $k_{2n}(\alpha t)$ als ein endliches Linearaggregat der k-Funktionen. Die entsprechende Formel lautet

$$e^{\alpha t} k_{2n}(\alpha t) = \alpha^n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^r e^t k_{2n-2r}(t).$$

Nun wollen wir noch die entsprechend gebaute Multiplikationsformel der W-Funktionen ableiten. Auf Grund von (1, 2) ist

$$e^{-\frac{1}{2}\alpha t} W_{k,m}(\alpha t) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} - m - k)} e^{-\frac{1}{2}\alpha t} M_{k,m}(\alpha t) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m - k)} e^{-\frac{1}{2}\alpha t} M_{k,-m}(\alpha t).$$

Führen wir auf der rechten Seite dieser Gleichung für die M-Funktionen (5, 1) ein, ziehen beide Summen in eine zusammen und beachten, daß

$$(\tfrac{1}{2} \pm m + k)_r = (-1)^r (\tfrac{1}{2} \mp m - k - r)_r = (-1)^r \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \mp m - k)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp m - k - r)}$$

---

[27]) [11] Gleichung (5, 7).

ist, so ergibt sich unter nochmaliger Anwendung von (1, 2) unter dem Summenzeichen das besonders einfach gebaute Multiplikationstheorem der W-Funktionen

$$(5,5) \qquad e^{-\frac{1}{2}\alpha t} W_{k,m}(\alpha t) = \alpha^{-k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r e^{-\frac{1}{2}t} W_{k+r,m}(t).$$

Daraus ergibt sich für $k = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}$ und $m = -\frac{1}{4}$ das Multiplikationstheorem der Funktionen des parabolischen Zylinders unter Beachtung von (1, 11) in folgender Gestalt:

$$(5,6) \qquad e^{-\frac{1}{2}\alpha t} D_\nu(\sqrt{2\alpha t}) = \alpha^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r 2^{-r} e^{-\frac{1}{2}t} D_{\nu+2r}(\sqrt{2t}).$$

Zum Unterschied von dem Multiplikationstheorem der M-Funktionen kann es nicht vorkommen, daß die Reihe in (5, 5) abbricht.

§ 6.

Das zweite Multiplikationstheorem.

Wir werden noch ein zweites Multiplikationstheorem für die Funktion $M_{k,m}(\alpha t)$ ableiten, das im Gegensatz zum ersten so beschaffen ist, daß es für alle endlichen Werte von α gültig ist. Zu seiner Herleitung gehen wir von der Reihenentwicklung aus

$$\frac{s^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\alpha)^{k+m+\frac{1}{2}}} = \frac{s^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+1)^{k+m+\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{\alpha - 1}{s+1}\right)^{-k-m-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} (1-\alpha)^r \frac{s^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+1)^{k+m+r+\frac{1}{2}}},$$

in der wir bei jedem endlichen Wert von α die reelle Größe s_0 so wählen können, daß die unendliche Reihe für $\Re e\, s > s_0$ konvergiert[28]). Diese Entwicklung läßt sich noch in folgender Form schreiben:

$$\alpha^{-2m} \mathfrak{L}\{e^{-\frac{1}{2}\alpha t} N_{k,m}(\alpha t)\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} (1-\alpha)^r \mathfrak{L}\{e^{-\frac{1}{2}t} N_{k+\frac{r}{2}, m+\frac{r}{2}}(t)\}.$$

Durch Übergang zu den Oberfunktionen erhalten wir sofort das gesuchte Multiplikationstheorem

$$(6,1) \qquad e^{-\frac{1}{2}\alpha t} N_{k,m}(\alpha t) = \alpha^{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} (1-\alpha)^r e^{-\frac{1}{2}t} N_{k+\frac{r}{2}, m+\frac{r}{2}}(t),$$

---

[28]) Es genügt etwa $s_0 = |\alpha - 1| - 1$ zu wählen.

worin die N-Funktionen noch nach (1, 4) durch die M-Funktionen ausgedrückt werden können. Außer dem Gültigkeitsbereiche unterscheiden sich die beiden Multiplikationstheoreme darin, daß alle im ersten Multiplikationstheorem auftretenden M-Funktionen denselben zweiten Parameter m besitzen, während beim zweiten Multiplikationstheorem dieselbe Aussage für die Parameterdifferenz $m - k$ zutrifft.

Auch aus (6, 1) können wir durch geeignete Annahmen für k entsprechende Formeln für die Laguerreschen Polynome und andere Sonderfälle der M-Funktionen ableiten. Setzen wir zunächst $k = m + \frac{1}{2} + n$, so erhalten wir unter Beachtung von (1, 9)

$$e^{-\alpha t} L_n^{(2m)}(\alpha t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1-\alpha)^r t^r e^{-t} L_n^{(2m+r)}(t), \tag{6, 2}$$

eine Beziehung, die merkwürdigerweise nur Laguerresche Polynome von derselben Ordnung enthält. Dagegen ergibt auch (6, 1) für $k = -m - n - \frac{1}{2}$ eine abbrechende Reihe. Ganz entsprechend wie im vorigen Paragraphen erhalten wir nämlich in diesem Falle

$$L_n^{(2m)}(\alpha t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} (1-\alpha)^r t^r L_{n-r}^{(2m+r)}(t). \tag{6, 3}$$

Die formelmäßige Notierung weiterer Sonderfälle möge dem Leser überlassen bleiben.

Literaturverzeichnis.

H. Bateman.

[1] The k-function, a particular case of the confluent hypergeometric function. Trans. Am. Math. Soc. **33** (1931), S. 817—831.

G. Doetsch.

[2] Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. Annali della R. Scuola Norm Sup. di Pisa (2) **4** (1935), S. 71—84.

[3] Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 587—599.

A. Erdélyi.

[4] Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen $M_{k,m}$-Funktionen auftreten. Math. Zeitschr. **40** (1936), S. 693—702.

[5] Über eine Methode zur Gewinnung von Funktionalbeziehungen zwischen konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erscheint demnächst in den Monatsheften f. Math. u. Phys.

[6] Über die Fälle, in denen die Whittakersche Differentialgleichung in geschlossener Form integrierbar ist. Erscheint demnächst im Jahresber. der Deutschen Math.-Ver.

C. S. Meijer.

[7] Über die Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der Hankelschen und Besselschen Funktionen. Nieuw Arch. f. Wiskde 18 (1934), S. 35—57.

[8] Einige Integraldarstellungen für Whittakersche unnd Besselsche Funktionen. Proc. Kon. Ak. van Wet. te Amsterdam 37 (1934), S. 805—812.

S. C. Mitra.

[9] The operational representations of $D_n(x)$ and $D^2_{-(n+1)}(ix) - D_{-(n+1)}(-ix)$. Proc. Ed. Math. Soc. (2) 4 (1934), S. 33—35.

B. van der Pol.

[10] On the operational solution of linear differential equations and an investigation of the properties of these solutions. Phil. Mag. (7) 8 (1929), S. 861—898.

N. A. Shastri.

[11] On some properties of the k-function. Phil. Mag. (7) 20 (1935), S. 468—478.

[12] On simultaneous operational calculus. J. Indian Math. Soc. New Ser. 1, S. 235—240.

E. T. Whittaker and G. N. Watson.

[13] A course of modern analysis. 4th Edition, Cambridge 1927.

(Eingegangen am 11. Juni 1936.)

Anmerkung bei der Korrektur: Nach Abschluß dieser Mitteilung erschien eine Arbeit von S. C. Dhar, On operational representations of confluent hypergeometric functions and their integrals. Phil. Mag. (7) vol. 21 (1936), S. 1082—1096, die mit dieser Mitteilung einige Berührungspunkte aufweist, ohne daß sie die in den §§ 3—6 gewonnenen Hauptergebnisse dieser Arbeit enthielte. Lediglich Gleichung (5, 5) wird auch von Herrn Dhar abgeleitet [a. a. O. Gleichung (47)].

Zur Darstellung und Erweiterung der Baireschen Funktionen.

Von

F. Hartogs in München.

Unter einer Baireschen Funktion f der Klasse α auf einer gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ versteht man bekanntlich die Grenzfunktion einer auf $\mathfrak{M}$ konvergenten Folge von Funktionen, die auf $\mathfrak{M}$ sämtlich von geringerer als α-ter Klasse sind (unter Ausschluß des Falles, daß die Grenzfunktion selbst ebenfalls noch von geringerer als α-ter Klasse ist). Dabei sind unter Funktionen der Klasse 0 die stetigen Funktionen zu verstehen und α kann eine beliebige Ordnungszahl der ersten oder zweiten Zahlklasse bedeuten. Es soll nun im folgenden der Nachweis geführt werden, daß, wenn $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge bezeichnet, welche $\mathfrak{M}$ umfaßt (beispielsweise also den ganzen euklidischen oder metrischen Raum, in welchem $\mathfrak{M}$ gelegen ist) *die obige Funktion f stets auch als Grenzfunktion einer auf $\mathfrak{M}$ konvergenten Folge von Funktionen dargestellt werden kann, die sämtlich noch auf $\mathfrak{A}$ (eindeutig) definiert und von niedrigerer als der α-ten Klasse sind*[1]). Für den Spezialfall $\alpha = 1$ kann, wenn $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes bedeutet, dieser Satz offenbar auch so ausgesprochen werden, daß *jede Funktion, die auf $\mathfrak{M}$ von der Klasse* 0 *oder* 1 *ist, stets als Grenzfunktion von Polynomen von n Veränderlichen darstellbar ist*[2]).

Wie sich im folgenden zeigen wird, hängt der zu beweisende Satz aufs engste mit dem Hahn-Hausdorffschen sogenannten „*Einschiebungssatz*“[3]) zusammen, den ich im folgenden gleich in einer verallgemeinerten Formulierung gebe, zugleich mit einem in der Form etwas vereinfachten

[1]) Mit Benutzung des Begriffs der „unvollständigen Baireschen Funktion“ [vgl. Encykl. II C 9c (Fréchet-Rosenthal), S. 1176; Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1920, S. 381] kann der Satz auch in der folgenden Form ausgesprochen werden: *Ist $\mathfrak{M}$ Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so kann jede Bairesche Funktion α-ter Klasse auf $\mathfrak{M}$ als unvollständige Bairesche Funktion α-ter Klasse auf $\mathfrak{A}$ aufgefaßt werden.*

[2]) Für die vom Verfasser gemeinsam mit Herrn A. Rosenthal in den Arbeiten Math. Annalen **100** und **104** untersuchten α- und β-Mengen ergibt sich hieraus die wichtige Folgerung, daß jede beliebige Teilmenge (einer α-Menge oder) einer abgeschlossenen β-Menge wieder eine β-Menge sein muß.

[3]) Näheres siehe unten (Satz IV a und Fußnote 8).

Beweis. Es werden dementsprechend außer den Baireschen Funktionenklassen auch die Youngschen Funktionenklassen in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, bei deren Definition statt Funktionenfolgen beliebiger Art bekanntlich nur monotone Funktionenfolgen benutzt werden[4]). Zugleich wird sich zeigen, daß die folgenden Betrachtungen in einem sehr engen Zusammenhang mit den verschiedenen Arten von *Erweiterungssätzen* über die Baireschen und Youngschen Funktionen stehen.

Alle im folgenden vorkommenden Mengen sollen stets Punktmengen eines und desselben euklidischen oder allgemeiner eines und desselben metrischen Raumes bedeuten. (Ist also von einer beliebigen, die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ enthaltenden Menge $\mathfrak{A}$ die Rede, so kann letztere beispielsweise einen beliebigen euklidischen bzw. metrischen Raum bedeuten, welcher $\mathfrak{M}$ enthält.)

Der Bequemlichkeit halber seien zunächst die im folgenden hauptsächlich benutzten Sätze über die Baireschen und Youngschen Funktionen kurz zusammengestellt[5]).

Satz I. *Sind* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *höchstens Funktionen* G_α [*bzw.* g_α], *so ist auch* gr $[f_1, f_2, \ldots, f_k]$ *sowie* kl $[f_1, f_2, \ldots, f_k]$ *höchstens eine Funktion* G_α [*bzw.* g_α][6]).

Satz II. *Sind in der monoton wachsenden* [*bzw. abnehmenden*] *Folge* $f_1, f_2, \ldots$ *alle* f_ν *höchstens Funktionen* G_α [*bzw.* g_α], *so ist auch ihre Grenzfunktion höchstens eine Funktion* G_α [*bzw.* g_α].

Satz III. (Zusammenhang zwischen den Funktionen der beiden Klassifikationen.) *Die Gesamtheit aller Funktionen höchstens* α*-ter Klasse besteht aus allen Funktionen höchstens* α*-ter Ordnung und allen Funktionen* $(\alpha+1)$*-ter Ordnung vom Typus* $G_{\alpha+1} = g_{\alpha+1}$ (d. h. solchen, die gleichzeitig Funktionen $G_{\alpha+1}$ und $g_{\alpha+1}$ sind).

Den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet die erweiterte Fassung des Einschiebungssatzes:

Satz IV. (Verallgemeinerter Einschiebungssatz.) *Es bedeute* G *eine beliebige Funktion (höchstens)* G_α *auf der Menge* $\mathfrak{M}$ *und* g *eine beliebige Funktion (höchstens)* g_α *auf* $\mathfrak{M}$. *An allen denjenigen Punkten* x *von* $\mathfrak{M}$,

---

[4]) Über die Youngschen Funktionenklassen siehe insbesondere Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin 1920), Kap. V, § 3. Bezeichnung derselben im folgenden wie in diesem Buche, nämlich G_α [bzw. g_α] = Grenzfunktion einer wachsenden [bzw. abnehmenden] Folge von Funktionen geringerer als α-ter „Ordnung".

[5]) Siehe Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1920 (künftig kurz zitiert als „Hahn, Th."), S. 330, Sätze V und VII, S. 346, Satz I.

[6]) Eine Funktion heißt „höchstens Funktion G_α" [bzw. g_α], wenn sie entweder selbst eine Funktion G_α [bzw. g_α] oder eine *beliebige* Youngsche Funktion von geringerer als α-ter Ordnung ist. — gr $[f_1, \ldots, f_k]$ bedeutet den größten, kl $[f_1, \ldots, f_k]$ den kleinsten unter den k Funktionswerten $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

für die $g < G$ ist, können dann (ohne den Charakter von G und g als Funktion höchstens G_α bzw. g_α zu beeinträchtigen) *die beiden Funktionswerte durch einen und denselben (passend gewählten) zwischen g und G gelegenen (von x abhängigen) Wert ersetzt werden (so daß dann für die beiden abgeänderten Funktionen G^* und g^* durchweg $g^* \geqq G^*$ gilt).*

Beweis. G läßt sich auf $\mathfrak{M}$ als Grenzfunktion einer wachsenden Folge $f_0, f_2, f_4, \ldots$ von Funktionen $g_\beta\,(\beta < \alpha)$ darstellen[7]), ebenso g als Grenzfunktion einer abnehmenden Folge $f_1, f_3, f_5, \ldots$ von Funktionen $G_\beta\,(\beta < \alpha)$.

Bildet man aus diesen zwei Funktionenfolgen zwei neue, indem man setzt:

$$f_0^* = f_0, \qquad f_{2\nu+1}^* = \mathrm{gr}\,[f_{2\nu+1}, f_{2\nu}^*] \qquad (\nu \geqq 0)$$
$$f_{2\nu}^* = \mathrm{kl}\,[f_{2\nu}, f_{2\nu-1}^*] \qquad (\nu \geqq 1),$$

so sind nach Satz I diese neuen Funktionen (ebenso wie die ursprünglichen) sämtlich höchstens Funktionen $G_\alpha = g_\alpha$ (d. h. entweder selbst Funktionen $G_\alpha = g_\alpha$ oder von geringerer als α-ter Ordnung).

Für alle Punkte von $\mathfrak{M}$, in denen $G \leqq g$, sind die beiden Folgen mit den ursprünglichen identisch, haben also daselbst wieder den Grenzwert G bzw. g. Für einen Punkt x_0 von $\mathfrak{M}$ hingegen, in welchem $G > g$, haben die beiden neuen Folgen einen und denselben Grenzwert, da fast alle $f_\nu^*(x_0)$ einander gleich sind, und zwar liegt der gemeinsame Grenzwert zwischen $G(x_0)$ und $g(x_0)$.

Endlich ist nach Satz II die Grenzfunktion G^* der $f_{2\nu}^*$ wieder höchstens eine G_α als Limes einer wachsenden Folge von Funktionen (höchstens) G_α und die Grenzfunktion g^* der $f_{2\nu+1}^*$ höchstens eine g_α als Limes einer abnehmenden Folge von Funktionen (höchstens) g_α.

Als spezieller Fall dieses Satzes ergibt sich die bisherige Form des Einschiebungssatzes[8]), indem man auf $\mathfrak{M}$ durchweg $g \leqq G$ voraussetzt; es wird dann $g^* = G^*$ höchstens eine Funktion vom Typus $g_\alpha = G_\alpha$, welche auf $\mathfrak{M}$ beständig zwischen G und g liegt. Hiernach gilt:

Satz IVa. (Hahn-Hausdorffscher Einschiebungssatz.) *Ist auf der Menge $\mathfrak{M}$ G höchstens eine Funktion G_α, g höchstens eine Funktion g_α und gilt auf $\mathfrak{M}$ durchweg $g \leqq G$, so gibt es auf $\mathfrak{M}$ eine Funktion f von höchstens dem Typus $G_\alpha = g_\alpha$, welche daselbst der Bedingung $g \leqq f \leqq G$ genügt.*

---

[7]) S. a. Hahn, Th., S. 332, Satz VIII.

[8]) Fall $\alpha = 0$: Hahn, Wiener Ber. 126 (1917), S. 91—110. Allgemeiner Fall: Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 309.

Ein gewisser Vorzug der Youngschen Klassifikation gegenüber der Baireschen besteht darin, daß, wie zuerst G. v. Alexits [9]) bewiesen hat, jede Youngsche Funktion einer beliebigen Ordnung sich als solche unbeschränkt fortsetzen läßt; mit anderen Worten, es gilt der folgende

1. Erweiterungssatz (v. Alexits). *Ist f eine Youngsche Funktion α-ter Ordnung G_α* [bzw. g_α] *auf $\mathfrak{M}$ ($\alpha \geqq 1$) und $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge, welche $\mathfrak{M}$ umfaßt, so kann f zu einer Funktion erweitert werden, welche auf $\mathfrak{A}$ von demselben Typus ist.*

Beweis. 1. Fall: $\alpha = 1$. Die Erweiterung von G_1 (= „unterhalb stetige Funktion") kann so geschehen, daß man für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$ ($\overline{\mathfrak{M}}$ = abgeschlossene Hülle) f gleich dem unteren Limes der (zu $\mathfrak{M}$ gehörigen) benachbarten Funktionswerte und für jeden nicht zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehörigen Punkt von $\mathfrak{A}$ f gleich der oberen Grenze aller Funktionswerte von f auf $\mathfrak{M}$ setzt [10]). Analoges gilt für die Erweiterung von g_1 (= „oberhalb stetige" Funktion).

2. Fall: $\alpha > 1$ [11]). Nachweis durch Induktionsschluß: Auf $\mathfrak{M}$ sei $G_\alpha = \lim f_n$, wo die f_n eine zunehmende Folge von Funktionen g_{β_n} ($\beta_n < \alpha$) bilden [7]). Nach der Annahme des Induktionsschlusses läßt sich jede derselben zu einer Funktion der gleichen Art auf $\mathfrak{A}$ erweitern. Sollten die erweiterten Funktionen f_n auf $\mathfrak{A}$ nicht mehr eine monotone Folge bilden, so ersetze man auf $\mathfrak{A}$ jede f_n durch $f_n^* = \mathrm{gr}\,[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ und beachte Satz I.

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich mit Berücksichtigung von Satz III sofort der

2. Erweiterungssatz [12]). *Ist f eine Bairesche Funktion der Klasse α auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge, welche $\mathfrak{M}$ umfaßt, so kann f zu einer Funktion erweitert werden, die auf $\mathfrak{A}$ höchstens von der Klasse $\alpha + 1$ ist.*

Mit Benutzung des 1. Erweiterungssatzes ergibt sich nun aus Satz IV sogleich der folgende

Satz V. *Hat man auf einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}$ eine Funktion $G_\alpha = g_\alpha$ oder allgemeiner eine Funktion G_α und eine Funktion g_α mit $G_\alpha \leqq g_\alpha$ und ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge, welche $\mathfrak{M}$ umfaßt, so lassen sich die beiden Funktionen auf $\mathfrak{A}$ so erweitern, daß die Beziehung $G_\alpha \leqq g_\alpha$ überall bestehen bleibt.*

Zum Beweise setze man die beiden Funktionen G_α und g_α (auf Grund des 1. Erweiterungssatzes) zunächst auf beliebige Weise als solche fort und wende dann Satz IV an [13]).

---

[9]) G. v. Alexits, Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion, Fund. Math. 15 (1930), S. 51—56.

[10]) $\pm\infty$ sollen als Funktionswerte überall mit zugelassen werden.

[11]) Dieser Fall ist im folgenden etwas kürzer behandelt als bei Alexits, l. c.

[12]) G. v. Alexits, l. c. Satz III; W. Sierpiński, Fund. Math. 16 (1930), S. 81—89.

[13]) Direkter Beweis des Satzes V für den Fall $\alpha = 1$: G_1 (= unterhalb stetige Funktion) läßt sich so erweitern, daß man für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$ ($\overline{\mathfrak{M}}$ = abgeschlossene Hülle) als Funktionswert den unteren Limes der (zu $\mathfrak{M}$ gehörigen)

Es handelt sich nun schließlich um den Beweis des folgenden

Satzes VI. *Ist φ eine Bairesche Funktion von höchstens der Klasse α auf der Menge $\mathfrak{M}$ ($\alpha \geqq 1$) und bedeutet $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{M}$ umfassende Menge, so ist φ als Grenzfunktion einer Folge von Funktionen darstellbar, die sämtlich noch auf $\mathfrak{A}$ definiert und von geringerer als α-ter Klasse sind*[14]).

Beweis. Ist α eine Limeszahl, so ergibt sich, ausgehend von der auf $\mathfrak{M}$ gültigen Darstellung von φ durch eine Folge von Funktionen niedrigerer Klasse, die Richtigkeit unmittelbar durch Anwendung des 2. Erweiterungssatzes auf diese letzteren. Im folgenden kann dieser Fall daher außer Betracht bleiben.

φ ist nach Satz III auf $\mathfrak{M}$ höchstens eine Funktion $G_{\alpha+1} = g_{\alpha+1}$ und läßt sich daher nach dem vorigen Satz einerseits als Funktion (höchstens) $G_{\alpha+1}$, andererseits als Funktion (höchstens) $g_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{A}$ so erweitern, daß überall $G_{\alpha+1} \leqq g_{\alpha+1}$ gilt. Nun ist[7])

$G_{\alpha+1}$ als Grenzfunktion einer wachsenden Folge $g_\alpha^{(\nu)}$ von Funktionen (höchstens) g_α;

$g_{\alpha+1}$ als Grenzfunktion einer abnehmenden Folge $G_\alpha^{(\nu)}$ von Funktionen (höchstens) G_α

in $\mathfrak{A}$ darstellbar, wobei dann für jedes ν

$$g_\alpha^{(\nu)} \leqq G_{\alpha+1} \leqq g_{\alpha+1} \leqq G_\alpha^{(\nu)}$$

gilt. Nach dem Einschiebungssatz IVa existiert daher (für jedes ν) eine in $\mathfrak{A}$ definierte Funktion $f^{(\nu)}$ von höchstens dem Typus $G_\alpha = g_\alpha$, also nach Satz III von höchstens $(\alpha - 1)$-ter Klasse, so daß

$$g_\alpha^{(\nu)} \leqq f^{(\nu)} \leqq G_\alpha^{(\nu)}.$$

---

benachbarten Funktionswerte wählt, sodann für jeden nicht zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehörigen Punkt von $\mathfrak{A}$ den Funktionswert mit demjenigen des nächstgelegenen Punktes von $\overline{\mathfrak{M}}$ übereinstimmen läßt. (Gibt es mehr als einen nächstgelegenen Punkt, so ist unter den zugehörigen Funktionswerten der [stets existierende] kleinste zu übernehmen.) In analoger Weise läßt sich g_1 (= oberhalb stetige Funktion) erweitern. Bei dieser Art der Erweiterung trifft die Behauptung zu.

[14]) Speziell ist hiernach jede auf $\mathfrak{M}$ stetige Funktion durch eine Folge von auf $\mathfrak{A}$ stetigen Funktionen darstellbar; genauer gilt, daß sie auch durch eine *monotone* (wachsende oder abnehmende) Folge dieser Art dargestellt werden kann. Denn nach Satz III ist sie auf $\mathfrak{M}$ eine $G_1 = g_1$ und kann also nach dem 1. Erweiterungssatz als Funktion G_1 oder auch als Funktion g_1 auf $\mathfrak{A}$ fortgesetzt werden. (Ebenso gilt allgemein, daß eine auf $\mathfrak{M}$ definierte Funktion der Klasse α durch eine *monotone* Folge von Funktionen dargestellt werden kann, die auf $\mathfrak{A}$ höchstens von derselben Klasse sind.) — Erwähnt sei noch, daß Satz VI auch ohne Anwendung des Einschiebungssatzes und der Erweiterungssätze bewiesen werden kann; diese von mir ursprünglich gefundene Art der Herleitung ist jedoch erheblich mühsamer.

Da aber auf $\mathfrak{M}$ die Funktionenfolgen $g_\alpha^{(\nu)}$ und $G_\alpha^{(\nu)}$ beide gegen φ konvergieren, so muß von der Folge der $f^{(\nu)}$ das gleiche gelten.

Bemerkung. Stellt man dem vorigen Satz entsprechend φ durch eine Folge von Funktionen dar, die auf $\mathfrak{A}$ von geringerer als α-ter Klasse sind, und bildet auf $\mathfrak{A}$ den oberen Limes dieser Funktionenfolge, so wird man, da dieser eine Funktion höchstens $(\alpha+1)$-ter Klasse darstellt[15]), wieder auf den 2. Erweiterungssatz geführt.

Bei den noch zu besprechenden beiden folgenden Erweiterungssätzen werden Borelsche Mengen benötigt; dieselben mögen nach dem Vorgang von Hahn[16]) mit $\mathfrak{D}_\alpha$ und $\mathfrak{B}_\alpha$ bezeichnet werden.

3. Erweiterungssatz (Tietze-Hausdorff[17])). *Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$, und zwar höchstens eine Borelsche Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{A}$, so kann jede Funktion f, die auf $\mathfrak{M}$ von α-ter Klasse ist, zu einer Funktion erweitert werden, die auch auf $\mathfrak{A}$ von α-ter Klasse ist.*

Beweis[18]). Nach Satz III ist f auf $\mathfrak{M}$ höchstens eine Funktion $G_{\alpha+1}$ sowie höchstens eine Funktion $g_{\alpha+1}$. Ist nun auf $\mathfrak{M}$

$$q \leqq f \leqq Q$$

(wobei auch die Fälle $q = -\infty$ und $Q = +\infty$ zugelassen werden) und setzt man:

$$\bar{f} = \begin{cases} f \text{ auf } \mathfrak{M} \\ Q \text{ auf } \mathfrak{A} - \mathfrak{M} \end{cases} \qquad \underline{f} = \begin{cases} f \text{ auf } \mathfrak{M} \\ q \text{ auf } \mathfrak{A} - \mathfrak{M} \end{cases},$$

so ist $\bar{f}$ höchstens eine Funktion $G_{\alpha+1}$ auf $\mathfrak{A}$ und $\underline{f}$ höchstens eine Funktion $g_{\alpha+1}$ auf $\mathfrak{A}$, wie sich auf Grund des in Fußnote 18 erwähnten Satzes ergibt. (Denn für $p \geqq Q$ ist die Menge der Punkte $\mathfrak{A}[\bar{f} \geqq p]$ gleich $\mathfrak{A}$ selbst und für $p < Q$ ist die Menge $\mathfrak{M}[\bar{f} \leqq p]$ oder $\mathfrak{A}[\bar{f} \leqq p]$ höchstens eine $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{M}$, also[19]) auch höchstens eine $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ in $\mathfrak{A}$.) Nach dem Einschiebungssatz IVa gibt es daher auf $\mathfrak{A}$ eine Funktion f^* von höchstens dem Typus $G_{\alpha+1} = g_{\alpha+1}$, die beständig zwischen $\bar{f}$ und $\underline{f}$ liegt, also ebenfalls eine Erweiterung von f ist, und nach Satz III ist dieselbe höchstens von der Klasse α.

---

[15]) Siehe Hahn, Th., S. 324, Satz XII.

[16]) Siehe Hahn, Th., S. 334—335.

[17]) Fall $\alpha = 0$: H. Tietze, J. f. Math. **145** (1915), S. 9—14. Allgemeiner Fall: Hausdorff, Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 309.

[18]) Im wesentlichen nach Hausdorff, l. c. S. 306. Benutzt wird im folgenden die von W. H. Young angegebene Charakterisierung der Ordnung einer Funktion durch Borelsche Mengen in der Form des Satzes: „Damit f höchstens eine Funktion G_α (bzw. g_α) auf $\mathfrak{M}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes p die Menge der Punkte $\mathfrak{M}[f \leqq p]$ (bzw. die Menge $\mathfrak{M}[f \geqq p]$) höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_\alpha$ in $\mathfrak{M}$ sei." [W. H. Young, Lond. Proc. 2 (12), 1912, S. 279; Hahn, Th., S. 343, Satz II].

[19]) Siehe Hahn, Th., S. 338, Satz VIII.

4. Erweiterungssatz (H. J. Fischer[20]). *Jede auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierte Bairesche Funktion der Klasse α kann, wenn $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathfrak{M}$ umfassende Menge bedeutet, stets zu einer Funktion erweitert werden, welche auf einer gewissen ($\mathfrak{M}$ enthaltenden) Teilmenge von $\mathfrak{A}$ von höchstens dem Typus $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ (relativ zu $\mathfrak{A}$) ebenfalls noch von der Klasse α ist*[21]. *(Speziell kann also jede auf $\mathfrak{M}$ stetige Funktion zu einer solchen erweitert werden, die auf einer gewissen ($\mathfrak{M}$ enthaltenden) Teilmenge von $\mathfrak{A}$ von höchstens dem Typus $\mathfrak{D}_2$ [$= G_\delta$ in der Bezeichnung von Hausdorff] ebenfalls noch stetig ist.)*

Denn nach Satz VI ist die gegebene Funktion als Grenzfunktion einer Folge von Funktionen darstellbar, die auf $\mathfrak{A}$ von geringerer als α-ter Ordnung sind. Nach einem von H. Hahn herrührenden Satz[22] bilden die Konvergenzpunkte dieser Folge höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ in $\mathfrak{A}$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt[23].

---

[20]) H. J. Fischer, Aufbau, Abbildung und Erweiterung der Borelschen Mengen und die Fortsetzung der Baireschen Funktionen, Diss. Heidelberg 1933, Satz 3/27, S. 99. (Infolge eines bedauerlichen Schreibfehlers heißt es dort $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ statt $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$; auf S. 101, Z. 11 ist aber der Satz richtig zitiert.) Der Beweis ist dort auf einem ganz anderen Wege geführt. (Diese Angaben sowie manche andere freundliche Hinweise erhielt ich von Herrn A. Rosenthal, nachdem ich den Satz auf dem im Text angegebenen Wege gefunden hatte.)

[21]) Ist $\mathfrak{M}$ selbst schon (höchstens) eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ relativ zu $\mathfrak{A}$, so sagt der Satz nichts aus.

[22]) Siehe Encykl. II C 9c (Fréchet-Rosenthal), S. 1176 (mit weiteren Literaturangaben), Hahn, Th., S. 380, Satz I.

[23]) Dieser Beweis versagt (ebenso wie der von H. J. Fischer) für $\alpha = 0$. In diesem Fall erhält man eine G_δ-Menge der behaupteten Art, indem man zu den Punkten von $\mathfrak{M}$ diejenigen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkte von $\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$ zufügt, in denen f einen endlichen Grenzwert besitzt. ($\overline{\mathfrak{M}}$ = abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$.) Vgl. über diesen Fall auch C. Kuratowski, Topologie I, Warschau 1933, S. 210.

(Eingegangen am 18. Juni 1936.)

Bemerkungen zu zwei Sätzen von Hans Hahn über lineare Integraltransformationen.

Von

Hermann Raff in Tübingen.

H. Hahn hat notwendige und hinreichende Bedingungen dafür genannt[1]), daß jeder beschränkten L-integrierbaren Funktion $f(x)$[2]) durch die Transformation

$$g_n = \int_a^b \varphi_n(x) f(x)\, dx$$

eine konvergente Folge (g_n) zugeordnet ist, und vor kurzem habe ich einen ähnlichen Satz für L-integrierbare und für R-integrierbare Funktionen gegeben[3]). In der vorliegenden Arbeit wird nun die Frage aufgeworfen und beantwortet: In welchem Umfang sind die dadurch gewonnenen Aussagen zu halten, daß man in den Hahnschen Sätzen die L-Begriffe formal durch die R-Begriffe ersetzt?

Im Nachstehenden werden mehrfach die folgenden Voraussetzungen verwendet:

Voraussetzung V_L. Für jedes natürliche n sei $\varphi_n(x)$ L-summierbar über $\langle a, b\rangle$, und es gebe ein $M > 0$, so daß für $n = 1, 2, \ldots$

$$^L\int_a^b |\varphi_n(x)|\, dx \leqq M$$

bleibt. $f(x)$ sei eine beschränkte, über $\langle a, b\rangle$ L-integrierbare Funktion, und (g_n) sei durch

$$g_n = {}^L\int_a^b \varphi_n(x) f(x)\, dx$$

festgelegt.

---

[1]) H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 38 (1922), S. 3—88.

[2]) Im folgenden werden nur reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x verwendet, ohne daß dies nochmals besonders betont wird. $\langle a, b\rangle$ bedeutet das abgeschlossene, beschränkte Definitionsintervall von $f(x)$ und von $\varphi_n(x)$.

[3]) H. Raff, Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen, Erste Mitteilung. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 605—629.

Voraussetzung V_R. Für jedes natürliche n sei $\varphi_n(x)$ absolut R-integrierbar über $\langle a, b\rangle$[4]), und es gebe ein $M > 0$, so daß für $n = 1, 2, \ldots$

$$^R\int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx \leqq M$$

bleibt. $f(x)$ sei eine beschränkte, über $\langle a, b\rangle$ R-integrierbare Funktion, und (g_n) sei durch

$$g_n = {}^R\int_a^b \varphi_n(x) f(x)\,dx$$

festgelegt.

Das eine der oben angedeuteten Ergebnisse von H. Hahn[5]) läßt sich nun so fassen:

Satz 1. *Voraussetzung V_L sei erfüllt. Dafür, daß (g_n) für jedes beschränkte L-integrierbare $f(x)$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend:*

L 1. Für jedes ξ von $\langle a, b\rangle$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} {}^L\int_\xi^b \varphi_n(x)\,dx$.

L 2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für jede L-meßbare Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\langle a, b\rangle$, für die $|\mathfrak{M}| < \delta$[6]) ist, und für $n = 1, 2, \ldots$

$$^L\int_{\mathfrak{M}} |\varphi_n(x)|\,dx < \varepsilon$$

bleibt[7]).

Und das von mir gegebene Resultat lautet in der spezialisierten Form, die für den Vergleich mit dem Hahnschen Ergebnis geeignet ist und die gilt, wenn man entweder durchgängig die L-Begriffe oder durchgängig die R-Begriffe für Meßbarkeit und Integrierbarkeit, also entsprechend entweder die Voraussetzung V_L oder die Voraussetzung V_R verwendet[8]):

---

[4]) Absolut integrierbar im Harnackschen Sinn (vgl. hierzu Encyklopädie der mathemat. Wissensch. II C 9, S. 1053 f.).

[5]) Hahn, a. a. O. S. 51, Satz XXII b.

[6]) $|\mathfrak{M}|$ bedeutet je nach den verwendeten Begriffen den L-Inhalt oder den R-Inhalt von $\mathfrak{M}$.

[7]) H. Lebesgue [Sur les intégrales singulières, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, sér. 3, T. 1 (1909), S. 25—128] hat einen ähnlichen Satz dafür gegeben, daß (g_n) eine Nullfolge ist (S. 57): Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 1 sind die Bedingungen L 1′ und L 2 notwendig und hinreichend dafür, daß (g_n) eine Nullfolge ist. Hierbei bedeutet

L 1′. Bei jedem ξ von $\langle a, b\rangle$ strebt $\int_\xi^b \varphi_n(x)\,dx \to 0$ für $n \to \infty$.

[8]) Raff, a. a. O. S. 617, Satz 3.

Satz I. *Voraussetzung V sei erfüllt. Dafür, daß* (g_n) *für jedes beschränkte integrierbare* $f(x)$ *konvergiert, ist notwendig und hinreichend:*

1. *Für jedes* ξ *von* $\langle a, b\rangle$ *existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\xi}^{b} \varphi_n(x)\, dx$.

2. *Für jede Folge von meßbaren Teilmengen* $\mathfrak{M}_x$ *aus* $\langle a, b\rangle$ *derart, daß* $\mathfrak{M}_{x+1}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{M}_x$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} |\mathfrak{M}_x| = 0$ *ist, gilt*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\to\infty}} \int\limits_{\mathfrak{M}_x} |\varphi_n(x)|\, dx = 0\ ^{9}).$$

Man weist nun ohne große Schwierigkeit nach, daß unter der Voraussetzung V_L mit den Bedingungen L 1 und L 2 auch die für die L-Begriffe formulierten Bedingungen 1 und 2 gelten und umgekehrt. Die weiter sich erhebende Frage, ob der Satz 1 auch für die R-Begriffe richtig ist, wird durch die Behauptung A beantwortet, wobei hier und im folgenden als Bedingung R 1 und R 2 die für die R-Begriffe formulierten Bedingungen L 1 und L 2 bezeichnet sind.

Behauptung A. Voraussetzung V_R sei erfüllt. Dafür, daß (g_n) für jedes beschränkte R-integrierbare $f(x)$ konvergiert, sind die Bedingungen R 1 und R 2 zwar hinreichend, aber die Bedingung R 2 ist dafür nicht notwendig.

Beweis zu Behauptung A. Aus Satz I folgt, daß die Bedingungen R 1 und R 2 im behaupteten Umfang hinreichend sind, da sie in den für die R-Begriffe formulierten Bedingungen 1 und 2 enthalten sind.

Daß die Bedingung R 2 aber für die Konvergenz von (g_n) nicht notwendig ist, belegt folgendes Beispiel:

Man nehme heraus

aus $\langle 0, 1\rangle$ das mittlere Drittel als offenes Intervall; das herausgenommene Intervall heiße i_{11}, die Restintervalle seien in der Reihenfolge von links nach rechts j_{11} und j_{12} genannt,

allgemein für $n = 1, 2, \ldots$ aus jedem der 2^n Restintervalle j_{np} mit $p = 1, 2, \ldots, 2^n$ das symmetrisch zum Mittelpunkt dieses Intervalls gelegene offene Intervall der Länge $2^{-n+1}\cdot 3^{-n}$; in der Reihenfolge von links nach rechts seien die so herausgenommenen Intervalle mit $i_{n+1,\nu}$, die Restintervalle mit $j_{n+1,p}$ bezeichnet ($\nu = 1, 2, \ldots, 2^n$; $p = 1, 2, \ldots, 2^{n+1}$).

---

[9]) Statt dieser Beziehung kann ersichtlich gesetzt werden: $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}_x} |\varphi_n(x)|\, dx = 0$ existiert gleichmäßig für alle n.

$\mathfrak{k}^u_{n\nu}$ bzw. $\mathfrak{l}^u_{n\nu}$ bedeute das offene Intervall der Länge $\frac{|\mathfrak{i}_{n\nu}|}{2 \cdot 3^u}$, das den Mittelpunkt von $\mathfrak{i}_{n\nu}$ als rechten bzw. linken Endpunkt hat. Durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{auf} \quad \mathfrak{k}^{n-1}_{11} \\ (-1)^n & \text{auf} \quad \mathfrak{l}^{n-1}_{11} \\ (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot 3^{\lambda-2} & \text{auf} \quad \mathfrak{k}^{n-\lambda}_{\lambda\nu} \\ (-1)^n \cdot 2 \cdot 3^{\lambda-2} & \text{auf} \quad \mathfrak{l}^{n-\lambda}_{\lambda\nu} \\ 0 & \text{sonst auf} \quad \langle 0,1\rangle \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{für} \quad \lambda = 2,3,\ldots,n \\ \text{und} \quad \nu = 1,2,\ldots,2^{\lambda-1} \\ \\ \end{matrix}$$

ist nun eine Funktionenfolge definiert, die der Voraussetzung V_R und den für die R-Begriffe formulierten Bedingungen 1 und 2 genügt.

$\varphi_n(x)$ ist nämlich für jedes n absolut R-integrierbar über $\langle 0,1\rangle$, und es gilt (im Beweise von Behauptung A bleiben die Buchstaben R vor den Integralzeichen weg)

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx = \tfrac{1}{3}.$$

Weiter ist Bedingung $R\,1$ = Bedingung 1 erfüllt. Jedes feste ξ aus $\langle 0,1\rangle$ teilt nämlich höchstens eines der Intervalle $\mathfrak{i}_{n\nu}$, und bei festem n, festem $\lambda \leqq n$ und festem $\nu \leqq 2^{\lambda-1}$ haben die über $\mathfrak{k}^{n-\lambda}_{\lambda\nu} + \mathfrak{l}^{n-\lambda}_{\lambda\nu}$ erstreckten Integrale von $\varphi_n(x)$ stets den Wert 0, also gilt

$$\left|\int_\xi^1 \varphi_n(x)\,dx\right| \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq \lambda \leqq n} \left\{\frac{2 \cdot 3^{\lambda-2}}{2^{\lambda-1} \cdot 3^{n-1}}\right\} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}},$$

da der Absolutwert von $\varphi_n(x)$ auf $\mathfrak{l}^{n-\lambda}_{\lambda\nu}$ nicht größer als $2 \cdot 3^{\lambda-2}$, und da $|\mathfrak{l}^{n-\lambda}_{\lambda\nu}| = \frac{1}{2^{\lambda-2} \cdot 3^{\lambda-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-\lambda}}$ ist.

Schließlich genügt $\varphi_n(x)$ auch der für die R-Begriffe formulierten Bedingung 2. Für jedes Teilintervall $\mathfrak{j}$ von $\langle 0,1\rangle$ der Länge 2^{-k-1} ist nämlich bei natürlichem k

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{\mathfrak{j}} |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \frac{1}{3 \cdot 2^k}. \tag{1}$$

Denn nimmt man aus $\langle 0,1\rangle$ die Intervalle $\mathfrak{i}_{\lambda\nu}$ mit $\lambda = 1,2,\ldots,k$ und $\nu = 1,2,\ldots,2^{\lambda-1}$ heraus, so ist $|\mathfrak{j}| < |\mathfrak{j}_{k\nu}|$, wo $\mathfrak{j}_{k\nu}$ ein beliebiges der Restintervalle bedeutet, also

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{\mathfrak{j}} |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \frac{1}{2^k} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx = \frac{1}{3 \cdot 2^k}.$$

Jede feste R-meßbare Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\langle 0,1\rangle$ mit einem Inhalt $|\mathfrak{M}| < \frac{1}{6}$ läßt sich durch eine endliche Intervallmenge $\mathfrak{H}$ mit einem In-

halt $|\mathfrak{H}| < 2|\mathfrak{M}| \leqq \frac{1}{3}$ überdecken. Zu jedem Element $\mathfrak{h}_m$ von $\mathfrak{H}$ gibt es ein natürliches p_m, so daß

$$2^{-p_m-1} \leqq |\mathfrak{h}_m| < 2^{-p_m}$$

ist. Jedes $\mathfrak{h}_m$ überdeckt man jetzt mit einem Intervall $\mathfrak{g}_m$ der Länge 2^{-p_m}, somit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ mit einer endlichen Intervallmenge $\mathfrak{G}$ eines Inhalts $|\mathfrak{G}| < 4|\mathfrak{M}|$. Nach (1) ergibt sich dann

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{\mathfrak{M}} |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \tfrac{2}{3}|\mathfrak{G}| < \tfrac{8}{3}|\mathfrak{M}|,$$

und daraus folgt unmittelbar, daß $\varphi_n(x)$ der für die R-Begriffe formulierten Bedingung 2 genügt

Daß die Funktionenfolge $(\varphi_n(x))$ der Bedingung $R\,2$ nicht genügt, belegen aber die Mengen

$$\mathfrak{M}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \sum_{\nu=1}^{2^{\lambda-1}} \mathfrak{k}_{\lambda\nu}^{\varkappa-\lambda},$$

denn dafür ist

$$|\mathfrak{M}| = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} 2^{\lambda-1} \cdot |\mathfrak{k}_{\lambda 1}^{\varkappa-\lambda}| = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \frac{2^{\lambda-1}}{2^{\lambda-1}\cdot 3^{\varkappa-1}} = \frac{\varkappa}{3^{\varkappa-1}}$$

und

$$\int_{\mathfrak{M}_\varkappa} |\varphi_\varkappa(x)|\,dx = \tfrac{1}{6}.$$

Damit ist die Behauptung A bewiesen.

Aus Satz I folgert man für die R-Begriffe

Satz II. *Voraussetzung V_R sei erfüllt. Dafür, daß (g_n) für jedes beschränkte R-integrierbare $f(x)$ konvergiert, sind die Bedingungen $R\,1$ und $R\,3$ notwendig und hinreichend. Hierbei bedeutet*

$R\,3$. *Für jede Folge von endlichen Intervallmengen $\mathfrak{I}_\varkappa$ aus $\langle a, b\rangle$ derart, daß $\mathfrak{I}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_\varkappa$ und $\lim_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{I}_\varkappa| = 0$ ist, gilt*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varkappa\to\infty}} \int_{\mathfrak{I}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx = 0 \text{ [10]}. \tag{2}$$

Beweis zu Satz II. Es ist nur zu zeigen, daß mit der für die R-Begriffe formulierten Bedingung 2 auch die Bedingung $R\,3$ gilt und umgekehrt.

---

[10]) Oder statt (2): $\lim_{\varkappa\to\infty} \int_{\mathfrak{I}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx = 0$ existiert gleichmäßig für alle n.

1. Bedingung 2 sei erfüllt. Da jede Folge $\mathfrak{I}_\varkappa$, wie sie in $R\,3$ auftritt, eine spezielle Folge der in Bedingung 2 genannten Art ist, gilt dafür die Beziehung (2), d. h. Bedingung $R\,3$ ist ebenfalls erfüllt.

2. Bedingung $R\,3$ sei erfüllt. Bedeutet nun $\mathfrak{M}_\varkappa$ eine Folge R-meßbarer Teilmengen aus $\langle a, b\rangle$ derart, daß $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{M}_\varkappa$ und $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{M}_\varkappa| = 0$ ist, so läßt sich dieser Folge eine Folge endlicher Intervallmengen $\mathfrak{P}_\varkappa$ aus $\langle a, b\rangle$ derart zuordnen, daß $\mathfrak{M}_\varkappa$ Teilmenge von $\mathfrak{P}_\varkappa$ und $\mathfrak{P}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{P}_\varkappa$ sowie $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{P}_\varkappa| = 0$ ist, d. h. daß speziell für die Folge $\mathfrak{P}_\varkappa$ die Bedingung $R\,3$ befriedigt ist. Da für jedes n und jedes $\varkappa$

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx \leqq \int\limits_{\mathfrak{P}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx$$

ist, gilt die für die R-Begriffe formulierte Bedingung 2 auch für die spezielle Mengenfolge $\mathfrak{M}_\varkappa$.

Damit ist Satz II bewiesen.

Der entsprechend für die L-Begriffe formulierte Satz ist aber nicht zu halten, sondern es gilt, wenn $L\,3$ die für die L-Begriffe formulierte Bedingung $R\,3$ bedeutet (in $R\,3$ ist lediglich das R-Integral durch ein L-Integral zu ersetzen),

Behauptung B. Voraussetzung V_L sei erfüllt. Dafür, daß (g_n) für jedes beschränkte L-integrierbare $f(x)$ konvergiert, sind die Bedingungen $L\,1$ und $L\,3$ zwar notwendig, aber nicht hinreichend.

Beweis zu Behauptung B. Daß die Bedingungen $L\,1$ und $L\,3$ im behaupteten Umfang notwendig sind, folgt unmittelbar aus Satz I, da die Bedingungen 1 und $L\,1$ identisch sind und da die in $L\,3$ genannten Folgen $\mathfrak{I}_\varkappa$ spezielle Folgen der in Bedingung 2 vorgeschriebenen Art sind.

Daß $L\,1$ und $L\,3$ für die Konvergenz von (g_n) aber nicht hinreichend sind, belegt die im Beweise von Behauptung A angegebene Funktionenfolge $\varphi_n(x)$ zusammen mit der L-integrierbaren Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } \mathfrak{k}^0_\varkappa, \\ -1 & \text{auf } \mathfrak{l}^0_\varkappa, \\ 0 & \text{sonst auf } \langle 0, 1\rangle. \end{cases}$$

Denn hierfür ist

$$\int\limits_0^1 \varphi_n(x)\, f(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{3}.$$

Damit ist Behauptung B bewiesen.

Das zweite der oben angedeuteten Hahnschen Ergebnisse [11]), das bisher nur für die L-Begriffe bewiesen war, läßt sich auf die R-Begriffe ausdehnen, so daß für die L-Begriffe wie für die R-Begriffe gilt

Satz III. *Voraussetzung V sei erfüllt. Dafür, daß* (g_n) *für jedes beschränkte integrierbare* $f(x)$ *konvergiert, ist notwendig und hinreichend:*

4. *Für jede meßbare Teilmenge* $\mathfrak{M}$ *aus* $\langle a, b\rangle$ *existiert* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx$ [12]).

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz I, wenn für die L-Begriffe und für die R-Begriffe bewiesen ist

Satz IV [13]). *Unter Voraussetzung V gilt die Bedingung* 4 *genau dann, wenn die Bedingungen* 1 *und* 2 *erfüllt sind.*

Beweis zu Satz IV. 1. Die Bedingungen 1 und 2 seien erfüllt. $\mathfrak{M}$ sei eine feste meßbare Teilmenge aus $\langle a, b\rangle$.

Falls die R-Begriffe gelten, bestimmt man eine Folge endlicher Intervallmengen $\mathfrak{R}_\varkappa$ aus $\langle a, b\rangle$ derart, daß jedes $\mathfrak{R}_\varkappa$ Teilmenge von $\mathfrak{R}_{\varkappa+1}$ und von $\mathfrak{M}$ sowie $\lim\limits_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{M} - \mathfrak{R}_\varkappa| = 0$ ist. Nach Bedingung 2 gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ und ein $\varkappa_0(\varepsilon)$, so daß für $n \geqq n_0$ und $\varkappa \geqq \varkappa_0$

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx - \int\limits_{\mathfrak{R}_\varkappa} \varphi_n(x)\,dx\Big| \leqq \int\limits_{\mathfrak{M}-\mathfrak{R}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx < \varepsilon$$

ist. Weil nach Bedingung 1 bei jedem festen $\varkappa$ ein $n_1(\varkappa)$ derart existiert, daß für jedes $n > n' \geqq n_1(\varkappa)$

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{R}_\varkappa} \varphi_n(x)\,dx - \int\limits_{\mathfrak{R}_\varkappa} \varphi_{n'}(x)\,dx\Big| < \varepsilon$$

ist, so folgt bei festem $\varkappa \geqq \varkappa_0$ für jedes $n > n' \geqq n_0 + n_1$

$$\Big|\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx - \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_{n'}(x)\,dx\Big|$$

$$< \Big|\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx - \int\limits_{\mathfrak{R}_\varkappa} \varphi_n(x)\,dx\Big| + \Big|\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_{n'}(x)\,dx - \int\limits_{\mathfrak{R}_\varkappa} \varphi_{n'}(x)\,dx\Big| + \varepsilon < 3\,\varepsilon,$$

d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx$ existiert ebenfalls.

---

[11]) Hahn, a. a. O. S. 45, Satz XX b.

[12]) Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (g_n) Nullfolge ist, erkennt man im vorliegenden Fall: Für jede meßbare Teilmenge $\mathfrak{M}$ aus $\langle a, b\rangle$ strebt $\int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx \to 0$ für $n \to \infty$.

[13]) Hahn hat entsprechend gezeigt (a. a. O. S. 45, Satz XXI), daß die für die L-Begriffe formulierte Bedingung 4 unter der Voraussetzung V_L genau dann gilt, wenn die Bedingungen $L\,1$ und $L\,2$ erfüllt sind.

Falls aber die L-Begriffe gelten, bestimmt man eine Folge offener Mengen $\mathfrak{L}_\varkappa$, so daß $\mathfrak{M}$ Teilmenge von $\mathfrak{L}_\varkappa$ und $\mathfrak{L}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{L}_\varkappa$ sowie $\lim_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{L}_\varkappa - \mathfrak{M}| = 0$ ist. Nach Bedingung 2 gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ und ein $\varkappa_0(\varepsilon)$, so daß für jedes $n \geqq n_0$ und jedes $\varkappa \geqq \varkappa_0$ bei $\mathfrak{N}_\varkappa = \mathfrak{L}_\varkappa \cdot \langle a, b\rangle$

$$\Big|\int_{\mathfrak{N}_\varkappa} \varphi_n(x)\,dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx\Big| < \varepsilon$$

ist. $\varkappa$ sei nun fest $\geqq \varkappa_0$ gewählt. Der Menge $\mathfrak{N}_\varkappa$ läßt sich jetzt eine Folge endlicher Intervallmengen $\mathfrak{I}_m$ aus $\mathfrak{N}_\varkappa$ derart zuordnen, daß $\mathfrak{I}_m$ Teilmenge von $\mathfrak{I}_{m+1}$ und $\lim_{m\to\infty} |\mathfrak{N}_\varkappa - \mathfrak{I}_m| = 0$ ist. Nach Bedingung 2 gibt es weiter ein m_0 und ein $n_1 \geqq n_0$, so daß für jedes $m \geqq m_0$ und jedes $n \geqq n_1$

$$\Big|\int_{\mathfrak{N}_\varkappa} \varphi_n(x)\,dx - \int_{\mathfrak{I}_m} \varphi_n(x)\,dx\Big| < \varepsilon$$

ist. Aus den beiden vorangehenden Abschätzungen folgt für $m \geqq m_0$ und $n \geqq n_1$

$$\Big|\int_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx - \int_{\mathfrak{I}_m} \varphi_n(x)\,dx\Big| < 2\,\varepsilon.$$

Weil bei jedem festen m die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{I}_m} \varphi_n(x)\,dx$ nach Bedingung 1 gesichert ist, ergibt sich hieraus dann die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx$.

2. Die Bedingung 1 sei für ein festes ξ nicht erfüllt.

Dann ist Bedingung 4 für die spezielle Menge $\mathfrak{M} = \langle \xi, b\rangle$ ebenfalls nicht erfüllt.

3. Die Bedingung 2 sei nicht erfüllt.

Dann gibt es ein $\vartheta > 0$ und eine Folge meßbarer Teilmengen $\mathfrak{M}_\varkappa$ aus $\langle a, b\rangle$ derart, daß $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}$ Teilmenge von $\mathfrak{M}_\varkappa$ und $\lim_{\varkappa\to\infty} |\mathfrak{M}_\varkappa| = 0$ ist, sowie

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varkappa\to\infty}}} \int_{\mathfrak{M}_\varkappa} |\varphi_n(x)|\,dx \geqq \vartheta$$

gilt. Deshalb läßt sich eine monoton gegen $+\infty$ strebende Folge n_ν und eine monoton gegen $+\infty$ strebende Folge $\varkappa_\nu$ so bestimmen, daß für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $\mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{M}_{\varkappa_\nu}$

$$\int_{\mathfrak{N}_\nu} |\varphi_{n_\nu}(x)|\,dx \geqq \frac{24}{25}\,\vartheta \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathfrak{N}_{\nu+1}} |\varphi_{n_\nu}(x)|\,dx \leqq \frac{1}{25}\,\vartheta, \tag{3}$$

also für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{N}_\nu - \mathfrak{N}_{\nu+1}$

$$\int_{\mathfrak{P}_\nu} |\varphi_{n_\nu}(x)|\,dx \geqq \frac{23}{25}\,\vartheta \tag{4}$$

gilt. Jetzt bestimmt man eine meßbare Teilmenge $\mathfrak{Q}_1$ aus $\mathfrak{P}_1$ derart, daß $\varphi_{n_1}(x)$ auf $\mathfrak{Q}_1$ entweder nicht positiv oder nicht negativ und daß

$$\left|\int_{\mathfrak{Q}_1} \varphi_{n_1}(x)\,dx\right| \geqq \frac{11}{25}\,\vartheta \tag{5}$$

ist.

Hierauf setzt man voraus: Für $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu$ sei aus $\mathfrak{P}_\lambda$ eine meßbare Teilmenge $\mathfrak{Q}_\lambda$ derart ausgewählt, daß $\varphi_{n_\lambda}(x)$ auf $\mathfrak{Q}_\lambda$ entweder nicht positiv oder nicht negativ und daß für $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{Q}_1 + \ldots + \mathfrak{Q}_\lambda$ und $|\varphi_{n_0}(x)| \equiv 0$

$$\left|\int_{\mathfrak{S}_\lambda} \varphi_{n_\lambda}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{S}_\lambda} \varphi_{n_{\lambda-1}}(x)\,dx\right| \geqq \frac{5}{25}\,\vartheta$$

ist. Für $\lambda = \nu = 1$ ist diese Induktionsvoraussetzung nach (5) richtig. Wenn nun

$$\left|\int_{\mathfrak{S}_\nu} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{S}_\nu} \varphi_{n_\nu}(x)\,dx\right| \geqq \frac{5}{25}\,\vartheta \tag{6}$$

ist, gilt dieselbe Beziehung auch bei Integration über $\mathfrak{S}_{\nu+1} = \mathfrak{S}_\nu + \mathfrak{Q}_{\nu+1}$, wo $\mathfrak{Q}_{\nu+1}$ eine leere Menge ist. Sonst aber läßt sich nach (4) eine meßbare Teilmenge $\mathfrak{Q}_{\nu+1}$ von $\mathfrak{P}_{\nu+1}$ derart bestimmen, daß $\varphi_{n_{\nu+1}}(x)$ auf $\mathfrak{Q}_{\nu+1}$ entweder nicht positiv oder nicht negativ und daß

$$\left|\int_{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx\right| \geqq \frac{11}{25}\,\vartheta$$

ist. Für $\mathfrak{S}_{\nu+1} = \mathfrak{S}_\nu + \mathfrak{Q}_{\nu+1}$ folgt dann nach (4) und (6)

$$\begin{aligned}(7)\quad &\left|\int_{\mathfrak{S}_{\nu+1}} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{S}_{\nu+1}} \varphi_{n_\nu}(x)\,dx\right| \\ &\geqq \left|\int_{\mathfrak{Q}_{\nu+1}} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx\right| - \left|\int_{\mathfrak{S}_\nu} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{S}_\nu} \varphi_{n_\nu}(x)\,dx\right| - \int_{\mathfrak{N}_{\nu+1}} |\varphi_{n_\nu}(x)|\,dx \geqq \frac{5\,\vartheta}{25},\end{aligned}$$

d. h. es gibt eine der Induktionsvoraussetzung genügende unendliche Mengenfolge $\mathfrak{S}_\nu$.

Für die meßbare Summe $\mathfrak{M}$ der Glieder dieser Mengenfolge existiert aber $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_n(x)\,dx$ nicht, denn mit Hilfe von (3) und (7) folgt

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{M}} \varphi_{n_\nu}(x)\,dx\right| \\ &\geqq \left|\int_{\mathfrak{S}_{\nu+1}} \varphi_{n_{\nu+1}}(x)\,dx - \int_{\mathfrak{S}_{\nu+1}} \varphi_{n_\nu}(x)\,dx\right| - \int_{\mathfrak{N}_{\nu+2}} |\varphi_{n_{\nu+1}}(x)|\,dx - \int_{\mathfrak{N}_{\nu+2}} |\varphi_{n_\nu}(x)|\,dx \geqq \frac{3\,\vartheta}{25}.\end{aligned}$$

Damit ist Satz IV vollständig bewiesen.

Die in den vorangehenden Sätzen auftretenden Bedingungen sichern unter der Voraussetzung V die Konvergenz von (g_n) für jedes beschränkte integrierbare $f(x)$. In manchen Fällen läßt sich der entsprechende Grenzwert explizit angeben. So macht z. B. die Fußnote zu Satz 1 auf die von H. Lebesgue stammenden Bedingungen dafür aufmerksam, daß (g_n) eine Nullfolge ist. Für die L-Begriffe hat H. Hahn[14]), für die R-Begriffe und für die L-Begriffe habe ich[15]) weitergehende Sätze über den Grenzwert von (g_n) gegeben. Auf die Nennung dieser Sätze wird verzichtet, da ihr Vergleich keine wesentlich neuartigen Ergebnisse fördert.

[14]) Hahn, a. a. O. S. 45, Satz XX c, S. 51, Satz XXII c.

[15]) Raff, a. a. O. S. 624, Satz 4.

(Eingegangen am 26. Juni 1936.)

Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I.

Von

Arnold Scholz in Kiel.

Emmy Noether zum Gedächtnis.

Die Aufgabe, über einem gegebenen endlichen algebraischen Zahlkörper einen solchen mit vorgegebener Gruppe ungerader Primzahlpotenzordnung zu konstruieren, wird hier mit Hilfe des Richterschen Einbettungssatzes[1]) gelöst. Nach meinen früheren Ergebnissen[2]) kann man damit auch Körper mit beliebiger zweistufiger Gruppe ungerader Ordnung bilden, während ich das zuletzt[3]) nur von den zweistufigen Gruppen mit zwei Erzeugenden sagen konnte. Die jetzige Konstruktion wird in Schritten von Primzahlgrad l vor sich gehen, ohne daß sich l verzweigt, und zwar werden in 1. brauchbare hinreichende Bedingungen für eine Erweiterung l-ten Grades angegeben für den im Richterschen Satz vorgesehenen Fall, daß der Grundkörper die l-te Einheitswurzel ζ enthält. In 3. werden die l-ten Einheitswurzeln im Grundkörper entbehrlich gemacht und dann in 4. gezeigt, daß die Erweiterung l-ten Grades immer so gebildet werden kann, daß jedesmal die hinreichenden Bedingungen für eine Fortsetzung der Konstruktion erfüllt sind; beides auf Grund von 2., wo die an sich wichtige Frage, wie aus einer Erweiterung alle möglichen entstehen, beantwortet wird. Die Notwendigkeit der Konstruktionsbedingungen wird in 6. erörtert; es werden dann in 7. und 8. je eine l-Entwicklung der freien Gruppe von n Erzeugenden gegeben, in der jede l-Gruppe an endlicher Stelle auftritt; bei Konstruktionen in solcher Reihenfolge sind die in 1. gefundenen hinreichenden Bedingungen auch notwendig. 9. ordnet die Zweigkörperbildung aus[3]) in diesen Konstruktionsplan ein und erörtert die Lage für den quadratischen Fall.

---

[1]) H. Richter: Über die Lösbarkeit einiger nichtabelscher Einbettungsprobleme. Math. Annalen 112 (1935), S. 69—84, insbes. S. 72.

[2]) Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe. Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. 1929, Nr. 14.

[3]) A. Scholz, Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad ... II. Math. Annalen 110 (1935), S. 633—649.

Es sei gleichzeitig auf die Wittsche Lösung[4]) der entsprechenden Konstruktionsaufgabe in Funktionenkörpern gerade der Charakteristik l und seine gruppentheoretische Einteilung der Konstruktion hingewiesen. Das Konstruktionsproblem ist hier und dort allerdings sehr verschieden: während dort, nach dem Hauptergebnis von Witt, die Existenz von Körpern mit beliebiger l-Gruppe durch die Existenz des Abelschen Unterkörpers vom Typ $(l, l, \ldots, l)$ gesichert ist und von da aus jede Teilerweiterung beliebig vorgenommen werden darf, so setzt hier die Existenzfrage gerade an der Stelle ein, und jede Erweiterungsmöglichkeit ist von der passenden Auswahl der vorangehenden Erweiterung abhängig.

1. Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung l^m. Wir entwickeln $\mathfrak{G}$ in eine Hauptreihe

$$\begin{aligned} &\mathfrak{J} -\!\!< \mathfrak{G}_1 -\!\!< \mathfrak{G}_2 -\!\!< \ldots -\!\!< \mathfrak{G}_m = \mathfrak{G} \\ &= \mathfrak{C}_1 \cup \quad \mathfrak{C}_2 \cup \quad \ldots \quad \cup \mathfrak{C}_m, \end{aligned} \tag{1}$$

in der $\mathfrak{J}$ die Identifizierung (identische Faktorgruppe) bedeute und $\mathfrak{G}_{\mu-1} = \mathfrak{G}_\mu/\mathfrak{C}_\mu$ maximale echte Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_\mu$ sei ($\mathfrak{G}_\mu >\!\!- \mathfrak{G}_{\mu-1}$ eine „einfache Aufspaltung" von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$). Neben den zueinander inversen Faktorgruppen- und Aufspaltungszeichen, $-\!\!<$ und $>\!\!-$, verwenden wir wie oben das Zeichen $\cup$ für die absteigende Aneinanderreihung von Gruppenfaktoren. (Bei Krull[5]) findet sich $\cap$ im aufsteigenden Sinne.)

Da jede l-Gruppe ein nichtidentisches Zentrum besitzt, hat die Hauptreihe (1) lauter Faktoren $\mathfrak{C}_\mu$ der Ordnung l, und zwar liegt stets $\mathfrak{C}_\mu$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_\mu$, weshalb wir $\mathfrak{G}_\mu$ eine zentrale Erweiterung (Aufspaltung) von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ nennen. Wir können darum die Aufgabe, einen Körper mit beliebiger l-Gruppe $\mathfrak{G}_m$ zu bilden, auf die folgende zurückführen: einen Körper mit gegebener l-Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ in einen solchen mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ einzubetten, wo $\mathfrak{G}_\mu$ irgendeine Aufspaltung der Relativordnung l von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ ist. Dann ist die Gesamtkonstruktion in m Teilschritte zerlegt, und jedesmal ist der zur Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ konstruierte Normalkörper $K_{\mu-1}$ in einen über dem Grundkörper K_0 normalen Körper K_μ einzubetten, dessen Gruppe sich $\mathfrak{G}_\mu$ so isomorph zuordnen läßt, daß die alte Zuordnung zwischen $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ und der Galoisgruppe von $K_{\mu-1}$ dabei erhalten bleibt. — Dementsprechend werden wir zwei Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ erst dann als isomorphe Aufspaltungen ansehen, wenn sie sich so einander isomorph zuordnen lassen, daß $\mathfrak{G}$ dabei in Ruhe

---

[4]) E. Witt, Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f. Crelle Journ. **174** (1936), S. 237—245.

[5]) W. Krull, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 169.

(elementweise ungeändert) bleibt. $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ heißen dann $\mathfrak{G}$-Aufspaltungen vom „gleichen Typus“ [6]).

Der Richtersche Einbettungssatz (p-adische Fassung) besagt nun für unsere l-Gruppe, daß die der Aufspaltung $\mathfrak{G}_{\mu-1} -< \mathfrak{G}_\mu$ entsprechende Einbettung $K_{\mu-1} -< K_\mu$ unter der Voraussetzung, daß K_0 die l-ten Einheitswurzeln enthält, dann möglich ist, wenn für jede Primstelle p aus K_0 ein entsprechendes p-adisches Einbettungsproblem lösbar ist. Das bedeutet, wenn P_ν allgemein die p-adische Erweiterung von K_ν ist, deren Galoisgruppe isomorph zur Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_\nu$ eines p-Primteilers $\mathfrak{p}_\nu$ in K_ν ist: Einbettung von $P_{\mu-1}$ in einen P_μ mit einer Galoisgruppe, isomorph zu irgendeiner Untergruppe $\mathfrak{Z}_\mu$ von $\mathfrak{G}_\mu$ der Eigenschaft

$$\mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu / \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_{\mu-1}. \tag{2}$$

Dabei gibt es beim Übergang von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ zu $\mathfrak{G}_\mu$ folgende zwei Möglichkeiten:

α) $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ besitzt in $\mathfrak{G}_\mu$ ein Repräsentantensystem $\mathfrak{Z}_\mu$, das selbst eine Gruppe ist, so daß die Aufspaltung $\mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu$ von $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ das schiefdirekte Produkt von $\mathfrak{Z}_\mu$ und $\mathfrak{C}_\mu$ wird. (Weil $\mathfrak{C}_\mu$ im Zentrum liegt, gilt sogar $\mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_\mu \times \mathfrak{C}_\mu$.) Dann darf man dieses $\mathfrak{Z}_\mu$ in (2) wählen, und wegen der Isomorphie von $\mathfrak{Z}_\mu$ mit $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ bleibt $P_\mu = P_{\mu-1}$. In diesem Falle besteht also für p kein Einbettungsproblem.

β) Jedes Repräsentantensystem für $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ erzeugt bereits $\mathfrak{G}_\mu$. Das bedeutet $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu$; $\mathfrak{Z}_\mu / \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_{\mu-1}$. Es ist „das“ entsprechende Einbettungsproblem zu lösen. $\mathfrak{Z}_\mu$ heißt dann im Sinne von R. Brauer [7]) eine „reduzierte“ Aufspaltung von $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$, $\mathfrak{C}_\mu$ nach Burnside [8]) eine zur Erzeugung „entbehrliche Untergruppe“ von $\mathfrak{Z}_\mu$.

Die Zurückführung der Einbettung $K_{\mu-1} -< K_\mu$ auf diesen p-adischen Sachverhalt läßt sich zahlkörpertheoretisch wieder so ausdrücken:

Zahlentheoretische Fassung des Einbettungssatzes: *Die Einbettung $K_{\mu-1} -< K_\mu$ gelingt mit $K_0 > \zeta$ als Grundkörper, wenn sie über allen Zerlegungskörpern von $K_{\mu-1}/K_0$ gelingt.*

Dies ist nach der vorangesetzten Erörterung klar. Dabei ist die Einbettung trivialer Weise für die Zerlegungsgruppen möglich, bei denen $\mathfrak{C}_\mu$ als direkter Faktor auftritt. Aber auch für die anderen p vereinfacht sich im allgemeinen die Einbettungsaufgabe. Ist insbesondere p in $K_{\mu-1}$ nicht verzweigt, also seine Trägheitsgruppe $\mathfrak{T} = 1$ und etwa Ord $\mathfrak{Z} = f$,

---

[6]) A. Scholz, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe. Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 332—356, insbes. 337—340.

[7]) R. Brauer, Konstruktion der Schiefkörper von endlichem Rang, Crelle Journ. 168 (1932). S. 44—64.

[8]) Vgl. H. Wielandt, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 281—282.

so ist die Einbettungsaufgabe für p stets lösbar; denn dann handelt es sich unter β) nur darum, den Kongruenzkörper mod p vom Grade f in den vom Grade fl einzubetten. Also braucht man nur die verzweigten p zu betrachten. — Da wir ferner nur mit *einfach verzweigten* Körpern (Verzweigungsgruppe $\mathfrak{B} = 1$) operieren, d. h. hier $p \neq l$, sind alle Trägheitsgruppen zyklisch.

(Für die Gültigkeit der Richterschen Einbettungssatzes ist übrigens nur wesentlich, daß die Erweiterung $\mathfrak{G}_\mu > \mathfrak{G}_{\mu-1}$ zentral ist. Hat $K_{\mu-1}$ irgendeine Gruppe, und setzt sich $\mathfrak{C}_\mu$ aus irgend welchen zentralen zyklischen Bestandteilen zusammen, so muß nur K_0 die entsprechenden Einheitswurzeln enthalten, wie Satz 1 b in [1]) sagt.) — Es gilt nun ein

Spezieller Einbettungssatz: *Ist K/K_0 ein Normalkörper, in dem alle in K verzweigten Primideale* $\mathfrak{p}$ *aus K_0 Normen sind (in Primideale vom Relativgrad* 1 *zerfallen), und gilt $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\,(l^h)$, $h = h(\mathfrak{p})$, so sind alle zentralen Erweiterungen von K möglich, in denen die Trägheitssubstitution $T = T(\mathfrak{p})$ höchstens die Ordnung l^h erreicht — vorausgesetzt, daß K_0 wieder die entsprechenden Einheitswurzeln enthält; für unsere Konstruktion* (1) *also die l-ten Einheitswurzeln, die nachher allerdings entbehrlich werden.*

Dabei soll $N(\mathfrak{p}_\infty) = -1$ für unendliche Primstellen gesetzt werden; diese scheiden also für zyklische Verlängerungen aus.

Zusatz[8a]): Die Erweiterungen können wieder *einfach verzweigt* gewählt werden, wie in 5. hinter (18) gezeigt wird.

Um die bisherigen Bezeichnungen zu verwenden, führen wir den *Beweis* für $K = K_{\mu-1} \prec K_\mu$, wo wir den Satz wirklich brauchen. Da nach Voraussetzung Zerlegungs- und Trägheitsgruppe für die Verzweigten zusammenfallen, so ist nur die Einbettung ihrer zyklischen Trägheitskörper zu untersuchen, und zwar nur, soweit sie ihre Ordnung beim Übergang von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ zu $\mathfrak{G}_\mu$ „verlängern" (Fall $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{T}_\mu = \{T_\mu\}$; $\mathfrak{T}_{\mu-1} = \{T_{\mu-1}\}$; $T_{\mu-1} = T_\mu \mathfrak{C}_\mu$; Ord $T_{\mu-1} = l^{k-1}$; Ord $T_\mu = l^k$; $k \leqq h$). Es bleibt dann also nur die Behauptung, daß sich ein einfach verzweigter zyklischer Körper K_{h-1} vom Grade l^{h-1} in einen solchen vom Grade l^h einbetten läßt, wenn $N(\mathfrak{p}) \equiv 1$ (l^h) für die verzweigten $\mathfrak{p}$. (Für die nicht voll verzweigten $\mathfrak{p}$ genügt ein entsprechend niederer Exponent.) Diese nachher unter 6. als Aufgabe L formulierte Einbettungsmöglichkeit folgt z. B. klassenkörpertheoretisch aus meiner Lösung[9]) der D.M.V.-Aufgabe 169 und p-adisch aus der Richterschen Arbeit „Über Abelsche Körpereinbettungen"[10]), deren Voranzeige dies Ergebnis unter 1. bis 3.

[8a]) Einfügung vom Juni 1936.

[9]) A. Scholz, Jb. D.M.V. 45 (1935), S. *35—38*; Berichtigung S. *112*.

[10]) H. Richter, Math. Annalen 112 (1936), S. 700—726; Voranzeige: Jb. D.M.V. 45, S. 235.

enthält. Es darf dabei nach 3. die Einbettung, wie oben im speziellen Einbettungssatz, einen l-Potenzschritt vollziehen, oder es dürfen auch Einheitswurzeln im Grundkörper fehlen; nur für $l = 2$ darf man nicht beide Verallgemeinerungen beliebig verbinden.

Wir brauchten also zur Fortführung unserer Konstruktion jedesmal die Erweiterung K_μ nur so zu wählen, daß die Bedingungen des speziellen Einbettungssatzes erfüllt sind. Da sich ferner die Erweiterungen, wenn überhaupt, immer so durchführen lassen werden, daß die jeweiligen Führer zu einem vorgegebenen Ideal, insbesondere zu l, teilerfremd sind, so gelingt dann die Konstruktion bei beliebigem Grundkörper, wenn der spezielle Einbettungssatz auch für den rationalen Grundkörper richtig ist. Um beides zu erreichen, brauchen wir die folgenden Sätze, die uns die Frage beantworten:

Wie erhält man alle Erweiterungen K_μ von $K_{\mu-1}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ aus einer solchen?

2. Durchkreuzungssatz: *Es seien K' und K'' zwei Normalkörper über K_0, die Erweiterungen gleichen Typus' über ihrem Durchschnitt K seien, d. h. ihre Galoisgruppen lassen sich so einander isomorph zuordnen, daß die Galoisgruppe von K dabei keine Permutation erleidet. Ferner möge die Gruppe von K'/K im* Zentrum *der Gruppe von K'/K_0 liegen (also auch bei K''). Dann gibt es einen Körper K^0/K_0, dessen Gruppe isomorph zu der von K'/K ist, und für den*

$$K'K'' = K' \times K^0 = K'' \times K^0.$$

Umgekehrt erhält man aus einem K' alle K'' mit einer Gruppe gleichen Typus' und $[K', K''] = K$, indem man K' mit einem zu K' fremden Körper K^0 beliebig „durchkreuzt", d. h. $K' \times K^0$ bildet, irgendeine isomorphe Zuordnung $S^0 \sim S'$ der Gruppen von $K'K^0/K'$ und K^0K'/K^0K wählt und den zur Gleichung $S^0 = S'$ gehörigen Unterkörper K'' von $K'K^0$ nimmt (in dem S' dieselbe Substitution bewirkt wie S^0).

Indem man dabei K sämtliche zu einer Untergruppe des Zentrums der Gruppe von K' gehörigen Unterkörper von K' durchlaufen läßt, erhält man sämtliche ‚mit K' verwandten' K'', die aus irgendeiner Abelschen Durchkreuzung von K' entstehen[11]).

Relativierung: *Sollen im Durchkreuzungssatz K_0, K^0, K', K'' Normalkörper über einem niederen K_{00} sein, so muß nur die obengenannte isomorphe Zuordnung $S^0 \sim S'$ eine Operatorisomorphie nach der Gruppe von K_0/K_{00} ergeben, d. h. der Transformation von S^0 mit einer Substitution R von K_0/K_{00} muß auch die Transformation von S' mit R entsprechen. Besteht eine solche operatorisomorphe Zuordnung zwischen den Gruppen von*

[11]) Vgl. E. Witt, a. a. O.[4]), S. 241, Z. 25—29.

K^0/K_0 und K'/K, so läßt sich auch wirklich K' über K so mit K^0 durchkreuzen, daß wieder ein Normalkörper K'' über K_{00} entsteht.

Wohlgemerkt braucht in diesem Falle die Gruppe von K'/K nicht dem Zentrum von K'/K_{00} anzugehören.

Die Gültigkeit dieses Durchkreuzungssatzes ist eine rein gruppentheoretische Angelegenheit der Galoisgruppen der angeführten Körper, also nicht von der Eigenart der Körper abhängig. Er läßt sich gruppentheoretisch so formulieren:

Satz vom relativen Quadrat: *Gegeben seien zwei isomorphe zentrale Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{H}_2/\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{A}_1 < 3(\mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{A}_2 < 3(\mathfrak{H}_2)$; $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ isomorph so zuordenbar, daß dabei jedes Element von $\mathfrak{G}$ in sich übergeht). Dann läßt sich das relative Produkt $\mathfrak{H}^2$ von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, d. h. die kleinste Aufspaltung von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ als Faktorgruppen besitzt, — abstrakt das relative Quadrat des Aufspaltungstypus $\mathfrak{H} >\!-\, \mathfrak{G}$ — als direktes Produkt zweier Gruppen vom Typus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ darstellen.*

Dasselbe gilt für Gruppen mit Operatoren bei Operatorisomorphie und Operatorinvarianz der einzelnen Gruppen.

Die Umkehrung, daß alle $\mathfrak{H}_2$ aus $\mathfrak{H}_1$ auf dem Wege

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{H}_1 & -\!< & \mathfrak{H} \times \mathfrak{A} & >\!- & \mathfrak{H}_2 \\ & & \diagdown\!\diagup & & \\ & & \mathfrak{G} & & \end{array}$$

entstehen, ist bereits im Durchkreuzungssatz ausreichend formuliert.

Beweis: Das relative Produkt zweier Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{G}$ hat nach [6]) folgende Gestalt: Ist $\mathfrak{G} = \Sigma S$, $\mathfrak{H}_1 = \Sigma S' \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{H}_2 = \Sigma S'' \mathfrak{A}_2$ und dabei S' der Repräsentant für S in $\mathfrak{H}_1$, S'' für S in $\mathfrak{H}_2$, so haben im relativen Produkt $\overline{\mathfrak{H}}$ zwei Elemente $S' A_1$ und $S'' A_2$ als Stücke (Komplexe) von $\overline{\mathfrak{H}}$ dann einen Durchschnitt $[S' A_1, S'' A_2] = \overline{S}\,\overline{A}_1\,\overline{A}_2$, wenn S' und S'' aus demselben S von $\mathfrak{G}$ hervorgegangen sind. Insbesondere gilt dabei

$$[S', S''] = \overline{S}; \quad [A_1, E_2] = \overline{A}_1; \quad [E_1, A_2] = \overline{A}_2, \tag{4}$$

wenn E_1 und E_2 die Einheitselemente von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind. Die Komposition der Elemente in $\overline{\mathfrak{H}}$ läßt sich aus ihren Komponenten in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ablesen:

$$S T = V \begin{cases} S' A_1 \cdot T' B_1 = V' C_1 \\ S'' A_2 \cdot T'' B_2 = V'' C_2 \end{cases} \tag{5}$$

liefert

$$\overline{S}\,\overline{A}_1\,\overline{A}_2 \cdot \overline{T}\,\overline{B}_1\,\overline{B}_2 = \overline{V}\,\overline{C}_1\,\overline{C}_2. \tag{6}$$

Insbesondere ergibt eine definierende Relation $f(S) = 1$ in $\mathfrak{G}$, die $f(S') = H_1$ in $\mathfrak{H}_1$ $(H_1 < \mathfrak{A}_1)$ und $f(S'') = H_2$ in $\mathfrak{H}_2$ $(H_2 < \mathfrak{A}_2)$ lautet,

$$f(\overline{S}) = \overline{H}_1 \overline{H}_2 \text{ in } \overline{\mathfrak{H}}. \tag{7}$$

Sind $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ die Galoisgruppen der Normalkörper K_1 und K_2, $\mathfrak{G}$ die Gruppe ihres Durchschnitts, so ist $\overline{\mathfrak{H}}$ die Gruppe von $K_1 K_2$. Die Struktur von $\overline{\mathfrak{H}}$ ist durch den Typus von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ bekannt, noch nicht dagegen durch die Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{H}_2$ allein[6]).

Der körpertheoretische Durchkreuzungssatz ist dann eine unmittelbare Anwendung des gruppentheoretischen Satzes vom relativen Quadrat, wobei gegebenenfalls die Operatoren der Gruppe als die Substitutionen von K_0/K_{00} zu deuten sind. Wir brauchen daher nur noch den gruppentheoretischen Satz zu beweisen.

Wir gehen dabei von einem festen Isomorphismus $S' A_1 \sim S'' A_2$ zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ aus, und zwar treffen wir die Repräsentuntenwahl S'' für S so, daß $S'' \sim S'$ wird. Führt der Isomorphismus allgemein $A_1, B_1 \ldots$ aus $\mathfrak{A}_1$ in $A_2, B_2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}_2$ über, so liefert bei dieser Festlegung der Bezeichnungen schon eine in $\mathfrak{H}_1$ gültige Gleichung (5) die darunterstehende in $\mathfrak{H}_2$ und damit die resultierende (6) in $\mathfrak{H}^2$. Die Elemente $\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2$ in $\mathfrak{H}^2$, die dem Isomorphismus $A_1 \sim A_2$ genügen, bilden daher eine Gruppe $\mathfrak{H}_{12}$. Wir behaupten nun, es ist

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_{12} \times \overline{\mathfrak{A}}_2. \tag{8}$$

Jedenfalls liefert $\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{C}_2$ alle Elemente von $\mathfrak{H}^2$ genau einmal, wenn S, A_1, C_2 die Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ unabhängig einmal durchlaufen. Ferner ist $\overline{C}_2$ mit $\overline{S}\,\overline{A}_1\overline{A}_2$ vertauschbar, nämlich erstens mit den Elementen $\overline{A}_2$ derselben Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}_2$, mit $\overline{A}_1$ wegen $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_1 \times \overline{\mathfrak{A}}_2$, schließlich mit $\overline{S}$ aus folgendem zentralen Grunde: weil C_2 dem Zentrum von $\mathfrak{H}_2$ angehört, gilt dort $C_2 S'' = S'' C_2$, also $\overline{C}_2\overline{S} = \overline{S}\,\overline{C}_2\overline{C}_1$ in $\mathfrak{H}^2$ und dann $S' = S' C_1$ in $\mathfrak{H}_1$. Also ist $\overline{C}_1 = 1$. Damit ist (8) bewiesen.

Ist weiter $\mathfrak{H}_1$ mit Operatoren R versehen, $\mathfrak{G}$ eine R-invariante Faktorgruppe von $\mathfrak{H}_1$, und $\mathfrak{H}_2$ eine zu $\mathfrak{H}_1$ R-isomorphe Aufspaltung von $\mathfrak{G}$, so ist mit $\mathfrak{A}_2$ auch $\overline{\mathfrak{A}}_2$ R-invariant, ebenfalls $\mathfrak{H}_{12}$, weil $(\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2)^R = \overline{T}\overline{B}_1\overline{C}_2$ mit $B_1 \dotplus C_2$ auch

$$(S' A_1)^R = T' B_1 \dotplus T'' C_2 = (S'' A_2)^R$$

zur Folge hätte. — Damit besteht aber auch Operatorisomorphie zwischen $\mathfrak{H}_{12}$ und $\mathfrak{H}_1$ und, w. z. b. w., zwischen $\mathfrak{H}^2/\mathfrak{H}_{12}$ und $\mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{A}_1$.

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{G} = \Sigma S$, $\mathfrak{H} = \Sigma S' A$ gegeben und $\mathfrak{C} = \Sigma C$ eine zu $\mathfrak{A} = \Sigma A$ isomorphe Gruppe, so bilde man das absolute Produkt von $\mathfrak{H}$

und $\mathfrak{C}$ (Galoisgruppe zweier teilerfremder Normalkörper mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{C}$ als Gruppe), das sich $\overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}$ darstellt mit

(9) $\qquad \mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}/\overline{\mathfrak{C}}, \quad \mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}/\overline{\mathfrak{H}}; \quad \overline{\mathfrak{H}} = \Sigma \overline{S} \overline{A}, \quad \overline{\mathfrak{C}} = \Sigma \overline{C}.$

Jede (operator-) isomorphe Zuordnung von $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ liefert dann durch Identifizierung entsprechender Elemente $\overline{A} = \overline{C}$ eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Aufspaltung $\Sigma S'' B$ von $\mathfrak{G}$, und jede Durchkreuzung bestimmt eindeutig eine isomorphe Zuordnung. Die Anzahl der Durchkreuzungsmöglichkeiten mit einer einzigen zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{C}$ ist also gleich der Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$. Deutet man alle Gruppen entsprechendermaßen als Galoisgruppen der im Durchkreuzungssatz genannten Körper, so erhält man auf diese Weise die Anzahl der Körper K'', die aus K' bei Durchkreuzung mit einem festen K^0 hervorgehen und dabei mit K' genau den Durchschnitt K haben. (Ist nur $K'' > K$, $K'' K^0 = K' K^0$ gefordert, so muß man die Anzahl der *homomorphen* Zuordnungen von $\mathfrak{A}$ *in sich* nehmen.)

Wir werden im folgenden ($l \neq 2$) ohne Operatoren auskommen. Wichtig ist aber noch die

Bemerkung: Innerhalb der Kommutatorgruppe zweier $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ gleichen Typus ist die Zuordnung $A_1 \sim A_2$ unabhängig von der Durchkreuzung: Jedes erzeugende S'' könnte statt S' allenfalls einem $S' A_1$ zugeordnet werden. Bei Abänderung $S' \to S' A_1$, $T' \to T' B_1$ geht aber der Kommutator (S', T') in sich über.

Ist speziell $\mathfrak{A}$ eine Gruppe $\{A_1, \ldots, A_r\}$ von r Erzeugenden der Ordnung l, während $\mathfrak{H} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ eine Gruppe von l-Potenzordnung mit genau n Erzeugenden ist, so hat man die l^{nr} Automorphismen

(10) $\qquad S_\nu \to S_\nu \Pi A_\varrho^{t_{\nu\varrho}} \; (1 \leqq \nu \leqq n; \quad 1 \leqq \varrho \leqq r; \quad 0 \leqq t_{\nu\varrho} < l),$

die die Faktorgruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{A}$ in Ruhe lassen; vgl. Witt[4]), S. 238. Bereits die Wittsche Untergruppe $\mathfrak{H}^* = \{S_1^l, \ldots, S_n^l\}$ geht hier elementweise in sich über.

Wir können uns im folgenden auf Kommutatoraufspaltungen

$$\mathfrak{G} -< \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A} = \mathfrak{H};$$

$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}'$ beschränken, indem wir in der Hauptreihe (1) die maximale Abelsche Faktorgruppe auftreten lassen und dementsprechend die Konstruktion des Abelschen Teilkörpers von $\mathfrak{G}_m$ nach Vorschrift des speziellen Einbettungssatzes an die Spitze stellen.

3. Aufgabe: *Gegeben ein absolut normaler, einfach verzweigter Körper Γ mit l-Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}$ sei eine zentrale Kommutatoraufspaltung l-ter Ordnung von $\mathfrak{G}$, d. i. Faktor einer Schurschen Darstellungsgruppe*[12]) *von $\mathfrak{G}$.*

[12]) J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Crelle Journ. **127** (1904), S. 20—50; **132** (1907), S. 85—137; vgl. hier **132**, S. 85.

n Γ seien alle Diskriminantenteiler p Idealnormen, und es gelte $p \equiv 1 (l^h)$, o l^h etwa gleich die höchste in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{R} > - \mathfrak{H}$ vor-ommende Ordnung sei. Es soll Γ in einen Γ' mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ einge-ettet werden.

Lösung: Wir adjungieren ζ und betten $K = \Gamma(\zeta)$ in einen K' mit ler Gruppe $\mathfrak{H}$ über $K_0 = \mathsf{P}(\zeta)$ ein. Das geht, weil auch in K/K_0 die Bedingungen des speziellen Einbettungssatzes erfüllt sind. Nun bilden wir den absoluten Normalkörper $\overline{K} = K' K'' \dots K^{(l-1)}$, dessen Teilkörper $K'', \dots, K^{(l-1)}$ aus K' durch die Substitutionen $R, \dots, R^{l-2}$ ($R^{l-1} = 1$) von $\mathsf{P}(\zeta)$ hervorgehen. Dann zentrieren wir $\overline{K}$, d. h. wir bilden den zur Gruppe der $(R-1)$-ten Potenzen der Substitutionen von $\overline{K}/K$ gehörigen Unterkörper $\widetilde{K}$, dessen Gruppe über K im Zentrum seiner absoluten Gruppe liegt. Wir behaupten: *der absolut normale Körper $\widetilde{K}$ hat gleich K' eine Gruppe $\mathfrak{H}$ über K_0, und es gilt $\widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$, wo Γ' ein Körper mit absoluter Gruppe $\mathfrak{H}$ ist*, und zwar ist Γ' *einfach verzweigt*, wenn man K'/K_0 nach dem Zusatz des Speziellen Einbettungssatzes einfach verzweigt wählt[8a]).

Seien nämlich etwa $K', K'', \dots, K^{(r)}$ noch voneinander unabhängige Erweiterungen von K, während der durch R^r aus K' hervorgehende $K^{(r+1)}$ in $K' K'', \dots, K^{(r)}$ liegt, so liegt auch $K^{(r+2)}$ in $K'' \dots K^{(r)} K^{(r+1)} < K' \dots K^{(r)}$ u. s. f. Also ist $K' K'' \dots K^{(r)} = NK' = \overline{K}$. War A die erzeugende Substitution von K'/K, so sei jetzt $\overline{A}$ diejenige Substitution von $\overline{K}$, die A in K' bewirkt, K'' bis $K^{(r)}$ aber in Ruhe läßt. $\overline{A}^R$ permutiert dann K'' und läßt K''' bis $K^{(r)}$ in Ruhe; allgemein permutiert $\overline{A}^{R^\varrho}$ ($\varrho = 0, \dots, r-1$) den Körper $K^{(\varrho+1)}$ und läßt $K^{(\varrho+2)}$ bis $K^{(r)}$ in Ruhe. Daraus folgt aber, daß $\overline{A}, \overline{A}^R, \dots, \overline{A}^{R^{r-1}}$ linear unabhängig sind; denn $\overline{A}^{R^\sigma}$ ist keine Linearverbindung der $\overline{A}^{R^\varrho}$ ($0 \leqq \varrho < \sigma$), weil es $K^{(\sigma+1)}$ permutiert, während die $\overline{A}^{R^\varrho}$ es in Ruhe lassen. Also bilden $\overline{A}, \overline{A}^R, \dots, \overline{A}^{R^{r-1}}$ eine Basis für die Abelsche Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{K}/K$, die sich daher aus $\overline{A}$ symbolisch erzeugen läßt: $\overline{\mathfrak{A}} = \Sigma \overline{A}^{F(R)}$. Ist dabei $\overline{A}^{R^r} = \prod_{\varrho=0}^{r-1} A^{R^\varrho h_\varrho}$, so hat $\overline{A}$ als symbolische Ordnung das Ideal $(l, H(R))$ mit

$$H(R) = R^r - h_{r-1} R^{r-1} - \dots - h_1 R - h_0 \equiv (R - a_1) \dots (R - a_r)$$

mod l, weil $\overline{A}^{R^{l-1}-1} = 1$, also $H \mid R^{l-1} - 1 \bmod l$.

Die Zentrierung von $\overline{\mathfrak{A}}$ bedeutet nun: Bildung der Faktorgruppe mit der Relation $\overline{A}^{R-1} = 1$. Dann bleibt von $\overline{\mathfrak{A}}$ nur was übrig, wenn $R - 1 \mid H$, also 1 eine der Wurzeln $a_1, \dots, a_r$ ist. Wir zeigen nun: es fällt wirklich ein $a_\varrho = 1$ aus, wenn A im Kommutator von $\mathfrak{H}$ liegt.

Man kann $\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{A}_1\} \times \{\overline{A}_2\} \times \ldots \times \{A_r\}$ in absolut invariante zyklische Faktoren der Ordnungen $(l, R - a_\varrho)$ zerlegen. Sei nun $a_r \not\equiv 1$, und bildet man die Faktorgruppe $\mathfrak{A}_r = \overline{\mathfrak{A}} / \prod_{\varrho < r} \{\overline{A}_\varrho\}$, so ist $\mathfrak{A}_r$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{H}_r = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}_r$, was so folgt: $\overline{K}$ ist eine zentrale Erweiterung von K über K_0; $\mathfrak{A}_r$ liegt daher im Zentrum von $\mathfrak{H}_r$, und unsere Behauptung ist richtig, wenn wir ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{A}_r$ in $\mathfrak{H}_r$ angeben können, das eine Gruppe bildet. Nun sind die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ im Gegensatz zu denen von $\mathfrak{A}_r$ gegenüber R invariant, und daher gilt für jedes S in $\mathfrak{H}_r$ eine Transformation $S^R = S A_r^c$. Löst dann x die Kongruenz $(a_r - 1)\, x \equiv c \bmod l$, so ist $S A_r^{-x}$ gegen R invariant. Da die Lösung x eindeutig ist, so bilden die gegen R invarianten Elemente von $\mathfrak{H}_r$ gerade eine vollständige Restgruppe mod $\mathfrak{A}_r$. Somit gilt $\mathfrak{H}_r = \overline{\mathfrak{G}} \times \mathfrak{A}_r$, und der Körper K_r mit der Gruppe $\mathfrak{H}_r$ ist daher eine K_0-Klassenkörpererweiterung von K, d. h. $K_r = K(\sqrt[l]{\alpha_r})$ mit α_r aus K_0. Wären nun alle $a_1, \ldots, a_r \not\equiv 1$, so wäre damit auch $\overline{K}$ eine solche Klassenkörpererweiterung $K(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_r})$, während doch der darin enthaltene Körper K' eine Kommutatorerweiterung sein sollte. Also muß etwa $a_1 = 1$ sein.

Nun haben wir nur noch zu zeigen, daß der zu $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_1$ gehörige Körper $\widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ zerfällt, daß also $\mathfrak{H}_1$ direkter Faktor von $\{R\} \cup \mathfrak{H}_1$ und eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Aufspaltung von $\mathfrak{G}$ ist. Das erste ist bei einfacher Verzweigtheit von $\widetilde{K}/K_0$ und wegen Ord $R = l - 1$ auch sonst richtig wenn $\mathfrak{H}_1$ bei R in Ruhe bleibt. Das ist diesmal jedenfalls für $\mathfrak{A}_1$ der Fall, und daher hängt die Transformation $S^R = S A_1^c$ nur von der Restklasse mod $\mathfrak{A}_1$ ab, liefert dann aber $S^{R^\lambda} = S A_1^{c\lambda}$, und es ist wegen $R^{l-1} \equiv 1$ auch $c \equiv 0\,(l)$. Zweitens ist $\widetilde{K}$ mit K' verwandt $(\mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{H})$; nämlich es geht K' in $\widetilde{K}$ bei einer passenden Durchkreuzung mit den Körpern $K(\sqrt[l]{\alpha_2}), \ldots, K(\sqrt[l]{\alpha_r})$ über, deren Gruppen $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ über K vom oben erörterten Typus $\mathfrak{A}_r$ sind; denn es gilt

$$\widetilde{K} \times \prod_{\varrho > 1} K(\sqrt[l]{\alpha_\varrho}) = K' \times \prod_{\varrho > 1} K(\sqrt[l]{\alpha_\varrho}) = \overline{K}. \tag{11}$$

$\widetilde{K}$ geht also aus K' jedenfalls bei iterierter Durchkreuzung hervor, die sich natürlich durch eine mit einem $K(\sqrt[l]{\alpha})$ ersetzen läßt. (Bei $r = 1$ ist $\widetilde{K} = K'$.) — Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung: Im Falle $h > 1$, $l \neq 2$ kann man entsprechend schließen, daß die Gruppe der $(R - 1)$-ten Potenzen in $\overline{\mathfrak{A}}$ den vollen

Index l^h besitzt, und daß der zugehörige zentrierte Körper $\tilde{K}$ ein absolut normaler Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ über K_0 ist. Man kann aber nicht mehr $\tilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ behaupten; denn eine erzeugende Substitution S von $\tilde{K}/K_0$ kann mit der Trägheitssubstitution R von l einen Kommutator A^{l^a} haben. Ist dieser $\neq 1$, so erhält man entweder nur ein l-verzweigtes Γ' oder gar kein Γ'. In beiden Fällen würde aber auch bei der Abspaltung $K = K_0 \times \Gamma$ die einfach verzweigte Lösung Γ die Eigenschaft lokaler Erweiterbarkeit verlieren, der Richtersche Satz infolgedessen nicht in P ungültig werden. — Für $l = 2$ müßte man sich, um mit der erzeugenden Substitution R des reellen Unterkörpers der 2^h-ten Einheitswurzeln ebenso operieren zu können, auf total reelle K' beschränken.

Herstellung einer Minimalverzweigung: Hat man ein $\Gamma' > \Gamma$ gefunden, dessen Gruppe die zentrale Kommutatoraufspaltung $\mathfrak{H} > \mathfrak{G}$ ist, und hat Γ'/Γ vom Relativgrad $l \neq 2$ einen Führer $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' q$ mit einem in Γ noch nicht verzweigten Primzahlteiler $q \neq l$, so läßt sich Γ' so mit K_q^l, dem Unterkörper l-ten Grades der q-ten Einheitswurzeln durchkreuzen, daß sich der Führer auf $\mathfrak{f}'$ reduziert. (Der Führer $\mathfrak{f}$ ist ein invariantes Ideal, also ein Primzahlpotenzprodukt mit rationalen Exponenten, die ganz sind, soweit die Primzahlen in Γ unverzweigt sind, insbesondere eins für $q \neq l$.)

Beweis[12a]): Jedenfalls muß $q \equiv 1\,(l)$ gelten, weil $N(q) \equiv q\,(l)$ im Körper von l-Potenzgrad. Also existiert der Körpex K_q^l, mit dem wir die Durchkreuzung ausführen wollen. Wir schließen nun so: Weil Γ' Zentralkörper ist, hängt die Idealklasse eines (α) in Γ bezüglich Γ' nur von seiner Norm a ab; alle α^{S-1}, sogar alle $\mathfrak{j}^{S-1}$, S Substitution von Γ, gehören der Idealgruppe von Γ' an. Ist nun, wie wir annehmen, q noch nicht in Γ verzweigt, so ist jede zu q prime rationale Zahl Normenrest mod q einer Zahl aus Γ. Durchläuft daher ϱ alle zu q primen Reste in Γ und r in P, so gilt Faktorgruppenisomorphie

$$\{r\}/\{r^l\} \sim \{\varrho\}/\{\varrho^{S-1}, \varrho^l\}. \tag{13}$$

Also können sich speziell die $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ für jeden Klassenkörper $\tilde{\Gamma}/\Gamma \bmod \mathfrak{f}$, der absoluter Normalkörper ist, auf höchstens l Idealklassen verteilen, müssen es aber auch, wenn $\mathfrak{f}$ der genaue Führer ist. Erweitert man jetzt Γ' mit K_q^l, so liegt nach dem Ebengesagten wieder nur eine Verteilung der $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ auf l Idealklassen für $\Gamma' K_q^l/\Gamma$ vor. Diejenigen Idealklassen von $\Gamma' K_q^l/\Gamma$, die Zahlideale (α) mit $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ enthalten, bilden daher eine Untergruppe der Ordnung l, zu der ein Klassenkörper

[12a]) Abänderung und Einfügung vom Juni 1936.

$\Gamma''/\Gamma \bmod \mathfrak{f}'$ gehört, der der Gleichung $\Gamma'' K_q^l = \Gamma' K_q^l$ genügt; Γ'' geht also aus Γ' mittels Kreiskörperdurchkreuzung hervor und hat nur noch den Führer $\mathfrak{f}'$.

Ebenso läßt sich mit einem etwaigen Teiler $l^z/\mathfrak{f}$ statt q verfahren, da l nach Voraussetzung in Γ unverzweigt ist. Es gilt dann (13) auch $\bmod l^z$, d. h. aber $\bmod l^2$, da (13) eine Isomorphie zwischen Gruppen der Ordnung l ist und aus $\xi \equiv 1\,(l^2)$ schon $\xi \equiv \alpha^l\,(l^z)$ folgt. Also ist $z = 2$, und es ist in den auf (13) folgenden Ausführungen nur K_q^l durch $K_{l^2}^l$ zu ersetzen. Bei passender Durchkreuzung mit $K_{l^2}^l$ wird dann $\mathfrak{f}$ von l befreit.

Wir können daher auch darauf verzichten, $K'/\Gamma(\zeta)$ von vornherein einfach verzweigt zu konstruieren — dann münden wir auf den Reichardtschen Konstruktionsweg [13]), brauchen 5. hier nicht heranzuziehen, und die Konstruktion ist mit 4. abgeschlossen — indem wir nach der Zentrierung $K' \to \tilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ gegebenenfalls Γ' mit $K_{l^2}^l$ durchkreuzen; etwaige höhere l-Faktoren des K'/K-Führers sind nach dem obigen Beweis schon bei der Zentrierung herausgefallen.

Insgesamt kann man also mittels passender Kreiskörperdurchkreuzung von Γ' alle Primteiler des Führers von Γ'/Γ beseitigen, die nicht schon in Γ verzweigt sind. Insbesondere kann man einen absoluten Klassenkörper K'/K erhalten, wenn die erzeugende Substitution von Γ'/Γ nicht Potenz einer Trägheitssubstitution von Γ wird, aber auch nur dann; denn der in Γ verzweigte Bestandteil des Führers liegt fest als Produkt der Primideale, die in Γ' ihre Trägheitsgruppe verlängern (vgl. 5.).

4. Endgültige Konstruktion. Gegeben eine l-Gruppe $\mathfrak{G}_m$ in der Gestalt (1). $l \neq 2$. Zu konstruieren ein absoluter Normalkörper mit dieser Gruppe. Es liege bereits ein einfach verzweigter Körper $K_{\mu-1}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ vor, dessen Diskriminantenteiler p voll zerfallen sind und einzeln $\equiv 1\,(l^h)$ ausfallen, wenn die zugehörigen Trägheitssubstitutionen in $\mathfrak{G}_m$ maximal die Ordnung l^h erreichen. Es gibt dann nach 1. und 3. bestimmt einen Körper K_μ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$.

Behauptung: *K_μ läßt sich so durchkreuzen, daß wieder alle Diskriminantenteiler voll zerfallen und $\equiv 1\,(l^h)$ ausfallen.*

Beweis: Zunächst wissen wir nach dem Letztbewiesenen, daß wir K_μ so durchkreuzen können, daß sein Führer in $K_{\mu-1}$ höchstens aus dort

---

[13]) Wie mir H. Reichardt mitteilt, erhält er die Gültigkeit des Einbettungssatzes für den rationalen Grundkörper durch eigene hyperkomplexe Betrachtungen ohne Heranziehung des Richterschen Satzes. Seine Darstellung wird im Crelle Journ. 176 erscheinen.

schon verzweigten Primidealen besteht. Diese behalten von $K_{\mu-1}$ her in K_μ die behaupteten Zerfallseigenschaften. Die übrigen in $K_{\mu-1}$ verzweigten $p_\tau = N(\mathfrak{p}_\tau)$; $\tau = 1, \ldots, t$, können freilich in K_μ teils unzerfallen bleiben. Ist dabei $C_\mu^{a_\tau}$ die Frobenius-Substitution von $\mathfrak{p}_\tau$ (sowie von allen Konjugierten zu $\mathfrak{p}_\tau$, da ja C_μ im Zentrum von $\mathfrak{G}_\mu$ liegt), so durchkreuzen wir $K_\mu/K_{\mu-1}$ mit einem Kreiskörper K_q^l folgender Eigenschaft:

α) q zerfalle voll in $M = K_{\mu-1}(\zeta_{l^h})$, wenn C_μ in $\mathfrak{G}_m$ maximal die Ordnung l^h erreicht.

β) Darüber hinaus zerfalle q voll in $M(\sqrt[l]{P})$, wo P diejenigen Potenzprodukte $\Pi \mathfrak{p}_\tau^{x_\tau}$ durchläuft, deren Exponenten der Kongruenz $\Sigma a_\tau x_\tau \equiv 0 \,(l)$ genügen, für die also die Artin-Substitution

$$\left(\frac{K_\mu/K_{\mu-1}}{\Pi \mathfrak{p}_\tau^{x_\tau}}\right) = 1$$

ist,

γ) zerfalle aber nicht weiter im vollen $M(\sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_t})$, wenn irgendein $a_\tau \not\equiv 0 \,(l)$.

(Sind alle $a_\tau = 0$, kann die Durchkreuzung unterbleiben.)

q kann diese Bedingungen erfüllen, wenn $M(\sqrt[l]{p_1}), \ldots, M(\sqrt[l]{p_t})$ unabhängig sind. Dies ist aber der Fall: Andernfalls müßte nämlich irgendein $\sqrt[l]{P_0}$, $P_0 = \Pi \mathfrak{p}_\tau^{c_\tau}$, in M liegen. Nun liegt aber die erzeugende Substitution R von $\mathsf{P}(\zeta_{l^h})$ im Zentrum der Gruppe von M, während sie die Substitution $(\sqrt[l]{P_0} \to \zeta \sqrt[l]{P_0})$ in $(\sqrt[l]{P_0} \to \zeta^v \sqrt[l]{P_0})$, v Primitivwurzel mod l^2, transformiert. Also liegt kein $\sqrt[l]{P_0}$ in M (überhaupt nicht in einem Körper, der ein Produkt von Normalkörpern vom Primzahlpotenzgrad ist!).

Ist jetzt $a_1 \not\equiv 0 \,(l)$, p_1 also nach β) und γ) unzerfallen in K_q^l, und ist T^{a_1} die zu p_1 gehörige Substitution in K_q^l, so erfüllt die in der Bezeichnungsweise von (9) zu $\overline{T}\,\overline{C} = 1$ gehörige Durchkreuzung $K'_\mu < K_\mu K_q^l$ unsere Bedingungen: Da q unter β) so gewählt ist, daß mit $p_1 \to T^{a_1}$ auch $p_\tau \to T^{a_\tau}$ zugeordnet ist (in Kongruenzen: $p_\tau \equiv v^{a_\tau} w_\tau^l$; v Primitivrest mod q), so gehört ein Primteiler von $\mathfrak{p}_\tau$ in $K_{\mu-1}$ zur Substitution $(\overline{T}\,\overline{C})^{a_\tau}$ von $K_\mu K_q^l$, zerfällt also voll in $K'_\mu/K_{\mu+1}$. Schließlich ist q selbst so gewählt, daß es in K'_μ voll zerfällt und $\equiv 1 \,(l^h)$ ist. Damit ist alles bewiesen!

5. Der Charakter ψ. Die Möglichkeit bei der oben gelieferten Konstruktion, die im vorletzten Körper K_{m-1} noch unverzweigten Primteiler

des Führers von K_m/K_{m-1} durchweg zu beseitigen, den Führer also auf das Produkt $\mathfrak{v}$ der eigenen in K_{m-1} verzweigten Primteiler zu reduzieren, liegt am Nichtvorhandensein von Einheiten und Idealklassen der Ordnung l in P. Bei beliebigem Grundkörper, überhaupt bei $l = 2$, definiert hingegen bei gegebenem K/K_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ jede realisierbare zentrale Aufspaltung $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}$ mit zyklischem $\mathfrak{A}$ der Ordnung l^h in K_0 einen Charakter ψ, der jeder Zahl γ_0 in K_0, die dort eine l^h-te Idealpotenz ist und außerdem Normenrest mod $\mathfrak{v}$ (in K verzweigtem Ideal, das sich in $\mathfrak{H}$ weiter verzweigen muß), eindeutig eine Substitution $\psi(\gamma_0) = A$ aus $\mathfrak{A}$ zuordnet, die für l^h-te Zahlpotenzen 1 ist:

Es sei K' irgendein Körper mit $\mathfrak{H} >\!- \mathfrak{G}(K)$ als Gruppe. Wir betrachten die zum Klassenkörper K'/K gehörige Idealklasseneinteilung in K und setzen $\chi(\alpha) = A$, wenn A die zum Hauptideal (α) gehörige Artin-Substitution ist. Dieser Charakter χ, der für alle zum Führer $\mathfrak{f}(K'/K)$ fremden Zahlen definiert ist, hat die Ordnung l^{h_1}, wenn K' über dem Trägheitskörper von K'/K den Grad l^{h_1} hat; der Trägheitskörper ist dabei der absolute Klassenkörperteil von K'/K_0, der bei $h = h_0 + h_1$ den Grad h_0 hat.

Ferner gilt

$$\chi(\alpha^S) = \chi(\alpha)$$

für beliebig in K konjugierte Zahlen, weil K' zentral über K ist. Wegen der eindeutigen Primidealzerlegung hängt dann χ nur von $N(\alpha)$ ab. — Jetzt definieren wir für die Zahlen

$$\alpha_0 \equiv N(\alpha) \bmod \mathfrak{f},$$

das sind unter den zu $\mathfrak{f}$ fremden Resten die Normenreste mod $\mathfrak{v}$, den Charakter

$$\psi(\alpha_0) = \chi(\alpha). \tag{15}$$

Für beliebige Normenreste α_0 wird der Charakter von der Wahl von K' abhängen, nicht dagegen für die l^h-ten Idealpotenzen γ_0 unter den Normenresten mod $\mathfrak{v}$ [soweit der Charakter definiert, d. h. $(\gamma_0, \mathfrak{f}) = 1$ ist], unter die vor allem die Einheiten-Normenreste mod $\mathfrak{v}$ gehören:

Es seien K' und K'' zwei verwandte Körper mit den Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, die also zwei zur abstrakten Aufspaltung $\mathfrak{H} >\!- \mathfrak{G}$ isomorphe Aufspaltungen sind. Die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zu $\mathfrak{H}$ liege fest. Die zu K' und K'' gehörigen Charaktere $\chi'(\alpha)$ und $\chi''(\alpha)$ bezeichnen wir mit bezug auf diese Zuordnung einfach durch die Elemente A der abstrakten Gruppe $\mathfrak{A}$. Ebenso $\psi'(\alpha_0) = \chi'(\alpha)$, $\psi''(\alpha_0) = \chi''(\alpha)$ bei $\alpha_0 \equiv N(\alpha) \bmod \mathfrak{v}$. (Unabhängig von der Zuordnung $A_1 \sim A_2 \sim A$ sind diese Charaktere bestimmt für $\mathfrak{A} < \mathfrak{H}'$, welcher Fall uns ja hauptsächlich interessiert.) Nach 2. entsteht nun K'' aus K' bei Durchkreuzung über K

mit einem K^0/K_0, dessen Gruppe $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Bei passender isomorpher Zuordnung $C \to A$ liefert dann die Durchkreuzung

$$\begin{aligned} &\chi'(\alpha) \cdot \chi^0(\alpha) = \chi''(\alpha) \quad \text{in } K, \\ &\psi'(\alpha_0) \cdot \psi^0(\alpha_0) = \psi''(\alpha_0) \quad \text{in } K_0, \end{aligned} \tag{16}$$

wobei α_0 in K_0 zur Substitution C von K^0/K_0 und dann α in K zur entsprechenden Substitution $\overline{C}$ von KK^0/K gehöre, während χ^0 und ψ^0 das nach der obigen Zuordnung $C \to A$ zugehörige Element A von $\mathfrak{A}$ bedeute. Nun muß aber $\psi^0(\gamma_0) = 1$ gelten, weil K^0 Klassenkörper vom Grade l^h über K_0 ist, in dessen Klassengruppe alle l^h-ten Idealpotenzen liegen müssen. Also gilt

$$\psi''(\gamma_0) = \psi'(\gamma_0). \tag{17}$$

Die Beschränkung $(\gamma_0, \mathfrak{f}') = (\gamma_0, \mathfrak{f}'') = 1$ kann dabei für die Führer von K', K'' unter Beibehaltung von $\gamma_0 \equiv N(\gamma) \bmod \mathfrak{v}$ wegfallen, wenn man bloß $\psi(\tau_0^{l^h}) = 1$ für jedes $\tau_0 \equiv 1\ (\mathfrak{v})$ definiert. — Kam man in 3. am Schluß mit der Altverzweigung $\mathfrak{v}$ des Führers aus, so gilt hier wenigstens

$$(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots) = \mathfrak{v}, \tag{18}$$

wenn man alle Körper $K', K'', \ldots > K$ zur Gruppe $\mathfrak{H}$ durchläuft, d. h. man kann schon ein Paar solcher Körper finden, deren Führer nur $\mathfrak{v}$ gemein haben.

Diese letzte Behauptung, die die in 1. am Schluß gemachte Aussage einschließt, daß die Konstruktion einfach verzweigt fortgesetzt werden kann, wenn bisher nur einfache Verzweigungen aufgetreten sind (überhaupt verzweigungsfremd zu vorgegebenem bisher unverzweigtem Ideal), folgt[8a]) ähnlich wie der Zusatz von 3.:

Gegeben sei K'/K mit dem Führer $\mathfrak{f}' = \mathfrak{w}\mathfrak{q}'$; $\mathfrak{w} \equiv 0\ (\mathfrak{v})$. Gesucht ein K'' mit Führer $\mathfrak{f}'' = \mathfrak{w}\mathfrak{q}''$; $(\mathfrak{q}'', \mathfrak{q}'\mathfrak{k}) = 1$. Dabei sei $\mathfrak{q}'$ Primideal in K_0 oder eine Potenz $\mathfrak{l}^z$ eines l-Primteilers in K_0. Da wir die Durchkreuzung nur über dem Trägheitskörper der Primteiler von $\mathfrak{q}'$ ausführen, dürfen wir K als Trägheitskörper, also l^h als Verzweigungsordnung von $\mathfrak{q}'$ annehmen. Jetzt sei χ_0' ein l^h-ter Potenzrestcharakter mod $\mathfrak{q}'$ in K_0, und zwar für $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}^z$ genau ein solcher, der $\chi_0'(\alpha_0) = 1$ für jedes $\alpha_0 \equiv N(\alpha)$ mit $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{w})$ liefert, wenn (α) in K zur Idealgruppe von K' gehört; also $\chi_0'(\alpha_0) \neq 1$ für alle nicht zur Idealgruppe von K'/K gehörigen $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{w})$. Aus der unendlichen Menge der Primideale $\mathfrak{q}''$ in K_0 mit einem l^h-ten Potenzrestcharakter χ_0'', der für l^h-te Idealpotenzen γ_0 mit χ_0' übereinstimmt, greifen wir jetzt irgendein zu $\mathfrak{q}'\mathfrak{k}$ fremdes Primideal $\mathfrak{q}''$ heraus. Dann gibt es in K_0 einen zyklischen Klassenkörper l^h-ten Grades K^0 mit dem Führer $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, dessen Zahlidealgruppe der Gleichung $\chi_0''(\xi) = \chi_0'(\xi)$ genügt, die wegen Gültigkeit dieser Gleichung für alle $\xi = \gamma_0$ zu einer vollständigen Idealgruppe ergänzt werden kann.

Jetzt bilden wir $K' K^0$. Dann gibt es diesmal genau l^h Idealklassen des Klassenkörpers $K' K^0/K$, die Zahlideale (β) mit $\beta \equiv 1 \ (\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}'')$ enthalten; denn wenn für ein solches β und seine Norm β_0 in K_0 nur $\chi_0'(\beta_0) = 1$ gilt, gehört β zur Idealgruppe von $K' K^0/K$; auch für $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}^s$! Zur zyklischen Untergruppe dieser l^h Idealklassen gehört aber ein Klassenkörper K''/K mit dem Führer $\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}''$, und es gilt $K'' < K'' K^0 < K' K^0$ wegen $K'', K^0 < K' K^0$; aber $[K'', K^0] = K_0$ wegen $(\mathfrak{q}', \mathfrak{f}(K''/K)) = 1$ und Vollverzweigtheit von $\mathfrak{q}'$ in K^0/K_0. Also $K'' K^0 = K' K^0$, w. z. z. w.

Bemerkung 1: Der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Charakter $\psi(\gamma_0)$ liegt auch dann fest, wenn $\mathfrak{H}$ einen Automorphismus $A \sim A^{1+l^k}$ besitzt, der $\mathfrak{G}$ in Ruhe läßt. Dann hat aber der Durchschnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}']$, der mit $\mathfrak{H}'$ in Ruhe bleiben muß, höchstens die Ordnung l^k; $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}'] < \{A'\}$, A' die l^{h-k}-te Potenz von A. Gleichzeitig fällt aber auch $\psi(\gamma_0)$ in die $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$-automorphismenfreie Gruppe $\{A'\}$, d. h. ψ ist für die γ_0 nur ein Charakter der Ordnung l^k, weil der Nichtabelsche Abschnitt der Erweiterung K'/K nur den Relativgrad l^k hat.

Bemerkung 2: Man könnte den Charakter ψ, wie es sonst üblich ist, wohl als l^h-te Einheitswurzel definieren, indem man einen festen primitiven Charakter der Gruppe $\mathfrak{A}$ wählt. (Bei Richter[1]) ist diese Gruppe sogar durch Einheitswurzeln bezeichnet.) Für Ord $\mathfrak{A} = 2$ ist das zwar empfehlenswert, für $l^h > 2$ aber gerade dann nicht, wenn l-te (vierte) Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Nimmt man z. B. die unter 3. behandelten konjugierten Körper K' und K'' mit dem normalen Durchschnitt K, so fallen die zugehörigen Charaktere χ' und χ'' für absolut konjugierte α' und α'' gleich, nicht absolut konjugiert aus. Sie sind Potenzrestcharaktere $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right)$, deren Nenner $\mathfrak{m}$ eine gegen die Substitution R von $K = \mathsf{P}(\zeta)$ nicht invariante Gruppe erzeugen. Freilich fällt hier für alle γ_0 in K_0 das $\psi = 1$ aus, wie aus 3. folgt.

Beispiel für $\psi(\gamma_0) = -1$ bei $l = 2$:

$K_0 = \mathsf{P}$. $K = (\sqrt{13}, \sqrt{17})$ soll in einen Diederkörper achten Grades so eingebettet werden, daß die Trägheitssubstitutionen S_1 und S_2 von 13 und 17 die Ordnung 2 behalten. Also $S_1^2 = S_2^2 = (S_1, S_2)^2 = 1$. Wobei (S_1, S_2) den Kommutator $S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$ bezeichnet.

Lösung 1:

$$K' = \mathsf{P}\left(\sqrt{-9 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{-9 + 2\sqrt{17}}\right) \text{ imaginär; } \mathfrak{f} = p_\infty .$$

Lösung 2:

$$K'' = \mathsf{P}\left(\sqrt{27 + 6\sqrt{17}} + \sqrt{27 - 6\sqrt{17}}\right) \text{ reell; } \mathfrak{f} = 3.$$

Es ist $\psi(-1) = -1$, und es geht K' in K'' bei Durchkreuzung mit $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ über.

Ebenfalls hat man $\psi(-1) = -1$ bei einem K enthaltenden Diederkörper K''' mit $S_1^4 = S_2^2 = 1$; $S_1^2 = (S_1, S_2)$. Einen K''' erhält man, indem man K'/K oben mit $K_{13}^4/\mathsf{P}(\sqrt{13})$ durchkreuzt; K_q^4 biquadratischer Unterkörper der q-ten Einheitswurzeln.

Ebenfalls gilt aber auch $\psi(-1) = -1$ für einen Quaternionenkörper $K^{\mathrm{IV}} > K$; Gruppe: $S_1^2 = S_2^2 = (S_1, S_2)$; $(S_1, S_2)^3 = 1$. Einen K^{IV} erhält man aus dem letzten K''' bei nochmaliger Durchkreuzung von K'''/K mit $K_{17}^4/\mathsf{P}(\sqrt{17})$.

Weitere Beispiele für $\psi(\gamma_0) \neq 1$ finden sich in meiner Note: Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen (Crelle Journ. 175 (1936), S. 100—107).

Die hier bei K''' und K^{IV} angewandte *indirekte Durchkreuzung mit zyklischen Verlängerungen der Teilklassenkörper* von K liefert eine *„weitere Verwandtschaft" der Körper K'*, verbunden mit *„verwandten Gruppenaufspaltungen"*, auf die ich in einer späteren Abhandlung eingehen will. — Aufgabe M in 6. besitzt auch verwandte Lösungen zu Aufgabe K in 6.

6. Wir untersuchen jetzt, wieweit für den Fall von Körpererweiterungen l-ten Grades im Bereiche der l-Körper die in 1. genannten hinreichenden Zerfallsbedingungen für ein verzweigtes p notwendig sind. Da wir nur einfache Verzweigungen betrachten, wird die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{p})$ aus zwei Elementen Z und T erzeugt, wo T die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ erzeugt und Z dann ein Repräsentant der Erzeugenden von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ ist. Allgemein ist in der l-Gruppe $\mathfrak{Z} = \{Z, T\}$ definiert durch

$$(19) \qquad Z^{l^h} = T^{l^a}; \quad T^{l^k} = 1; \quad (T, Z) = T^{r \cdot l^c}.$$

$$(T^Z = T^{1 + r \cdot l^c}; \quad (1 + r \cdot l^c)^{l^h} \equiv 1 \bmod l^k.)$$

Wir können uns aber im folgenden bei der Einbettung des Körpers K mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ in einen mit der Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{Y}$ ausfalle (neue Zerlegungsgruppe nach 1. eine Untergruppe von $\mathfrak{Y}$, die alle Restklassen mod $\mathfrak{C}$ durchläuft!), auf $Z^{l^h} = 1$ in $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Y}$ beschränken. Denn für den allgemeinen Fall läßt sich der zum Trägheitskörper K_t gehörige p-adische Körper P_t vom Grade l^h in einen solchen des Grades l^{h+k-a} einbetten (Primkörpereinbettung!), und im Produkt mit dem zu K gehörigen P ist dann $Z^{l^{h+k-a}} = 1$ und $[\{Z\}, \{T\}] = 1$. — Auch ohne Übergang zu den p-adischen Körpern läßt sich dies leicht zeigen.

Bei der Aufspaltung $\mathfrak{Z} -< \mathfrak{Y}$ können folgende Fälle und Unterfälle auftreten:

I. Es bleibt $T^{l^k} = 1$ in $\mathfrak{Y}$.

II. Es wird Ord $T = l^{k+1}$ in $\mathfrak{Y}$.

a) In $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{C}$ direkter Faktor.

b) $\mathfrak{C}$ ist kein direkter Faktor, liegt aber außerhalb des Kommutators $\mathfrak{Y}'$.

c) $\mathfrak{C}$ liegt im Kommutator.

I a) Es liegt Fall α) aus 1. vor; Erweiterung also ohne weiteres möglich.

b) $C = Z^{l^h}$ liefert nur eine zyklische Verlängerung der Zerlegungsgruppe ohne eine solche der Trägheitsgruppe, ist also durch Primkörpererweiterung möglich.

c) $C = (T, Z)$. Einbettung unmöglich, da der Kommutator C zur Trägheitsgruppe gehören müßte, was gegen I. verstößt. — Losgelöst vom p-adischen Sachverhalt kann man dies, indem man gleich die mit der Erweiterung sich direkt multiplizierenden invarianten Teile $\{S_1^l\}$ und $\{S_2^l\}$ abschneidet, formulieren als

Verknotungsaufgabe K. *Einen Abelschen Körper mit $S_1^l = S_2^l = 1$, S_2 Trägheitssubstitution von* p, *in einen solchen mit $S_1^l = S_2^l = (S_1, S_2)^l = 1$, (S_1, S_2) im Zentrum, einzubetten.*

Lösungsbedingung: Es darf S_1 nicht Zerlegungssubstitution von p in K sein, weil sonst in der Erweiterung K' auch der Kommutator (S_2, S_1) zur in der Zerlegungsgruppe invariant liegenden Trägheitsgruppe von p gehören müßte und dann diese nicht zyklisch wäre. p muß also vom Grade 1 in K sein, ebenso jedes in K verzweigte q, dessen Trägheitssubstitution in der Aufspaltung die Ordnung l behält, d. h. alle q für ungerades l, für $l = 2$ nur die q mit Trägheitssubstitution S_1 oder S_2, nicht aber $S_1 S_2$.

(Die Bezeichnungsweise ist hier, wie teils schon früher, bei Aufspaltungen $\mathfrak{H} > \mathfrak{G}$ so gewählt, daß S_1 und S_2 in $\mathfrak{H}$ wieder Elemente bezeichnen, die Repräsentanten für S_1 und S_2 in $\mathfrak{G}$ sind, und zwar wieder Zerlegungs- und Trägheitssubstitutionen eines Primteilers von p, wenn sie vorher bei p in dieser Eigenschaft auftraten.)

Daß zur Lösung der Verknotungsaufgabe diese Bedingungen ebenfalls hinreichend sind, folgt ohne Heranziehung des Richterschen Satzes bei rein verzweigtem K schon aus[3]).

II a) —.

b) Wenn schon T^{l^k} außerhalb des Kommutators liegt, so auch T und Z. $\mathfrak{Y}$ ist also eine Abelsche Gruppe $\{Z\} \times \{T\}$. Das Einbettungsproblem reduziert sich auf die Einbettung der Trägheitsgruppe:

Verlängerungsaufgabe L. *Einen zyklischen Körper K mit einer Gruppe $\{T\}$ der Ordnung l^k in einen solchen mit einer Gruppe $\{T\}$ der Ordnung l^{k+1} einzubetten.*

Lösungsbedingung: Für ein in K voll verzweigtes $\mathfrak{p}$ aus K_0 muß $(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l^{k+1})$ von K_0 aus, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ gelten, für später verzweigte entsprechende Reduktion.

II c) $Z^{l^h} = T^{l^{k+1}} = 1$ in $\mathfrak{Y}$; $T^{l^k} < \mathfrak{Y}'$. Wenn etwa $Z^{l'}$ in $\mathfrak{Y}$ schon mit T vertauschbar ist, multipliziert sich $\{Z^{l'}\}$ mit $\{T\}$ direkt und liegt invariant in $\mathfrak{Y}$; die Einbettung läßt sich dann auf $Z^{l'} = 1$ zurückführen. Wir dürfen also

20) $$(T, Z^{l^{h-1}}) \neq 1 \text{ in } \mathfrak{Y}$$

annehmen, und zwar muß

20) $$T^{Z^{l^{h-1}}} = T^{\pm 1 + r l^k} \quad \text{oder} \quad = T^{-1}$$

ausfallen, damit T bei Z^{l^h} in sich übergeht. Dabei kommt für $l^h > 2$ nur T^{+1+rl^k} in Frage. Es ist dann

20) $$T^Z = T^{\pm 1 + l'}; \quad T^{Z^l} = T^{1+l'}, \ldots$$

oder

$$T^Z = T^{-1} \text{ auch für } l^h = 2.$$

Dabei bedeute l' eine genau durch l^{k+1-h} teilbare Zahl. Elementare Rechnung ergibt $k \geqq h$; für $l = 2$ und $h > 1$ sogar $k > h$. Es bleiben dann folgende Aufgaben:

Einmündungsaufgabe M. *Einen Körper mit der Gruppe* $S_1^{l^h} = S_2^{l^k} = 1$; $(S_2, S_1) = S_2^{l'}$ *in einen solchen mit* $S_1^{l^h} = S_2^{l^{k+1}} = 1$ *einzubetten bei* $l' = r l^{k+1-h}$, $h \leqq k$ *für* $l > 2$, $h < k$ *für* $l = 2$.

M'. *Dasselbe bei* $l = 2$ *mit* $(S_2, S_1) = S_2^{2^{k+1-h-2}}$, $h < k$.

M''. *Dasselbe bei* $l^h = 2$ *mit* $(S_2, S_1) = S_2^{-2}$. *(Diedergruppe.)*

S_2 *Trägheitssubstitution von* $\mathfrak{p}$.

Unsere hinreichenden Lösungsbedingungen: Vollzerfall von $\mathfrak{p}$ im Unterkörper $K_1 < K$ mit $S_2 = 1$ und $N_{K_0}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1}$, sind hier nicht mehr notwendig, weil jetzt, im Gegensatz zu I c), der Kommutator in der Trägheitsgruppe liegt. Ist im Gegenteil $\mathfrak{p}$ in K_1 unzerfallen — dann ist also für $\mathfrak{p}$ Aufgabe M ohne p-adische Reduktion zu lösen — so darf aber auch gerade nur noch $N_{K_0}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1-h}$ gelten. Dann gilt nämlich $N_{K_1}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1}$, und die Aufgabe ist p-adisch lösbar: Die teilerfremden Restklassen mod $\mathfrak{p}$ bilden eine Gruppe der Ordnung l^{k+1}, liefern also einen zyklischen Klassenkörper $\overline{P}$ zur Gruppe $\{S_2\}$ in P_1, der über P_0 normal ist. Da aber die Restklassengruppe mod $\mathfrak{p}$ in P_0 nur die Ordnung $l' = l^{k+1-h}$ hat, ist gerade noch der Teilkörper l'-ten Grades von $\overline{P}/P_1$ Klassenkörper über K_0, d. h. $\{S_2^{l'}\}$ ist Kommutator. Also muß l' die genaue in $N_{K_0}(\mathfrak{p}) - 1$ aufgehende Potenz von l sein; denn sonst verschöbe sich der Kommutator. — Für Aufgabe M' erhält man bei voller Zerlegungsgruppe $\{S_1, S_2\}$ von $\mathfrak{p}$ die Lösungsbedingung:

$N(\mathfrak{p}) \equiv -1$ genau mod 2^{k-h}, dagegen $N(\mathfrak{p}) \equiv -1\ (2^k)$ für M''; Normbildung von K_0 aus.

Die Lösungsbedingungen zeigen, daß man sich in M bei der lokalen Einbettung auf $h = 1$ beschränken kann ($l^h \to l$; $l^k \to l'$); sie sind allgemein erfüllt, wenn für $Z^l = T^{l'} = 1$; $\mathfrak{Z}$ dabei Abelsche Gruppe vom Typ (l, l'). — Bei M' liefert nur noch $h = 2$ neue Bedingungen.

Wie weit allerdings eine *Zahl*körpereinbettung auf diese Weise möglich ist, hängt davon ab, ob die anderen Verzweigten passend zu $\mathfrak{p}$ gewählt werden können. Bei Aufgabe M' mit $h = 2$ und rationalem Grundkörper scheitert das z. B. am quadratischen Reziprozitätsgesetz. Dagegen ist Aufgabe M'' mit imaginärem K_1 und unzerfallenem p als Führer in K lösbar, wenn obendrein $p \equiv -1\ (2^{k+1})$; und für $l > 2$, $h = k = 1$ habe ich ein allgemeines Beispiel in der D. M. V.-Aufgabe 194 mit rationalem Grundkörper angegeben, das sich auf beliebiges k erweitern läßt. Ist nämlich die Zerlegungssubstitution S_1 von p Trägheitssubstitution von q und S_2 wie oben Trägheitssubstitution von p, $K = K_q^l K_p^{l^k}$, $p \not\equiv x\ (q)$, $\equiv 1\ (l^k)$, $\not\equiv 1\ (l^{k+1})$, $q \equiv y^{l^k}\ (p)$, was sich miteinander verträgt, so ist Aufgabe M lösbar; denn die für q hinzukommende Verknotungsbedingung des Vollzerfalls in $K_p^{l^k}$ ist erfüllt. — Diese Konstruktionsmethode ist allerdings nicht sehr fruchtbar; denn wenn bei einer weiteren Aufspaltung Trägheitssubstitutionen T^{l^k} und (T, Z) eines $\mathfrak{p}$ auseinanderfallen, müssen Verknotungs- und Verlängerungsbedingung für $\mathfrak{p}$ doch beide erfüllt sein.

Zurückkehrend von der Lokalisierung erhalten wir im ganzen folgende notwendigen Einbettungsbedingungen:

Soll ein Körper K mit l-Gruppe $\mathfrak{G}$ in einen K' mit l-Gruppe $\mathfrak{H}$ einbettbar sein, so darf ein in K verzweigtes $\mathfrak{p}$ mit Trägheitsgruppe $\{T\}$ nicht eine Substitution S von K als Zerlegungssubstitution besitzen, die mit T in $\mathfrak{H}$ einen Kommutator außerhalb $\{T\}$ hat. (Verknotungsbedingung.)

Ferner muß für ein in K verzweigtes $\mathfrak{p}$ mit kommutativer Zerlegungsgruppe die absolute Norm von K_0 aus $\equiv 1\ (l^t)$ sein, wenn die Trägheitsgruppen $\{T\}$ der $\mathfrak{p}$-Primteiler in $\mathfrak{H}$ ihre Ordnung auf l^t verlängern und ihre Zerlegungsgruppen kommutativ bleiben. (Verlängerungsbedingung.)

Wenn hingegen unter gleichen Umständen die Kommutativität der Zerlegungsgruppen verloren geht, indem $C = T^{l^{t-1}} = (T, Z)$ bei $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \{C\}$ wird, darf nicht $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l^t)$ bestehen. (Einmündungsbedingung.)

Im Falle, daß die Zerlegungsgruppe eines $\mathfrak{p}$ in K bereits nicht kommutativ ist, besteht bei $l \neq 2$ keine Bedingung für $\mathfrak{p}$, weil M. auf $h = 1$ zurückführbar war; doch kann bei $l = 2$ noch eine Aufgabe M' für $\mathfrak{p}$ durch $N(\mathfrak{p}) \equiv -1\ (2^{t-1})$ zu lösen bleiben oder M'. durch $N(\mathfrak{p}) \not\equiv -1\ (2^{t-1})$. — So wie sich aber sonst die Normbedingungen für

statt in K_0 im Zerlegungskörper aufstellen lassen, so kann man sich erken, daß hier der überm Zerlegungskörper quadratische Teilkörper des rägheitskörpers ausschlaggebend ist und sich in diesem M''. auf M. und '. auf M. reduziert. (Zusatz-Einmündungsbedingungen für $l = 2$).

Wir betrachten jetzt die in der Einleitung erwähnten

l-Entwicklungen der freien Gruppe

n von $n \geqq 2$ Erzeugenden, mit denen wir alle l-Gruppen von n Erugenden einfangen.

7. Die Magnussche 0-Entwicklung und die zugehörige l-Entwicklung. Vir betten nach Magnus[14]) die freie Gruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_n = \{S_1, \ldots, S_n\}$ in nen freien Gruppenring $\mathfrak{R}$ von Potenzreihen ein, indem wir setzen

21) $$S_\nu = 1 + \Delta_\nu; \quad S_\nu^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta_\nu^k$$

nd alle so entstehenden Potenzreihen nach homogenen Bestandteilen in en Δ ordnen. Jetzt heiße ein Gruppenelement P (gleichzeitig das Ringlement $P - 1$) von der Dimension $\delta(P) = m$, wenn die Entwicklung von $P - 1$ in eine Potenzreihe genau mit Gliedern m-ter Dimension in den Δ eginnt, wenn also

22) $$P - 1 \equiv 0 \ (\mathfrak{D}^m), \quad \not\equiv 0 \ (\mathfrak{D}^{m+1}), \quad \text{wo } \mathfrak{D} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

nsbesondere gilt $\delta(S) = 1$ für $S = S_\nu$ und alle außerhalb der Kommuatorgruppe liegenden S. Der Kommutator $(S, T) = S^{-1} T^{-1} S T$ zweier eliebiger Elemente S und T hat nach Magnus eine Dimension

23) $$\delta(S, T) \geqq \delta(S) + \delta(T).$$

ind nämlich $S \equiv 1 + \Delta^{(s)} \bmod \mathfrak{D}^{s+1}$ und $T \equiv 1 + \Delta^{(t)} \bmod \mathfrak{D}^{t+1}$, $(S) = s$, $\delta(T) = t$, so wird

24) $$(S, T) \equiv 1 + \Delta^{(s)} \Delta^{(t)} - \Delta^{(t)} \Delta^{(s)} \bmod \mathfrak{D}^{s+t+1}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{F}$, deren Dimension $\delta \geqq m$ ist, bilden für jedes m ine charakteristische Untergruppe $\mathfrak{F}^m$, wobei $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^2$ die Kommutatorgruppe (erste Ableitung) ist, während die höheren Ableitungen nicht unter den $\mathfrak{F}^m$ hervortreten. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}^{m+1}$ erhält man auch, indem man mit $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{R}$ mod $\mathfrak{D}^{m+1}$ additiv rechnet. — Wir entwickeln nun $\mathfrak{F}$ in die für $n > 1$ unendliche Reihe

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{C}^1 \cup \mathfrak{C}^2 \cup \mathfrak{C}^3 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}^m \cup \ldots,$$

n der jedesmal $\mathfrak{C}^m$ die Gruppe der Elemente m-ter Dimension mod $\mathfrak{D}^{m+1}$ ei, d. h.

$$\mathfrak{C}^m = \mathfrak{F}^m/\mathfrak{F}^{m+1} = \mathfrak{G}^m - \mathfrak{G}^{m-1}.$$

---

[14]) W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Annalen 111 (1935), S. 259—280.

(Schreibweise für die aus der Identität von $\mathfrak{G}^{m-1}$ hervorgehenden Elemente von $\mathfrak{G}^m$.) Die $\mathfrak{H}^m$ und $\mathfrak{F}^m$ drücken sich dann wieder aus:

$$\mathfrak{G}^m = \coprod_{\mu \leqq m} \mathfrak{C}^\mu = \mathfrak{C}^1 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}^m; \quad \mathfrak{F}^{m+1} = \coprod_{\mu > m} \mathfrak{C}^\mu = \mathfrak{C}^{m+1} \cup \ldots.$$

Neben der 0-Dimension δ und 0-Entwicklung $\coprod \mathfrak{C}^m$ führen wir eine l-Dimension λ und l-Entwicklung $\coprod \mathfrak{A}^m$ ein: Wir ersetzen $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{L} = (l, \mathfrak{D}) = (l, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, definieren $\lambda(Q) = r$ für $Q \equiv 1\ (\mathfrak{L}^r)$, $\not\equiv 1\ (\mathfrak{L}^{r+1})$ und entwickeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}^1 \cup \mathfrak{A}^2 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}^m \cup \ldots$$

mit den Faktorgruppen $\mathfrak{H}^m = \coprod_{\mu \leqq m} \mathfrak{A}^\mu$ und Untergruppen $\mathfrak{S}^{m+1} = \coprod_{\mu > m} \mathfrak{A}^\mu = \Sigma Q$ mit $\lambda(Q) > m$.

Die l-Entwicklung verhält sich so zur 0-Entwicklung, daß $\mathfrak{H}^m$ Faktorgruppe von $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{F}^m$ also Untergruppe von $\mathfrak{S}^m$ ist. Insbesondere ist $\delta(A^h) = \delta(A)$, wie aus der Potenzreihenentwicklung sofort hervorgeht, während $\lambda(A^h) = \lambda(A)$ nur für $(h, l) = 1$ gilt. Dagegen ist

$$\lambda(A^l) = \lambda(A) + 1: \tag{25}$$

Setzen wir $A = 1 + \alpha$, so wird $A^l = 1 + l\alpha + \binom{l}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^l$. Es hat hier $l\alpha$ die Dimension $\lambda + 1$, alle folgenden Glieder aber eine höhere Dimension außer für $l = 2$, $\lambda(A) = 1$. In diesem Falle hat man aber $A^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$, und da $2 + \alpha \not\equiv 0\ (\mathfrak{L}^2)$ wegen $\alpha \equiv 0\ (\mathfrak{D}) \equiv 0\ (4, \mathfrak{D})$ und $2 \not\equiv 0\ (4, \mathfrak{D})$, ist auch $2\alpha + \alpha^2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{L}^3)$. Also ist auch hier $\lambda(A^2) = 2$ und daher in jedem Falle $\lambda(A^l) = \lambda + 1$.

Die 0- und l-Entwicklung besitzen, die erste nach Magnus, folgende drei einander entsprechenden Eigenschaften:

α) Jedes von der Identität verschiedene Element von $\mathfrak{F}$ weicht bereits in je einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^r$ von der Identität ab. Der Durchschnitt der $\mathfrak{F}^m$ sowie der $\mathfrak{S}^r$ ist also Eins.

β) Während jede endliche Gruppe von n Erzeugenden als Faktorgruppe von $\mathfrak{F}$ darstellbar ist, läßt sich unter diesen durch ein *endliches* absteigendes Produkt $\coprod_{\mu \leqq m}$ in der 0-Entwicklung nur jedes direkte Produkt von l-Gruppen und in der l-Entwicklung nur jede l-Gruppe einfangen; d. h. dies sind die als Faktorgruppe eines $\mathfrak{G}^m$, eines $\mathfrak{H}^r$ darstellbaren Gruppen.

γ) $\mathfrak{C}^m$ ist das Zentrum von $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{A}^m$ das Zentrum von $\mathfrak{H}^m$, $\mathfrak{C}^m$ eine Abelsche Gruppe von endlich vielen Erzeugenden der Ordnung 0, $\mathfrak{A}^m$ eine solche vom Exponenten l.

Der Inhalt von α) ist im wesentlichen, daß sich $\mathfrak{F}$ als Grenzgruppe sowohl der $\mathfrak{G}^m$ als der $\mathfrak{H}^m$ darstellen läßt. Sie ist allerdings nicht die einzige unendliche Gruppe dieser Eigenschaft, schon deswegen nicht, weil

e als abzählbare Gruppe nicht Galoisgruppe eines Körpers unendlichen rades sein kann; sondern sie ist lediglich minimale Grenzgruppe: einer ntergruppe jeder Grenzgruppe isomorph. Realisieren wir die Folge $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2, \ldots, \mathfrak{H}^m, \ldots$ durch ineinandergeschachtelte Funktionenkörper K^m er Charakteristik l, was nach Witt[14]) möglich ist, wenn man einen Körper it der Gruppe $\mathfrak{H}^1$ hat, so hat der Vereinigungskörper ΣK^m eine konti-uierliche Galoisgruppe $\mathfrak{R}$ (stetig auf Grund ihrer natürlichen Krullschen opologisierung[15])), für die ebenfalls α) erfüllt ist, und die nur eine zu $\mathfrak{F}$ somorphe Untergruppe besitzt. (Ein solches $\mathfrak{F}$ entsteht, indem man die rzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ beim Übergang von $\mathfrak{H}^m$ zu $\mathfrak{H}^{m+1}$ jedesmal wieder durch irgendwelche Repräsentanten ersetzt. Dann ist ihre Bedeutung n $\mathfrak{R}$ als Durchschnittsoperation festgelegt, und die aus ihnen erzeugte nabgeschlossene Gruppe $\{S_1, \ldots, S_n\} < \mathfrak{R}$ ist isomorph zu $\mathfrak{F}$.) Die Gruppe $\mathfrak{R}$ ist aus den $\mathfrak{H}^m$ auch abstrakt definierbar; die Existenz irgend-earteter Körper mit dieser Gruppe $\mathfrak{R}$ ist jedoch erst durch die Wittsche Konstruktion gesichert, vielleicht auch für Körper der Charakteristik l charakteristisch.

α) folgt bereits daraus, daß jedes Element $\neq 1$ eine feste Dimension besitzt.

γ) Daß $\mathfrak{A}^m$ und $\mathfrak{C}^m$ eine endliche Basis besitzt, folgt daraus, daß es nur endlich viele ($\leqq n^m$) Glieder m-ter Dimension in den Δ_ν gibt und ebenfalls in l und den Δ_ν. Aus $\delta(A^h) = \delta(A)$ und $\lambda(A^h) > \lambda(A)$ nur für $l|h$ folgt die Aussage über die Ordnungen 0 und l der Basiselemente. Daß $\mathfrak{C}^m$ und $\mathfrak{A}^m$ im Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^m$ liegen, folgt aus

$$\delta(A, S_\nu) > \delta(A) \quad \text{und} \quad \lambda(A, S_\nu) > \lambda(A).$$

Daß sie sogar das genaue Zentrum liefern, folgt so: Hat man zwei Elemente $P \equiv 1 + \Delta^{(m-1)} \bmod \mathfrak{D}^m$ und $Q \equiv 1 + \Lambda^{(m-1)} \bmod \mathfrak{L}^m$, also außerhalb $\mathfrak{C}^m$ und $\mathfrak{A}^m$, so können sie deswegen nicht im Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^m$ liegen, weil zumindest einer der Kommutatoren (P, S_1) und (P, S_2) die genaue 0-Dimension m hat und ebenso $\lambda(Q, S_1)$ oder $\lambda(Q, S_2) = m$ ist. Nämlich in

$$(Q, S_1) \equiv 1 + \Lambda^{(m-1)} \Delta_1 - \Delta_1 \Lambda^{(m-1)} \bmod \mathfrak{L}^{m+1}$$

ist Δ_1 nur dann mit $\Lambda^{(m-1)}$ vertauschbar, wenn $\Lambda^{(m-1)}$ nur eine Form in l und Δ_1 ist, nicht gleichzeitig also eine Form in l und Δ_2.

β) Daß höchstens die genannten endlichen Gruppen eingefangen werden, ist für die l-Entwicklung klar und folgt für die O-Entwicklung nach Magnus aus dem entsprechenden Burnsideschen Satze über die maximal-zentrale Entwicklung (absteigende Zentralreihe), die in 8. kurz

[15]) W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Annalen 100 (1928), S. 687—698.

besprochen ist. Daß die 0-Entwicklung aber auch alle direkten Produkte von l-Gruppen einfängt, folgt nicht so einfach wie bei der absteigenden Zentralreihe; ich muß hier auf Magnus [14]), Satz IX und Beweis verweisen. Verhältnismäßig einfach folgt aber hieraus jetzt, daß die l-Entwicklung alle l-Gruppen einfängt, und zwar gilt folgendes: Wird eine Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Exponenten l^h durch $\mathfrak{G}^m$ eingefangen, so wird sie in der $\mathfrak{H}$-Reihe spätestens durch $\mathfrak{H}^{m+h-1}$ eingefangen. Wir holen hier weiter aus:

Wir dürfen in der 0-Entwicklung die Basis für $\mathfrak{C}^r$ (für $\mathfrak{F}^r \bmod \mathfrak{F}^{r+1}$) so wählen, daß ein Glied $\Delta_{\varkappa_1} \Delta_{\varkappa_2} \dots \Delta_{\varkappa_r}$ als Leitglied (lexikographisch erstes Glied niederster positiver Dimension) höchstens eines Basiselements auftritt, das wir dann $S_{\varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_r}$ nennen. Dies läßt sich durch lineare Transformation erreichen. Der Koeffizient von $\Delta_{\varkappa_1} \dots \Delta_{\varkappa_r}$ in $S_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}$ ist dabei, positiv genommen, der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten, die bei irgendeinem Element S von $\mathfrak{F}$ mit dem Leitglied $\Delta_{\varkappa_1} \dots \Delta_{\varkappa_r}$ auftauchen. Welche Indizeskombinationen $(\varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_r)$ dabei in der Basis wirklich auftreten, d. h. welche Δ-Produkte überhaupt Leitglieder von Gruppenelementen sind, bleibe dahingestellt (keinesfalls kommen für $r > 1$ reine Potenzen eines Δ_ν vor); wir wollen hier lediglich eine geeignete Bezeichnungsweise für die Basis haben, die uns später von Nutzen sein kann. $\mathfrak{F}$ erhält dann eine „fortlaufende Basis"

$$(26) \quad S_1, S_2, \dots, S_n;\ S_{12}, S_{13}, \dots, S_{n-1,\,n};\ S_{112}, \dots;\ \dots, S_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}, \dots,$$

in der jedes Element von $\mathfrak{F}$ eindeutig als endliches geordnetes Potenzprodukt der so geordneten $S_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}$ dargestellt werden kann.

Dementsprechend erhalten wir, wie wir zeigen werden, in der l-Entwicklung folgendes Basisschema:

$$(27) \quad \begin{array}{ccccc} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \\ S_\nu^{l^3} & S_{\mu\nu}^{l^2} & S_{\lambda\mu\nu}^{l} & S_{\varkappa\lambda\mu\nu} & \\ & S_\nu^{l^2} \quad S_{\mu\nu}^{l} & S_{\lambda\mu\nu} & & \\ & & S_\nu^{l} \quad S_{\mu\nu} & & \\ & & & S_\nu & \end{array}$$

Dabei weist die Dimension $\lambda = r$ ($\mathfrak{A}^r$-Basis) ebensoviel Basiselemente $S^{(r)}$ auf, wie die 0-Dimensionen $\delta = 1, 2, \dots, r$ zusammen (geordnete $\mathfrak{G}^r$-Basis), und zwar jedes einzelne $\delta \leqq r$ gerade die $l^{r-\delta}$-ten Potenzen der Basiselemente von $\mathfrak{C}^\delta$.

Wäre nämlich ein nichtidentisches Produkt der genannten $S^{(r)}$ schon von höherer Dimension $\lambda > r$, $\Pi S^{(r)} = T$, $\lambda(T) > r$, so müßten die Faktoren niederster 0-Dimension m auf beiden Seiten übereinstimmen,

während diese doch links nur in l^{r-m}-ter Potenz, rechts aber mindestens in l^{r-m+1}-ter Potenz auftreten. Das Schema (27) liefert daher, nach Zeilen geordnet, wieder eine fortlaufende Basis für $\mathfrak{F}$, wo nur diesmal die Darstellung mit Exponenten $|e| < \frac{l}{2}$ für $l > 2$ und etwa $e = 0, (-1)^\delta$ für $l = 2$ eindeutig wird.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Exponenten l^h, für die $\mathfrak{F}^m = 1$ ist, liegt daher im Schema (27) ganz im Rechteck mit den Seitenlängen h und m, also ganz im Dreieck unterhalb der $(h + m - 1)$-ten Zeile, und damit ist β) für die l-Entwicklung bewiesen.

Selten füllt hierbei $\mathfrak{G}$ das ganze Rechteck aus, da die l^h-ten Elementepotenzen einer Gruppe im allgemeinen keine Untergruppe bilden.

Es wäre überhaupt interessant zu wissen, welche Schnitte durch das Schema (27) eine Gruppe liefern und eine Körperkonstruktionsfolge. Jedenfalls müssen mit einem Basisvertreter auch die rechts und links darunterstehenden Vertreter $\neq 1$ ausfallen, und jedenfalls liefert ein beliebiger Schnitt durch die r-te Schicht (Zeile) eine Gruppe $\mathfrak{H}$, die zwischen $\mathfrak{H}^{r-1} -< \mathfrak{H} -< \mathfrak{H}^r$ eingebettet ist. $\mathfrak{H}$ darf man dann zwar nicht nach Potenzen (//), wohl aber nach der 0-Entwicklung (\\) aufschneiden und erhält so brauchbare Konstruktionsfolgen. Z. B. kann man so eine Konstruktion liefern, in der die Erzeugenden eine vorgegebene Ordnung l haben, ebenfalls deren Kommutatoren, während von der nächsten 0-Dimension ab die Ordnung der Basiselemente jedesmal einen Faktor l verliert und schließlich $\mathfrak{F}^{m+2} = 1$ ist. Ein solches Konstruktionsschema hat den Vorteil, daß für jedes neue $S_{\varkappa \ldots \nu}$, das ja möglicherweise als Trägheitssubstitution herangezogen werden muß, die Ordnung, die es in $\mathfrak{H}$ erreicht, von vornherein festliegt, und daß man leicht abzählen kann, wie weit hinauf die einzelnen an den Stellen $S^{l^h}_{\varkappa \ldots \nu}$ verzweigten Primideale innerhalb des Schemas von $\mathfrak{H}$ voll zerfallen müssen. Die bei einer Erzeugenden S_ν Verzweigten müssen z. B. außerhalb des Zentrums (der obersten Schicht) von $\mathfrak{H}$ voll zerfallen.

8. In Frage steht noch die Magnussche Vermutung: ob $\mathfrak{G}^m$ jedesmal die *maximale zentrale Aufspaltung* von $\mathfrak{G}^{m-1}$ sei, ob also die $\mathfrak{F}^m$ die Reidemeistersche Kommutatorreihe [16]), die absteigende Zentralreihe in der Bezeichnung von Hall [17]) sei. (Daß $\mathfrak{C}^m$ das Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ ist, besagt lediglich, daß $\mathfrak{C}^m \cap \mathfrak{C}^{m-1} \cap \ldots \cap \mathfrak{C}^1$ (in aufsteigender Aneinanderreihung) eine aufsteigende Zentralreihe ist wie ja auch $\mathfrak{A}^m \cap \mathfrak{A}^{m-1} \cap \ldots \cap \mathfrak{A}^1$,

---

[16]) K. Reidemeister, Über unendliche diskrete Gruppen, Hamburger Abh. 5 (1927), S. 33—39.

[17]) P. Hall, Proc. L. M. S. 36 (1933), S. 29—95.

obwohl die $\mathfrak{H}^m$ bestimmt nicht die absteigende Zentralreihe liefern.) Für die Magnussche Vermutung spricht entschieden sein Satz III in [14]). Man kann daraus in Verbindung mit Satz IX entnehmen, worauf mich Magnus auch brieflich hinwies, daß die Reidemeisterschen $\mathfrak{C}_m$ dort, wo sie Faktoren höherer als m-ter Dimension schluckten, nicht mehr wie die $\mathfrak{C}^m$ freie Abelsche Gruppen sein könnten. Bestätigt sich hingegen die Magnussche Vermutung, so liefert die in 7. gegebene l-Entwicklung gleichzeitig die *maximal zentralen Aufspaltungsschritte vom Exponenten* l, wie aus $\lambda(A^l) = \lambda(A) + 1$ folgt. Diese Entwicklung liegt etwa dem Wittschen Konstruktionsplan zugrunde.

Bezeichnet man in der maximal-zentralen 0- und l-Entwicklung die Gruppen entsprechend mit unteren Indizes, so wird $\mathfrak{C}_m$ durch die Kommutatoren (A_ϱ, S_ν) erzeugt, wenn A_ϱ eine Basis für $\mathfrak{C}_{m-1}$ bildet. Bei Übereinstimmung der Entwicklungen $\mathfrak{F}^m$ und $\mathfrak{F}_m$ würde dann das Basisschema (27) folgende Bedeutung erhalten: Wenn man jetzt

$$S_{\varkappa\lambda\ldots\nu} = (S_{\lambda\ldots\nu}, S_\varkappa) \tag{28}$$

setzt und jedesmal in die Basis Kommutatoren $S_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$ wählt und in deren Auswahl lexikographisch vorgeht, was innerhalb der zweiten Ableitung $\mathfrak{F}''$ von $\mathfrak{F}$ eine Abänderung der Basis von 7. bewirkt, so stehen jetzt in der m-ten Zeile von $\mathfrak{H}_m = \mathfrak{F}/\mathfrak{S}_{m+1}$, der Basis von $\mathfrak{A}_m$, außer am linken Ende in (27) lauter Kommutatoren der links darunter stehenden Basiselemente mit den Erzeugenden; denn innerhalb $\mathfrak{H}_m$ gilt $(A, S)^l = (A^l, S)$, wenn A noch der $(m-2)$-ten Schicht angehört. Die Anzahl der Basiselemente ist jeweils die Maximalzahl der symbolisch unabhängigen Elemente von $\mathfrak{S}_m$ und für den Fall $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}^m$ gleich der Elementezahl der fortlaufenden Basis von $\mathfrak{G}_m$.

Im Falle $\mathfrak{F}^m \neq \mathfrak{F}_m$ gäbe es hingegen für wenigstens ein l und ein m Elemente Q der Eigenschaft $Q \not< \mathfrak{F}_m$; $Q^l < \mathfrak{F}_m$, und dann entstünden für gewisse Faktoren $\mathfrak{A}_r$ der l-Entwicklung auch Einmündungsaufgaben bei der Körperkonstruktion, die bei der Entwicklung in 7. nicht auftraten. Dafür böte der Aufbau nach maximal-zentralen Schritten den Vorteil, daß man jedes neu gewonnene $C = (A, S)$ als Kommutator eines zuletzt gewonnenen A mit einer Erzeugenden darstellen und verhältnismäßig einfache Relativdurchkreuzungen, die bei Kummerschen Körpererweiterungen nötig werden, zur Fortsetzung der Konstruktion vornehmen kann. Ein abgerundetes kanonisches Lösungsverfahren hätte man erst bei Übereinstimmung der Entwicklungen $\mathfrak{F}^m$ und $\mathfrak{F}_m$.

9. Der zweistufige Teil $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}''$, insbesondere der Kommutator $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$, hat eine Basis von Elementen $S_{\mu_1\ldots\mu_r}$ mit

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1} < \mu_{k+1} \leqq \cdots \leqq \mu_r \leqq \mu_k \tag{29}$$

ür irgend ein $k > 1$. Nämlich die Kommutatorgruppe der „freien zwei-tufigen Gruppe" ist eine freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}'' = \{S_{\varkappa\lambda}\}_{\mathfrak{S}}$; $1 \leqq \varkappa < \lambda \leqq n$, mit freier Abelscher Operatorengruppe $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ und den Operatorrelationen [18]), [19])

$$S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\mu \Delta_\nu} = S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\nu \Delta_\mu}; \quad S_{\lambda\mu}^{\Delta_\varkappa} S_{\mu\varkappa}^{\Delta_\lambda} S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\mu} = 1. \tag{30}$$

Auf Grund dessen und wegen $S_{\lambda\varkappa} = S_{\varkappa\lambda}^{-1}$ läßt sich ein beliebiger Kommutator in der Form

$$S_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r} = (S_{\varkappa_2 \ldots \varkappa_r}, S_{\varkappa_1}) = \Pi S_{\varkappa_v \varkappa_w}^{\pm \Pi \Delta_{\varkappa_\varrho}} \qquad (\varrho \neq v, w; \varkappa_\varrho \leqq \varkappa_\omega) \tag{31}$$

wie in [2]) Kap. II eindeutig darstellen. Man ordne nun die $\Delta_{\varkappa_\varrho}$ im Exponenten eines $S_{\varkappa_v \varkappa_w}$ nach der Größe der $\varkappa$ und ordne $\varkappa_v$ unter die $\varkappa_\varrho$ ein. Die $\varkappa_\varrho \leqq \varkappa_v$ mögen aufsteigend $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-2}$, heißen, wodurch k festliegt; ferner sei $\varkappa_v = \mu_{k-1}$, und die $\varkappa_\varrho > \varkappa_v$ sollen aufsteigend $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_r$, schließlich $\varkappa_w = \mu_k$ heißen. Dann hat

$$S^{(r)} = S_{\varkappa_v \varkappa_w}^{\Pi \Delta_{\varkappa_\varrho}} = S_{\mu_{k-1} \mu_k}^{\Pi \Delta_{\mu_\varrho}} \qquad (\varrho \neq k-1, k) \tag{32}$$

tatsächlich das Leitglied $\pm \Delta_{\mu_1} \Delta_{\mu_2} \ldots \Delta_{\mu_r}$; denn $S^{(r)}$ entsteht aus

$$S_{\varkappa_v \varkappa_w} \equiv 1 - \Delta_{\varkappa_v} \Delta_{\varkappa_w} + \Delta_{\varkappa_w} \Delta_{\varkappa_v} \bmod \mathfrak{D}^3$$

durch Kommutatorbildung nacheinander mit allen $\Delta_{\varkappa_\varrho}$, und jedesmal ist unter Einsetzen von (24) das Leitglied zu ermitteln. Umgekehrt kommt $\Delta_{\mu_1} \ldots \Delta_{\mu_r}$ als Leitglied nur bei dem einen $S^{(r)}$ der Gestalt (32) vor; denn die Stelle k ist dadurch ausgezeichnet, daß $\mu_k > \mu_\varrho$ für $\varrho < k$ und $\geqq \mu_\varrho$ für $\varrho > k$, und bestimmt die Darstellung (32). Infolge Eindeutigkeit der Darstellung (31) bilden aber die $S^{(r)}$ in (32) eine Basis für $\mathfrak{C}_r$. Diese hat also linear unabhängige Glieder der Dimension r, und daher ist

$$\mathfrak{F}_r \mathfrak{F}''/\mathfrak{F}_{r+1} \mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}^r \mathfrak{F}''/\mathfrak{F}^{r+1} \mathfrak{F}'', \tag{33}$$

d. h. die Magnussche Vermutung ist innerhalb $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}''$ richtig.

Für $n = 2$ entsteht bei Ordnungsbeschränkung $S_1^{h_1} = S_2^{h_2} = S_{12}^{k} = 1$ die Zweiggruppe [2]) vom Typ $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$, für die ich in [3]) eine Körperkonstruktion lieferte, bei der ich den Kommutator, also alle Dimensionen von der zweiten an, in einem Schritt nahm. Es zeigte sich schon dort, daß im Abelschen Teilkörper die Zerfallsbedingungen für die Vollendung der Konstruktion dieselben waren wie überhaupt zur Bildung der zweiten Dimension, wenn nur der Grundkörper nicht die l-ten Einheitswurzeln

[18]) Vgl. Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes. Hamburger Abh. 7 (1929), S. 14–36; Formel (7) und (10) auf S. 22. Diese Bedingungen sind nach [19]) auch hinreichend für die Bildbarkeit einer zweistufigen Gruppe, also (10) allein für die freie zweistufige Gruppe.

[19]) O. Schreier, Erweiterung von Gruppen II, Hamburger Abh. 4 (1926), S. 322.

enthielt. Und dies stimmt damit überein, daß man den ganzen Zweigkörper von Schicht zu Schicht konstruieren und dabei wie in 4. jede in zyklische Bestandteile zerlegbare Schicht so wählen kann, daß auch die nächste Schicht noch konstruierbar ist.

Im Falle $l = 2$ (oder $\zeta_l < K_0$) lagen dagegen schon bei Zweigkörpern bisweilen höhere Zerfallsbedingungen vor, und das äußert sich im allgemeinen Fall beim Fortschreiten in zentralen Schritten so, daß infolge des quadratischen Reziprozitätsgesetzes die Potenzrestbedingungen in 4. nicht voneinander unabhängig sind und sich daher die Durchkreuzung der letztgewonnenen Schicht nicht immer so vornehmen läßt, daß noch die nächste Schicht konstruierbar ist. Es muß hierfür zumindest in der vorletztgewonnenen Schicht durch eine passende Durchkreuzung Vorsorge getroffen werden. Dies bleibt also für $l = 2$ noch übrig, um überhaupt zu jeder l-Gruppe bei gegebenem Grundkörper eine Körperkonstruktion zu erhalten.

(Eingegangen am 4. und 27. Mai 1936.)

Zur Liniengeometrie im linearen Strahlenkomplex und zur Laguerreschen Kugelgeometrie.

Von

Ulrich Graf in Berlin.

Die Kollineationsgeometrie in einem linearen Strahlenkomplex Γ läßt sich aus seinen involutorischen Projektivitäten entwickeln; dieser Aufbau ist, wie aus der Abbildung der Strahlen des Komplexes auf die Punkte einer Hyperfläche zweiter Ordnung folgt, analog dem Aufbau einer (nichteuklidischen) metrischen Geometrie aus Spiegelungen. Die Isomorphie der Kollineationsgeometrie eines allgemeinen linearen Strahlenkomplexes zur Laguerreschen Kugelgeometrie in nichteuklidischen Räumen vermittelt die gleichlaufende Entwicklung beider Disziplinen, wobei der Übergang zum speziellen linearen Komplex in der isomorphen Übertragung auf die Laguerresche Kugelgeometrie eines Raumes mit einer Metrik vom euklidischen Typ führt. Die benutzte Isomorphie gestattet den Aufbau quadratischer Mannigfaltigkeiten von linearen Strahlenkongruenzen aus Γ, die den linearen Mannigfaltigkeiten in demselben Sinne übergeordnet sind wie die Kugeln den Ebenen[1]).

A. Der allgemeine lineare Strahlenkomplex — der Kugelraum mit nichteuklidischer Metrik.

In Plückerschen Linienkoordinaten $\mathfrak{x}_{ik}$, zwischen denen die quadratische Fundamentalrelation

$$\mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0 \tag{1}$$

besteht, sei der lineare Strahlenkomplex Γ durch die Gleichung

$$\Gamma\colon\ \mathfrak{x}_{12} + k^2 \cdot \mathfrak{x}_{03} = 0 \tag{2}$$

gegeben; für $k^2 = 0$ wird Γ speziell. In den neuen Koordinaten x_λ, die mit den $\mathfrak{x}_{ik}$ durch die Zuordnung

$$(3)\quad \begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\mathfrak{x}_{01} + \mathfrak{x}_{23}) : (\mathfrak{x}_{01} - \mathfrak{x}_{23}) : (\mathfrak{x}_{02} - \mathfrak{x}_{31}) \\ \qquad\qquad : -(\mathfrak{x}_{02} + \mathfrak{x}_{31}) : 2\,\mathfrak{x}_{03}, \\ \mathfrak{x}_{01} : \mathfrak{x}_{02} : \mathfrak{x}_{03} : \mathfrak{x}_{23} : \mathfrak{x}_{31} : \mathfrak{x}_{12} = (x_0 + x_1) : (x_2 - x_3) : x_4 \\ \qquad\qquad : (x_0 - x_1) : -(x_2 + x_3) : -k^2 x_4 \end{cases}$$

[1]) U. Graf, Über einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades, Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 671.

verbunden sind, lautet die Plückersche Fundamentalrelation

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - k^2 \cdot x_4^2 = 0. \tag{4}$$

Zwei Strahlen x_λ und $\bar{x}_\lambda$ schneiden einander, wenn

$$x_0\bar{x}_0 - x_1\bar{x}_1 - x_2x_2 + x_3\bar{x}_3 - k^2 \cdot x_4\bar{x}_4 = 0 \tag{5}$$

ist.

Eine in Γ enthaltene lineare Kongruenz C_1^1 ist durch eine Gleichung der Form

$$(A\,x) \equiv A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = 0 \tag{6}$$

gegeben, und zwar ist der Typ der Kongruenz durch das Vorzeichen der Diskriminante

$$\{AA\} \equiv k^2A_0^2 - k^2A_1^2 - k^2A_2^2 + k^2A_3^2 - A_4^2 \tag{7}$$

bestimmt:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I.} \quad \{AA\} \neq 0 : C_1^1 \text{ nicht speziell;} \\ \quad \text{a)} \ \{AA\} < 0 : C_1^1 \equiv H_1^1 \text{ hyperbolisch,} \\ \quad \text{b)} \ \{AA\} > 0 : C_1^1 \equiv E_1^1 \text{ elliptisch;} \\ \text{II.} \quad \{AA\} = 0 : C_1^1 \equiv P_1^1 \text{ parabolisch.} \end{array}\right. \tag{8}$$

Invariant bei den Kollineationen in Γ bleibt das Doppelverhältnis, das zwei Kongruenzen ${}_AC_1^1 : (Ax) = 0$ und ${}_BC_1^1 : (Bx) = 0$ mit dem Paar der in ihrem Büschel enthaltenen speziellen Kongruenzen ${}_1P_1^1$ und ${}_2P_1^1$ bilden; statt dieses Doppelverhältnisses selbst wird der Ausdruck

$$\begin{aligned} D = D(A,B) &= \frac{1}{2k} \cdot \ln \text{D. V.}\,({}_AC_1^1,\, {}_BC_1^1;\, {}_1P_1^1,\, {}_2P_1^1) \\ &= \frac{1}{2k} \cdot \ln \frac{\{AB\} + \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\,\{BB\}}}{\{AB\} - \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\,\{BB\}}} \end{aligned} \tag{9}$$

benutzt, der auch im Grenzübergang für $k \to 0$ einen endlichen, von ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ abhängigen Wert behält. Zwei Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ sind konjugiert, wenn

$$\{AB\} \equiv k^2 \cdot A_0B_0 - k^2 \cdot A_1B_1 - k^2 \cdot A_2B_2 + k^2 \cdot A_3B_3 - A_4B_4 = 0 \tag{10}$$

oder

$$D = \frac{i\pi}{2k}$$

ist.

Zwei Kongruenzen $(Ax) = 0$ und $(Bx) = 0$, die konjugiert sein mögen, schneiden einander in einer Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}_{AB}^2$; für die durch $\mathfrak{R}_{AB}^2$ bestimmte Fläche zweiten Grades R_{AB}^2 gilt folgende Einteilung:

(11)
$$\begin{cases} \text{I.} & R^2_{AB} \text{ nicht singulär} \\ & \{AA\} \neq 0, \quad \{BB\} \neq 0, \quad \{AB\} = 0, \\ & \text{a) } \{AA\} \cdot \{BB\} < 0 : R^2_{AB} \text{ reell}, \\ & \text{b) } \{AA\} \cdot \{BB\} > 0 : R^2_{AB} \text{ imaginär}; \\ \text{II.} & R^2_{AB} \text{ zweifach singulär (Ebenenpaar)} \\ & \{AA\} = 0, \quad \{BB\} \neq 0, \quad \{AB\} = 0, \\ & \text{a) } \{BB\} < 0 : R^2_{AB} \text{ reelles Ebenenpaar}, \\ & \text{b) } \{BB\} > 0 : R^2_{AB} \text{ konj. imag. Ebenenpaar}; \\ \text{III.} & R^2_{AB} \text{ dreifach singulär (Doppelebene)} \\ & \{AA\} = 0, \quad \{BB\} = 0, \quad \{AB\} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung von R^2_{AB} in homogenen Punktkoordinaten x_λ lautet

$$\begin{aligned} & k^2(-\gamma_{02}+\gamma_{03}-\gamma_{12}+\gamma_{13})x_0^2+(\gamma_{02}+\gamma_{03}+\gamma_{12}+\gamma_{13})x_1^2 \\ & +(-\gamma_{02}+\gamma_{03}+\gamma_{12}-\gamma_{13})x_2^2+k^2(\gamma_{02}+\gamma_{03}-\gamma_{12}-\gamma_{13})x_3^2 \\ & +2(\gamma_{04}+\gamma_{14})x_0x_1+2(\gamma_{24}-\gamma_{34})x_0x_2-2k^2(\gamma_{01}+\gamma_{23})x_0x_3 \\ & +2(-\gamma_{01}+\gamma_{23})x_1x_2-2(\gamma_{24}+\gamma_{34})x_1x_3-2(\gamma_{04}-\gamma_{14})x_2x_3=0, \end{aligned}$$

wobei die γ_{ik} die zweigliedrigen Unterdeterminanten

$$\gamma_{ik} = \begin{vmatrix} A_i & A_k \\ B_i & B_k \end{vmatrix}$$

der Matrix

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

sind. Zwischen ihnen bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma_{01}\gamma_{23}+\gamma_{02}\gamma_{31}+\gamma_{03}\gamma_{12}&=0, \\ \gamma_{02}\gamma_{34}+\gamma_{03}\gamma_{42}+\gamma_{04}\gamma_{23}&=0, \\ \gamma_{03}\gamma_{41}+\gamma_{04}\gamma_{13}+\gamma_{01}\gamma_{34}&=0, \end{aligned}$$

aus denen sich weiterhin die analog gebauten Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_{12}\gamma_{34}+\gamma_{13}\gamma_{42}+\gamma_{14}\gamma_{23}&=0, \\ \gamma_{01}\gamma_{24}+\gamma_{02}\gamma_{41}+\gamma_{04}\gamma_{12}&=0 \end{aligned}$$

ableiten lassen. Diese γ_{ik} stellen, wie aus der Deutung der A_λ bzw. B_λ als homogener Punktkoordinaten folgt, die Linienkoordinaten in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit dar.

Die projektiven Transformationen im linearen Strahlenkomplex Γ lassen sich aus den involutorischen Projektivitäten aufbauen[2]). Es gibt zwei Typen solcher Involutionen:

[2]) Vgl. G. Haenzel, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes gegründet auf seine Polarentheorie, Crelles Journ. 174 (1936), S. 226.

1. *Primäre Involutionen*, induziert

sowohl durch die Kollineation im geschart involutorischen Raum einer in Γ enthaltenen linearen Kongruenz C_1^1

als auch durch die Korrelation im Nullraum des zu Γ konjugierten linearen Komplexes, der Γ in C_1^1 trifft;

2. *Sekundäre Involutionen*, induziert

sowohl durch die Korrelation im polaren Raum einer in Γ enthaltenen Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$

als auch durch die Kollineation im geschart involutorischen Raum derjenigen komplexfremden Kongruenz, die Γ in $\mathfrak{R}^2$ trifft.

Bei einer *primären Involution* $\mathfrak{I}_p$ bleiben in Γ die Strahlen der bestimmenden Kongruenz $C_1^1 : (A\,x) = 0$ sowie sämtliche zu C_1 konjugierten Kongruenzen, die ein Gebüsch $\pi_3(C_1^1)$ bilden, fest. Die ∞^2 parabolischen Kongruenzen aus $\pi_3(C_1^1)$ haben zu (doppelt zählenden) Leitgeraden die Strahlen von C_1^1.

Entsprechend der Einteilung (8) gibt es ∞^4 primäre Involutionen $\mathfrak{I}_p$ vom hyperbolischen Typ ($\{A\,A\} < 0$), ∞^4 vom elliptischen Typ ($\{A\,A\} > 0$) und ∞^3 vom parabolischen Typ ($\{A\,A\} = 0$). Im letzten Falle ist $\mathfrak{I}_p$ ausgeartet: *jedem* Strahl aus Γ ist die (doppelt zählende) Leitgerade

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = k^2 A_0 : -k^2 A_1 : -k^2 A_2 : k^2 A_3 : -A_4$$

der parabolischen Kongruenz $(A\,x) = 0$ zugeordnet.

Bei einer *sekundären Involution* $\mathfrak{I}_s$ bleiben in Γ alle Strahlen der bestimmenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ sowie das in Γ liegende Strahlenpaar der Leitschar von R^2 fest. Dieses Strahlenpaar trägt den invarianten Kongruenzenbündel $\pi_2(\mathfrak{R}^2)$, dessen Kongruenzen sämtlich durch $\mathfrak{I}_s$ in sich transformiert werden. Die ∞^1 parabolischen Kongruenzen von $\pi_2(\mathfrak{R}^2)$ haben zu (doppelt zählenden) Leitgeraden die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$.

Die Einteilung (11) der Regelflächen zweiten Grades entspricht der Einteilung der sekundären Involutionen. Ist R^2_{AB} zweifach singulär, so wird durch $\mathfrak{I}_s$ *jeder* Strahl von Γ in die Schnittgerade

$$\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 : \bar{x}_4 = k^2 A_0 : -k^2 A_1 : -k^2 A_2 : k^2 A_3 : -A_4$$

des Ebenenpaares R^2_{AB}, d. h. also in die (doppelt zählende) Leitgerade der parabolischen Kongruenz ${}_AP_1^1 : (A\,x) = 0$, zu der sämtliche Kongruenzen des Büschels ${}_AP_1^1 + \lambda \cdot {}_BC_1^1 = 0$ konjugiert sind, übergeführt. Längs dieses Strahles berühren einander die ∞^2 Kongruenzen des $\mathfrak{R}^2_{AB}$ invariant zugeordneten C_1^1-Bündels $\pi_2(\mathfrak{R}^2_{AB})$, dessen Kongruenzen gleichzeitig zu ${}_AP_1^1$ und ${}_BC_1^1$ konjugiert sind.

Der Zusammenhang zwischen den primären und sekundären Involutionen ergibt sich aus der Figur von fünf paarweise konjugierten Kon-

gruenzen im Komplex Γ, die sich bei der Abbildung der Komplexstrahlen als Träger parabolischer Kongruenzen auf die Punkte einer M_3^2 den Ecken eines Polarpentatops zuordnen lassen. Je zwei dieser fünf Kongruenzen bestimmen eine Regelschar zweiten Grades in Γ, wobei von der zugehörigen Leitschar nur zwei Strahlen, nämlich die (doppelt zählenden) Leitgeraden der beiden parabolischen Kongruenzen aus dem Büschel durch die beiden Ausgangskongruenzen, in Γ liegen. In den zehn möglichen Büscheln ergeben sich somit zehn Geradenpaare aus Γ, die 60 Punkte bestimmen, wobei durch jeden Punkt zwei Gerade laufen und auf jeder Geraden sechs Punkte liegen. Jedes Geradenpaar legt als Paar der Leitschar eine mit der gesamten Regelschar in Γ enthaltene Regelfläche zweiten Grades fest; die drei mit dem Ausgangspaar inzidenten Geradenpaare gehören der Regelschar an und trennen einander paarweise harmonisch[3]). Auf diese Weise ergeben sich zehn Regelflächen zweiten Grades derart, daß jede autopolar im polaren Raume von drei anderen liegt. Aus dieser Grundkonfiguration[4]) ergibt sich:

Zwei primäre Involutionen an konjugierten Kongruenzen führen auf die sekundäre Involution an der ihnen gemeinsamen Regelschar; zwei sekundäre Involutionen an autopolaren Regelscharen führen auf die primäre Involution an der ihnen invariant zugeordneten Kongruenz.

Die Isomorphie der Kollineationsgruppe im allgemeinen linearen Strahlenkomplex zur Laguerreschen Gruppe eines Kugelraumes mit nichteuklidischer Metrik ergibt sich aus der Kleinschen Abbildung der Komplexstrahlen als Träger parabolischer Kongruenzen auf die Punkte einer M_3^2, wobei den nicht-speziellen Kongruenzen des Komplexes die Punkte des die M_3^2 tragenden R_4 zugeordnet werden. Werden nämlich diese Punkte durch eine verallgemeinerte zyklographische Projektion auf einen dreidimensionalen Bildraum bezogen, indem jedem Punkte des R_4 die (orientierte) Spurfläche zweiten Grades seines Tangentialhyperkegels an M_3^2 im Bildraum zugeordnet wird, so ist, sofern noch die Schnittfläche F^2 des Bildraumes mit der M_3^2 als Fundamentalgebilde der Metrik im Bildraum erklärt wird, jede Kongruenz des linearen Komplexes auf eine orientierte Kugel (Sphäre) des Bildraumes abgebildet[5]). Diese Abbildung ist, sofern $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ als die homogenen Koordinaten der Ebene

$$\mathfrak{x}_1 \cdot x_1 + \mathfrak{x}_2 \cdot x_2 + \mathfrak{x}_3 \cdot x_3 + \mathfrak{x}_4 \cdot x_4 = 0$$

---

[3]) Von drei solchen Geradenpaaren sind zwei reell, während das dritte aus konjugiert imaginären Geraden besteht.

[4]) Sie entspricht der Kummerschen Konfiguration.

[5]) U. Graf, Über Laguerresche Geometrie in Ebenen und Räumen mit nichteuklidischer Metrik, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 45 (1935), S. 212.

und x_0 als ihre Orientierungskoordinate gedeutet werden, durch (3) gegeben; die Maßbestimmung des Kugelraumes mit den homogenen Punktkoordinaten x_λ gründet sich auf die Fläche zweiter Ordnung

$$F^2: \quad k^2 x_1^2 + k^2 x_2^2 - k^2 x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{12}$$

dem (als Klassengebilde aufzufassenden) geometrischen Ort aller zu sich selbst entgegengesetzt orientierten (isotropen) Ebenen $x_0 = 0$, als metrisches Fundamentalgebilde.

Im einzelnen gilt folgende Gegenüberstellung:

Linearer Strahlenkomplex:	Laguerrescher Kugelraum:
Strahl,	orientierte Ebene,
einander schneidende Strahlen,	parallele orientierte Ebenen,
Strahlenbüschel,	Parallelebenenbüschel,
Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$,	orient. gerader Kreiskegel K^2,
Lineare Kongruenz C_1^1,	Sphäre (orient. Kugel) S^2,
a) C_1^1 nicht speziell,	a) S^2 irreduzibel,
b) $C_1^1 \equiv P_1^1$ parabolisch,	b) S^2 reduzibel [6]),
C_1^1-Büschel,	Sphärenschar,
C_1^1-Bündel,	Sphärenheer,
C_1^1-Gebüsch,	Sphärenverband,
Invariante $D(A, B)$ zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$,	Distanz [7]) D der Sphären S_A^2 und S_B^2,
Primäre Involutionen,	Laguerresche Spiegelungen erster Art,
Sekundäre Involutionen,	Laguerresche Spiegelungen zweiter Art,
Gruppe $\mathfrak{L}^{10}$ der automorphen Kollineationen von Γ.	Gruppe L^{10} der Laguerreschen Kugeltransformationen.

Zwei Sphären liegen in absoluter Lage (entsprechend zwei konjugierten Kongruenzen), wenn ihre Distanz $D = \frac{i\pi}{2k}$ ist; zwei Kegel liegen in absoluter Lage (entsprechend zwei autoplaren Regelscharen), wenn dasjenige Ebenenpaar, das die beiden absoluten Kreise des einen Kegels trägt, dem anderen Kegel angehört. Die beiden Ebenenpaare, die die absoluten Kreise zweier solcher Kegel in absoluter Lage tragen, gehören wieder einem Kegel K^2 an und trennen auf diesem einander harmonisch.

Die Gruppe der Laguerreschen Kugelgeometrie in einem Raume mit nicht-singulärer Metrik enthält zwei Typen involutorischer Transformationen, die Spiegelungen erster und zweiter Art. Der Aufbau der automorphen

[6]) Zerfallen in die ∞^2 Parallelebenen einer festen Ebene.

[7]) Tangentialentfernung der beiden Sphären, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt.

Kollineationen von Γ aus primären und sekundären Involutionen geht mit dem Aufbau der Laguerreschen Kugeltransformationen aus Spiegelungen erster und zweiter Art Hand in Hand.

Eine *Laguerresche Spiegelung erster Art*[8]) ist sowohl durch eine Sphäre S^2 als auch durch den der Sphäre absolut zugehörigen Sphärenverband $\pi_3(S^2)$ festgelegt. Die einer Ebene $\mathfrak{x}$ durch die Spiegelung an S^2 zugeordnete Ebene $\bar{\mathfrak{x}}$ wird gewonnen, indem die ∞^1 zu $\mathfrak{x}$ parallelen Tangentialebenen von S^2 konstruiert werden; die zweite diesen Ebenen parallele Ebene ist $\bar{\mathfrak{x}}$. Diese ∞^1 Tangentialebenen von S^2 bilden einen geraden Kreiskegel K^2, dessen beide absolute Kreise von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ getragen werden. $\mathfrak{x}$ ist stets irgend drei Sphären aus $\pi_3(S^2)$ durch $\mathfrak{x}$ gemeinsam (Fig. 1).

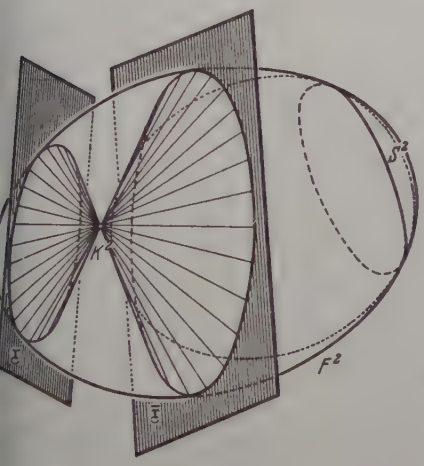


Fig. 1.

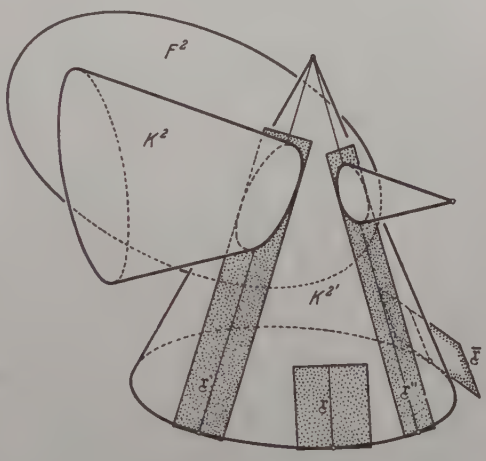


Fig. 2.

Eine *Laguerresche Spiegelung zweiter Art* ist sowohl durch eine Sphärenschar π_1 (getragen von einem Kegel K^2) als auch durch das absolut zugehörige Sphärenheer π_2 (getragen von dem Ebenenpaar $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, das die beiden absoluten Kreise von K^2 enthält) festgelegt. Die einer Ebene $\mathfrak{x}$ durch die Spiegelung an K^2 zugeordnete Ebene $\bar{\mathfrak{x}}$ gehört dem Kegel durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ an; auf diesem Kegel $K^{2\prime}$ trennen die Ebenenpaare $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ einander harmonisch. K^2 und $K^{2\prime}$ sind in absoluter Lage (Fig. 2).

Der im linearen Strahlenkomplex benutzten Grundfigur von fünf paarweise konjugierten Kongruenzen entspricht im Kugelraum die Figur von fünf Sphären in paarweise absoluter Lage[9]). Sie bestimmen zehn

[8]) Vgl. die der Spiegelung an einer Sphäre analoge Transformation in der Ebene, die Spiegelung am Zykel, bei H. Beck, Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften, Transact. of the Amer. Soc. 11 (1910), S. 426.

[9]) Diese Figur wird durch die absolute Polarität aus der Figur von fünf einander orthogonal schneidenden Kugeln gewonnen.

Kreiskegel derart, daß jeder in absoluter Lage zu drei anderen liegt; die zehn die absoluten Kreise der Kegel enthaltenden Ebenenpaare ergeben 20 Ebenen im Kugelraum, von denen jede zu sechs anderen parallel ist. Aus dieser Grundfigur des Kugelraumes folgt:

Zwei Spiegelungen erster Art an Sphären in absoluter Lage führen auf die Spiegelung zweiter Art an dem sie verbindenden Kegel; zwei Spiegelungen zweiter Art an Kegeln in absoluter Lage führen auf die Spiegelung erster Art an der ihnen absolut zugeordneten Sphäre.

B. Der spezielle lineare Strahlenkomplex — der Kugelraum mit euklidischer Metrik.

Der Übergang zum speziellen Komplex führt in der isomorphen Übertragung auf die Laguerresche Kugelgeometrie eines Raumes mit einer Metrik vom euklidischen Typ. Auf diese Weise lassen sich die Gesetze der Laguerreschen Kugelgeometrie im euklidischen Raum als Grenzfall derjenigen in einem nichteuklidischen Raume in derselben Art gewinnen wie die Beziehungen in einem speziellen linearen Strahlenkomplex als Ausartungen derjenigen eines allgemeinen Komplexes.

Aus (2) ergibt sich für $k^2 = 0$ der spezielle Komplex

(2 a) $$\bar{\Gamma}: \quad \mathfrak{x}_{12} = 0$$

mit der Achse [10])

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = 0 : 0 : 0 : 0 : 1.$$

Zwischen den $\mathfrak{x}_\lambda$ besteht die Beziehung

(4 a) $$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Die metrische Fundamentalfläche $\bar{F}^2$ des zugeordneten Laguerreschen Kugelraumes erhält nach (12) die Gleichung

(12 a) $$\bar{F}^2: \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

ist also ein Kegelschnitt [11]) (einfach-singuläres Gebilde zweiter Klasse). Es entsprechen einander

im speziellen Strahlenkomplex	im euklidischen Kugelraum
Strahlenbündel oder Strahlenfeld,	Ebenenbündel mit absolutem Zentrum,
Strahlenbüschel, dem die Komplexachse nicht angehört,	Ebenenbüschel mit isotroper Trägergeraden,
Strahlenbüschel, dem die Komplexachse angehört.	Ebenenbüschel mit uneigentlicher Trägergeraden (Parallelebenenbüschel).

[10]) Der Achse von $\bar{\Gamma}$ entspricht die uneigentliche Ebene des Kugelraumes.

[11]) Aus Realitätsgründen ist der Fundamentalkegelschnitt (12 a) reell gewählt, so daß sich die Laguerresche Geometrie in einem Raume mit pseudoeuklidischer Metrik ergibt.

Für die im speziellen Komplex enthaltenen linearen Kongruenzen

$$C_1^1\colon\ (A\,x) \equiv A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0$$

und die ihnen entsprechenden Sphären S^2 des Laguerreschen Kugelraumes gilt folgende Einteilung:

	Kongruenz C_1^1	*Sphäre* S^2
I. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 \neq 0$	$C_1^1 \equiv H_1^1$ hyperbolisch	S^2 eigentlich
II. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 = 0$, $[A\,A] \equiv A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 \neq 0$	$C_1^1 \equiv P_1^1$ parabolisch	S^2 entartet in einen den absoluten Kreis in zwei Punkten berührenden Klassenkegelschnitt der uneigentlichen Ebene
III. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 = 0$, $[A\,A] \equiv A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 = 0$	C_1^1 zerfallen in Strahlenbündel und Strahlenfeld	S^2 zerfallen in Ebenenbündelpaar mit absoluten Trägerpunkten

Zwei Kongruenzen [Sphären] $(A\,x) = 0$ und $(B\,x) = 0$ bestimmen eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ [einen orient. Kegel K^2] als Träger ihres Büschels [ihrer Schar]. Für die Art der durch $\mathfrak{R}^2$ festgelegten Fläche zweiten Grades R^2 bzw. den Kegel K^2 ist maßgebend der Wert von

$$\Delta = A_4^2 [B\,B] - 2 A_4 B_4 [A\,B] + B_4^2 [A\,A]$$

und

$$\delta = [A\,A][B\,B] - [A\,B]^2,$$

wobei

$$[A\,B] = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3$$

ist[12]). Es gilt folgende Einteilung:

	Regelfläche R^2	*Kegel* K^2
I. $\Delta \neq 0$	nichtsinguläre Fläche	eigentlicher Kegel
II. $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$	Strahlenbüschelpaar	Ebenenbüschelpaar
a) A_4, B_4 verschwinden nicht gleichzeitig	Strahlenbüschelpaar, der gemeinsame Strahl ist nicht die Achse	Ebenenbüschelpaar mit isotropen Trägergeraden durch denselben absoluten Punkt
b) $A_4 = B_4 = 0$	Strahlenbüschelpaar mit der Achse als gemeinsamem Strahl	Parallelebenenbüschelpaar
III. $\Delta = 0$, $\delta = 0$	Doppelzählender Strahlenbüschel, dem die Achse angehört	Doppelt zählendes Parallelebenenbüschel

[12]) $\Delta = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die freien Leitgeraden zweier Kongruenzen aus $\overline{\Gamma}$ einander schneiden.

Die Invariante D zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ bzw. die Distanz ihrer beiden Bildsphären erscheint nach dem Grenzübergang für $k \to 0$ in der Form

$$(9\,a)\quad D = \frac{1}{A_4\,B_4}\sqrt{(A_1B_4-A_4B_1)^2+(A_2B_4-A_4B_2)^2+(A_3B_4-A_4B_3)^2-(A_0B_4-A_4B_0)^2}.$$

Die Entartung des allgemeinen Komplexes in einen speziellen, gleichbedeutend mit der Entartung der allgemeinen Metrik des zugeordneten Laguerreschen Kugelraumes in eine Metrik vom euklidischen Typ, bringt eine Aufspaltung der primären und sekundären Involutionen $\mathfrak{I}_p$ und $\mathfrak{I}_s$ in je zwei Typen $\mathfrak{I}_p^1$, $\mathfrak{I}_p^2$ und $\mathfrak{I}_s^1$, $\mathfrak{I}_s^2$ von verschiedener Struktur mit sich. Das einer allgemeinen Kongruenz im speziellen Komplex invariant zugeordnete Kongruenzengebüsch besteht *stets* aus dem Gebüsch der entarteten Kongruenzen $\{A\,A\} = 0$, während einem allgemeinen Kongruenzengebüsch des speziellen Komplexes eine entartete Kongruenz (nicht mehr eineindeutig) zugeordnet ist. Laufen insbesondere alle Kongruenzen dieses Gebüsches durch *einen* Komplexstrahl, so ist die zugeordnete Kongruenz in das durch diesen Strahl und die Achse des Komplexes bestimmte Strahlenbündel und Strahlenfeld zerfallen.

Eine primäre [sekundäre] Involution im speziellen Komplex ist demnach nicht mehr *sowohl* durch eine in ihm enthaltene lineare Kongruenz [Regelschar zweiten Grades] *als auch* durch ein Kongruenzengebüsch [einen Kongruenzenbündel] bestimmt, sondern *entweder* durch eine Kongruenz [Regelschar] *oder* ein Kongruenzengebüsch [einen Kongruenzenbündel].

Im speziellen linearen Strahlenkomplex $\bar{\Gamma}$ gibt es somit folgende Arten von Involutionen:

1. *Primäre Involutionen.*

a) $\mathfrak{I}_p^1$, primäre Involution erster Art, festgelegt durch eine Kongruenz C_1^1 aus $\bar{\Gamma}$, konstruierbar durch die Kollineation des geschart involutorischen Raumes von C_1^1.

b) $\mathfrak{I}_p^2$, primäre Involution zweiter Art, festgelegt durch ein Kongruenzengebüsch $\pi_3(C_1^1)$ aus $\bar{\Gamma}$. Einem Strahl r aus $\bar{\Gamma}$ ist derjenige Komplexstrahl s zugeordnet, der mit r zusammen als Grundgeradenpaar einen in $\pi_3(C_1^1)$ enthaltenen Kongruenzenbündel trägt. Irgend drei Kongruenzen aus $\pi_3(C_1^1)$ durch einen Strahl r laufen durch den r zugeordneten Strahl s.

2. *Sekundäre Involutionen.*

a) $\mathfrak{I}_s^1$, sekundäre Involution erster Art, festgelegt durch eine in $\bar{\Gamma}$ enthaltene Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$ (als Träger eines Kongruenzenbüschels), konstruierbar durch die Korrelation des polaren Raumes von $\mathfrak{R}^2$.

b) $\mathfrak{I}_s^2$, sekundäre Involution zweiter Art, festgelegt durch ein Strahlenpaar u, v aus $\bar{\Gamma}$ (als Trägerpaar eines Kongruenzenbündels). Einem Strahl r aus $\bar{\Gamma}$ ist der vierte harmonische Strahl s auf der durch r und u, v laufenden Regelschar zweiten Grades zugeordnet. (D. V. $(r, s; u, v) = -1$).

In dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum mit einer Metrik vom euklidischen Typ[13]) entsprechen diesen involutorischen projektiven Transformationen in $\bar{\Gamma}$ die Laguerreschen Spiegelungen an der Sphäre ($\mathfrak{I}_p^1$), an der Spärenschar ($\mathfrak{I}_s^1$), am Sphärenheer ($\mathfrak{I}_s^2$) und am Sphärenverband ($\mathfrak{I}_p^2$). Durch die Laguerresche Spiegelung an einer Sphäre werden die Parallelebenenbüschel in sich transformiert, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß bei einer Transformation $\mathfrak{I}_p^1$ die Strahlenbüschel aus $\bar{\Gamma}$ fest bleiben.

C. Quadratische Kongruenzenmannigfaltigkeiten im linearen Strahlenkomplex.

Die Invariante $D({}_AC_1^1, {}_BC_1^1)$ zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ in Γ, gleichbedeutend mit der Distanz der beiden Bildsphären in dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum, veranlaßt die Betrachtung dreistufiger quadratischer Mannigfaltigkeiten in Γ enthaltener Kongruenzen C_1^1, bestehend aus allen Kongruenzen, die mit einer gegebenen Kongruenz ${}_MC_1^1$ einen festen D-Wert bestimmen. Die so erklärten *sphärischen C_1^1-Komplexe* $\sigma_3^2(C_1^1)$ sind den Kongruenzengebüschen $\pi_3(C_1^1)$ in Γ in etwa demselben Sinne übergeordnet wie die Kugeln den Ebenen; für $D = \frac{i\pi}{2k}$ geht ein sphärischer C_1^1-Komplex in ein (doppelt zählendes) Kongruenzengebüsch und seine „Mittelkongruenz" ${}_MC_1^1$ in die dem Gebüsch invariant zugehörige Kongruenz über.

Entsprechend wird die Mannigfaltigkeit der $\infty^2[\infty^1]$ Kongruenzen eines Gebüsches [Bündels], die mit einer gegebenen Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ des Gebüsches [Bündels] einen festen D-Wert bestimmen, als *sphärische C_1^1-Kongruenz* $\sigma_2^2(C_1^1)$ [*sphärische C_1^1-Reihe* $\sigma_1^2(C_1^1)$] bezeichnet. Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ entartet die sphärische C_1^1-Kongruenz [sphärische C_1^1-Reihe] in ein (doppelt zählendes) Kongruenzenbündel $\pi_2(C_1^1)$ [Kongruenzenbüschel $\pi_1(C_1^1)$].

Diese Vorstellungen behalten auch für einen speziellen Komplex $\bar{\Gamma}$ nach dem sinngemäß anzustellenden Grenzübergang Gültigkeit.

---

[13]) Vgl. E. Müller, Die Geometrie orientierter Kugeln nach Graßmannschen Methoden, Monatsh. f. Math. Phys. 9 (1898), S. 269.

In dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum entspricht dem sphärischen C_1^1-Komplex ein *sphärischer S^2-Komplex,* bestehend aus den ∞^3 Sphären fester Distanz von einer Mittelsphäre ${}_MS^3$. In gleicher Weise ist das Bild einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] eine *sphärische S^2-Kongruenz* [*sphärische S^2-Reihe*], gelegen in einem Sphärenverband [Sphärenheer]. Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ gehen die sphärischen S^2-Komplexe, -Kongruenzen, -Reihen in (doppelt zählende) Sphärenverbände, -heere, -scharen über.

Bei der Deutung der Laguerreschen Geometrie als metrischer Geometrie in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit auf Grund der verallgemeinerten zyklographischen Projektion entsprechen den sphärischen S^2-Mannigfaltigkeiten die Hyperkugeln, Kugeln und Kreise.

Aus der Definition der so den linearen C_1^1-Mannigfaltigkeiten übergeordneten quadratischen C_1^1-Mannigfaltigkeiten folgt:

I. Jede automorphe Kollineation von Γ führt sphärische C_1^1-Komplexe [-Kongruenzen, -Reihen] in sphärische C_1^1-Komplexe [-Kongruenzen, -Reihen] mit gleichem D-Wert sowie Mittelkongruenzen in Mittelkongruenzen über.

II. Ein sphärischer C_1^1-Komplex wird von einem C_1^1-Gebüsch [C_1^1-Bündel] in einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] geschnitten.

Aus der Deutung der sphärischen Kongruenzenmannigfaltigkeiten als Hyperkugeln, Kugeln und Kreise in der vierdimensionalen Bildmannigfaltigkeit ergibt sich:

III. Jeder sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^3(C_1^1)$ enthält eine entartete, nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen P_1^1 bestehende sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^{3'}(P_1^1)$; die Leitgeraden dieser Strahlenkongruenzen bilden die Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ von $\sigma_3^3(C_1^1)$; ${}_MC_1^1$ ist die zu dem Trägerkongruenzengebüsch von $\sigma_2^{3'}(P_1^1)$ invariante Strahlenkongruenz.

IV. Jede sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^3(C_1^1)$ enthält eine entartete sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{3'}(P_1^1)$, die nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen besteht. Deren Leitgeraden bilden diejenige Regelschar in Γ, die den dem Trägerkongruenzenbündel π_2 der Reihe $\sigma_1^{3'}(P_1^1)$ invariant zugeordneten Kongruenzenbüschel π_1 trägt. π_1 durchstößt das Trägerkongruenzengebüsch π_3 von $\sigma_3^3(C_1^1)$ in der Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ von $\sigma_2^3(C_1^1)$.

V. Jede sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^3(C_1^1)$ enthält ein Paar parabolischer Strahlenkongruenzen ${}_1P_1^1$ und ${}_2P_1^1$. Ihre Leitgeraden tragen denjenigen Kongruenzenbündel π_2, der dem Kongruenzenbüschel π_1 durch ${}_1P_1^1$ und

${}_2P_1^1$ invariant zugeordnet ist. π_2 hat mit dem Trägerkongruenzenbündel von $\sigma_1^2(C_1^1)$ die Mittelkongruenz ${}_M C_1^1$ von $\sigma_1^2(C_1^1)$ gemein.

Aus der Tatsache, daß durch eine Kugel [einen Kreis] der vierdimensionalen Bildmannigfaltigkeit zwei [drei] Minimalhyperkegel legbar sind, folgt auf Grund der Isomorphie der metrischen Geometrie dieser Bildmannigfaltigkeit zur Kollineationsgeometrie im linearen Strahlenkomplex:

VI. Die $\infty^2[\infty^1]$ Strahlenkongruenzen einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] berühren sämtlich zwei [drei] feste Strahlenkongruenzen aus Γ.

Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ werden diese Leitkongruenzen parabolisch; die sphärische C_1^1-Kongruenz [sphärische C_1^1-Reihe] entartet in den (doppelt zählenden) Kongruenzenbündel [Kongruenzenbüschel] durch die Leitgeraden der zwei [drei] parabolischen Leitkongruenzen.

Aus der Deutung über den Laguerreschen Kugelraum folgt:

VII. Zwei sphärische C_1^1-Komplexe $\sigma_3^3(C_1^1)$ und $\bar{\sigma}_3^3(C_1^1)$ schneiden einander in einem Paar sphärischer C_1^1-Kongruenzen $\sigma_2^2(C_1^1)$ und $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$, die eine entartete, nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen P_1^1 bestehende sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ gemein haben.

VIII. Die ∞^1 sphärischen C_1^1-Komplexe durch eine feste sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$ haben paarweise noch je eine zweite sphärische C_1^1-Kongruenz gemein. Alle diese zweiten sphärischen C_1^1-Kongruenzen $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$ laufen durch die entartete sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ von $\sigma_2^2(C_1^1)$; je ∞^1 dieser sphärischen C_1^1-Kongruenzen $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$ haben dieselbe Mittelkongruenz ${}_M C_1^1$; die ∞^1 Mittelkongruenzen ${}_M C_1^1$ bilden den zu dem Trägerkongruenzenbündel von $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ invarianten Kongruenzenbüschel.

IX. Die Mittelkongruenzen der $\infty^1[\infty^2, \infty^3]$ sphärischen C_1^1-Komplexe durch eine feste sphärische C_1^1-Kongruenz [eine feste sphärische C_1^1-Reihe, ein festes Paar von Strahlenkongruenzen] bilden einen Kongruenzenbüschel [einen Kongruenzenbündel, ein Kongruenzengebüsch].

Die Betrachtung der primären und sekundären Involutionen des linearen Strahlenkomplexes Γ liefert:

X. Jeder sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^3(C_1^1)$ bleibt als Ganzes fest bei der durch seine Mittelkongruenz ${}_M C_1^1$ bedingten primären Involution $\mathfrak{I}_p$, und zwar vertauscht $\mathfrak{I}_p$ je zwei in einem Kongruenzenbüschel durch ${}_M C_1^1$ gelegene Kongruenzen von $\sigma_3^3(C_1^1)$ miteinander. Fallen diese beiden Kongruenzen stets zusammen, so ist der sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^3(C_1^1)$ in ein (doppelt zählendes) Kongruenzengebüsch entartet.

XI. Eine sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$, die zwei sphärischen C_1^1-Komplexen mit den Mittelkongruenzen ${}_M C_1^1$ und ${}_M \overline{C}_1^1$ gemeinsam ist,

wird durch diejenige sekundäre Involution $\mathfrak{I}_s$ in sich übergeführt, die durch den ${}_M C_1^1$ und ${}_M \bar{C}_1^1$ verbindenden Kongruenzenbüschel festgelegt ist, und zwar vertauscht $\mathfrak{I}_s$ je zwei in einem Kongruenzenbüschel durch die Mittelkongruenz von $\sigma_2^2(C_1^1)$ gelegene Strahlenkongruenzen miteinander. Fallen diese beiden Kongruenzen stets zusammen, so ist die sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$ in einen (doppelt zählenden) Kongruenzenbündel entartet.

Die Überordnung der sphärischen über die linearen Mannigfaltigkeiten veranlaßt die Erwähnung derjenigen Transformationsgruppe Λ^{15} von Γ, deren Transformationen gegenüber die Kongruenzen C_1^1 in Γ einen Körper bilden. Diese Gruppe ist isomorph der 15-gliedrigen konformen Gruppe des M_3^2-Raumes bez. der 15-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen im Laguerreschen Kugelraum, die zugleich Sphärentransformationen sind. Die der primären Involution übergeordnete Transformation ist die „Spiegelung an einem sphärischen C_1^1-Komplex", der Inversion an einer Hyperkugel des M_3^2-Raumes entsprechend und danach in Γ leicht zu konstruieren. Aus solchen Spiegelungen läßt sich Λ^{15} in derselben Weise aufbauen wie $\mathfrak{L}^{10}$ aus primären Involutionen.

(Eingegangen am 30. Mai 1936.)

Sur les fonctions méromorphes limites de fonctions rationnelles.

Par

Nikola Obrechkoff de Sofia.

De Laguerre datent les problèmes pour la détermination de la forme des fonctions entières qui sont limites de polynomes sur les zéros desquels on fait certaines suppositions. Des théorémes précis ont été obtenus[1]) par M. M. Pólya, Schur, Lindwart. M. Saxer [6] a obtenu des résultats analogues pour les fonctions méromorphes limites de fonctions rationnelles en faisant des hypothéses sur les zéros et les pôles de ces fonctions.

M. Montel a démontré [7] des théorèmes pour les fonctions méromorphes qui sont limites uniformes des fractions rationnelles avec des zéros et des pôles entrelacés sur l'axe réel.

Dans ce travail je considère des fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles sur les pôles desquels seulement on fait des hypothèses convenables.

§ 1.

Théorèmes généraux.

I. *Supposons que la suite des fonctions rationnelles*

$$(1)\qquad R_n(z) = P_n(z) + \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{A_{n\nu}^{(\lambda)}}{(z-\alpha_{n\nu})^{\lambda}} + \frac{A_{n\nu}^{(\lambda-1)}}{(z-\alpha_{n\nu})^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{A_{n\nu}^{(1)}}{z-\alpha_{n\nu}}\right]$$

où $P_n(z)$ sont des polynomes de degré $\leqq q$, tende uniformément vers la fonction méromorphe $R(z)$, dont le point $z=0$ est régulier. Supposons encore que l'on ait uniformément pour un $k \geqq 0$,

$$(2)\qquad \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{A_{n\nu}^{(s)}}{\alpha_{n\nu}^{k+s}}\right| < M.$$

Alors la fonction $R(z)$ a la forme suivante:

$$(3)\qquad R(z) = P(z) + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(s)}\left[\frac{1}{(z-\alpha_n)^s} + (-1)^{s-1}\sum_{g=0}^{m-1}\binom{s-1+g}{g}\frac{z^g}{\alpha_n^{s+g}}\right],$$

[1]) Voir: G. Pólya [2] et [3], I. Schur [3], E. Lindwart [4].

où $P(z)$ *est un polynome de degré* max. $(q, [k])$ *et* $m = k$ *si* k *est un nombre entier,* $m = [k] + 1$ *dans les autres cas. La série*

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{A_n^{(s)}}{\alpha_n^{k+s}} \right| \tag{4}$$

est convergente. Cette condition pour $R(z)$ *est suffisante.*

Dans l'énoncé du théorème on peut supposer que la convergence est seulement uniforme dans le plan ouvert en enlevant les points des cercles décrits autour les pôles α_n avec des rayons arbitrairement petits. Soit α_p un pôle de $R(z)$ et soit C une circonférence du centre α_p et de rayon ϱ arbitrairement petit, mais fixe. Soient $\alpha_{n\mu}$, $\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_p}$ les pôles de la fonction $R_n(z)$ qui tendent vers α_p et se trouvent dans C pour $n > N$. Pour chaque nombre entier $r > 0$ on a

$$i_n = \int_C (z - \alpha_p)^r R_n(z)\, dz \to \int_C (z - \alpha_p)^r R(z)\, dz. \tag{5}$$

Puisque

$$(z - \alpha_p)^r = (z - \alpha_{n\mu})^r + \binom{r}{1} (z - \alpha_{n\mu})^{r-1} (\alpha_{n\mu} - \alpha_p) + \ldots + (\alpha_{n\mu} - \alpha_p)^r$$

de (5) on obtient tout de suite

$$i_n = \sum_{\mu} \int_{C_\mu} (z - \alpha_{n\mu})^r R_n(z)\, dz + \binom{r}{1} \sum_{\mu} (\alpha_{n\mu} - \alpha_p) \int_{C_\mu} (z - \alpha_{n\mu})^{r-1} R_n(z)\, dz \tag{6}$$

$$+ \ldots + \sum_{\mu} (\alpha_{n\mu} - \alpha_p)^r \int_{C_\mu} R_n(z)\, dz \to \int_C (z - \alpha_p)^r R(z)\, dz,$$

ou C_μ sont des circonférences des centres $\alpha_{n\mu}$ $(\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_p})$ choisis de façon que les circonférences C_μ n'ont pas des points communs. Si $r \geqq \lambda$ il est évident que $i_n = 0$ donc on aura

$$\int_C (z - \alpha_p)^r R(z)\, dz = 0$$

ce que nous montre que $R(z)$ a seulement des pôles d'ordre au plus égal à λ.

Nous fairons maintenant la remarque suivante: soient $\alpha_{n\mu}$; $\mu = \mu', \mu'', \ldots, \mu^{(m)}$, des pôles qui restent à l'intérieur d'une circonférence d'un rayon R fini, c'est-à-dire $|\alpha_{n\mu}| < R$. Alors de (2) on obtient

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu} \left| \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{k+s}} \right| < M, \quad \mu = \mu', \mu'', \ldots, \mu^{(m)},$$

d'où l'on a, à cause de $\frac{1}{|\alpha_{n\mu}|} > \frac{1}{R}$,

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu} |A_{n\mu}^{(s)}| < M R^{\lambda+k}. \tag{7}$$

Les intégrales dans i_n à partir de la deuxième sont égales à zéro ou à $2\pi i A_{n\mu}^{(s)}$ et par suite de (7) on conclut que la somme des leurs valeurs absolues est bornée. Puisque $\alpha_{n\mu} \to \alpha_p$ on voit facilement que l'on aura

$$(8) \qquad i_n - \sum_{\mu} \int_{C_\mu} (z - \alpha_{n\mu})^r R_n(z)\, dz \to 0.$$

De (5) et (8) on obtient

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu} \int_{C_\mu} (z - \alpha_{n\mu})^r R_n(z)\, dz = \int_C (z - \alpha_p)^r R(z)\, dz.$$

Soit $r < \lambda$ et désignons par

$$A_p^{(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C (z - \alpha_p)^{s-1} R(z)\, dz.$$

(9) nous montre que

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu} A_{n\mu}^{(s)} = A_p^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, \lambda.$$

De cette rélation nous déduirons facilement l'égalité

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^g} = \frac{A_p^{(s)}}{\alpha_p^g}$$

pour chaque g entier. Il suffit pour cela d'écrire la différence

$$\sum_{\mu} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^g} - \frac{A_p^{(s)}}{\alpha_p^g}$$

sous la forme

$$\sum_{\mu} A_{n\mu}^{(s)} \left(\frac{1}{\alpha_{n\mu}^g} - \frac{1}{\alpha_p^g}\right) + \frac{1}{\alpha_p^g} \left(\sum_{\mu} A_{n\mu}^{(s)} - A_p\right)$$

et d'utiliser (7) et (10).

Il est facile maintenant de voir que la série (4) est convergente. Soit N un nombre fixe et soient $\alpha_{n\tau}$, $\tau = h_p + 1, \ldots, h_{p+1}$, les pôles qui tendent vers α_p lorsque $n \to \infty$. De (2) on a

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{p=1}^{N} \sum_{\mu=h_p+1}^{h_{p+1}} \left| \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{k+s}} \right| < M.$$

En utilisant (11) on obtient

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{p=1}^{N} \left| \frac{A_p}{\alpha_p^{k+s}} \right| < M,$$

pour chaque N, ce que nous montre que la série (4) est convergente. Désignons par $P_{n,s}(x)$ les polynomes

$$P_{n,s}(x) = (-1)^{s-1} \sum_{g=0}^{n} \binom{s-1+g}{g} z^g$$

et considérons les fonctions

$$V_n(z) = \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} A_{n\mu}^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_{n\mu})^s} + \frac{1}{\alpha_{n\mu}^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_{n\mu}}\right)\right],$$

$$V(z) = \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_{\mu})^s} + \frac{1}{\alpha_{\mu}^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_{\mu}}\right)\right].$$

Supposons d'abord que k n'est pas entier et posons $m = [k] + 1$. Nous démontrons que les fonctions $V_n(z)$ tendent vers $V(z)$ lorsque $n \to \infty$, uniformément dans le plan ouvert. Pour ce but nous déduirons une inégalité auxiliaire. De la formule

$$\frac{1}{z-\alpha_\nu} + \frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{z}{\alpha_\nu^2} + \ldots + \frac{z^{m+s-2}}{\alpha_\nu^{m+s-1}} = \frac{z^{m+s-1}}{\alpha_\nu^{m+s-1}(z-\alpha_\nu)}$$

en prenant la dérivée d'ordre $s-1$, on obtient

$$(12)\quad \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{(z-\alpha_\nu)^s} + \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{\alpha_\nu^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{s-1} (m+s-1)\ldots(m+s-\mu)\binom{s-1}{\mu} \frac{z^{m+s-\mu-1}}{\alpha_\nu^{m+s-1}} \frac{(-1)^{s-\mu-1}(s-\mu-1)!}{(z-\alpha_\nu)^{s-\mu}}.$$

Soit $|z| \leqq R$, $|\alpha_\nu| > K R$, $K > \frac{1}{2}$, alors $|z-\alpha_\nu| > \frac{1}{2}|\alpha_\nu|$. De la formule (12) on obtient

$$(13)\quad \left| \frac{1}{(z-\alpha_\nu)^s} + \frac{1}{\alpha_\nu^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right| < \frac{M_1 R^{m+s-1}}{|\alpha_\nu|^{m+s}},$$

où M_1 est un nombre fini, qui ne dépend pas de R et α_p. De (13) il suit la convergence absolue de la série $V(z)$, c'est-à-dire cette fonction est méromorphe avec des pôles α_ν.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ les pôles qui sont situés dans le cercle $|z| < \eta R$, $\eta > 2$, et soient $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{n,n_r}$ les pôles de la fonction $V_n(z)$ qui tendent vers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ lorsque $n \to \infty$. Pour N suffisamment grand les points α_{nk} se trouvent dans le cercle $|z| < \eta R$. On aura pour les pôles en déhors de ce cercle

$$|z-\alpha_{n\mu}| \geqq \frac{\eta-1}{\eta}|\alpha_{n\mu}|, \quad |z-\alpha_\mu| \geqq \frac{\lambda-1}{\lambda}|\alpha_\mu|.$$

Donc d'aprés (13) on aura

$$\left| \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=n_r+1}^{n} A_{n\mu}^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_{n\mu})^s} + \frac{1}{\alpha_{n\mu}^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_{n\mu}}\right)\right]\right|$$

$$< M_2 \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=n_r+1}^{n} \frac{R^{m+s-1}|A_{n\mu}^{(s)}|}{|\alpha_{n\mu}|^{m+s}} < M_3 R^{m+\lambda-1} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=n_r+1}^{n} \left| \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{m+s}}\right|.$$

Puisque $m = k + \delta$, $0 < \delta < 1$, $|\alpha_{n\mu}| > \eta R$, la partie droite de cette inégalité sera au plus égale à

$$\frac{M_2 R^{m+\lambda-1}}{\eta^\delta R^\delta} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=n_g+1}^{n} \left| \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{k+s}} \right| < \varepsilon,$$

si η est suffisamment grand, $\varepsilon > 0$ étant un nombre arbitrairement petit. On obtient analogiquement

$$\left| \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=r+1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_\mu^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right) \right] \right|$$

$$< M_3 \frac{R^{m+\lambda-1}}{\eta^\delta R^\delta} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \left| \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s+k}} \right| < \varepsilon,$$

et on démontre comme auparavant que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n_r} A_{n\mu}^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_{n\mu})^s} + \frac{1}{\alpha_{n\mu}^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_{n\mu}}\right) \right]$$

$$= \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{r} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_\mu^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right) \right].$$

Des inégalités obtenues on déduit pour $|z| < R$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |V_n(z) - V(z)| \leqq 2\varepsilon,$$

ce que nous montre que

$$\lim_{n\to\infty} V_n(z) = V(z).$$

Soit maintenant

$$P_n(z) = a_{n0} + a_{n1} z + \ldots + a_{nq} z^q.$$

La fonction $R_n(z)$ a la forme suivante

$$R_n(z) = a_{n0} + a_{n1} z + \ldots + a_{nq} z^q + c_{n0} + c_{n1} z + \ldots + c_{n,m-1} z^{m-1} + V_n(z),$$

où l'on a posé

$$c_{np} = \sum_{s=1}^{\lambda} (-1)^s \sum_{\mu=1}^{n} \binom{s-1+p}{p} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{p+s}}$$

Soit

$$R(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

le développement de la fonction $R(z)$ pour $z = 0$. Le développement de $R_n(z)$ pour $z = 0$ sera

$$R_n(z) = (a_{n0} + c_{n0}) + (a_{n1} + c_{n1}) z + \ldots + (a_{ng} + c_{ng}) z^g + c_{n,g+1} z^{g+1} + \ldots. \tag{14}$$

où g est le nombre max $(q, m-1)$. Puisque $R_n(z)$ tend vers $R(z)$ autour du point $z=0$, on aura

$$\lim_{n\to\infty}(a_{nk}+c_{nk})=c_k, \quad 0\leqq k\leqq g,$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk}=c_k, \quad k>g. \tag{15}$$

Si $q\leqq m-1$ de (14) on voit tout de suite que la fonction $R(z)$ a la forme (3), où $P(z)$ est un polynome de dégré $\leqq m-1$. Si $q>m-1$ le polynome

$$(a_{n0}+c_{n0})+(a_{n1}+c_{n1})z+\ldots+(a_{n,m-1}+c_{n,m-1})z^{m-1}$$

tend vers le polynome

$$c_0+c_1z+\ldots+c_{m-1}z^{m-1}.$$

Il reste de démontrer que le polynome

$$a_{n,m}z^m+a_{n,m+1}z^{m+1}+\ldots+a_{nq}z^q$$

tend vers un polynome déterminé. Puisque les séries

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{A_n^{(s)}}{\alpha_n^{p+s}}\right|$$

sont convergentes pour $p\geqq k$ et puisque $m>k$ on voit facilement d'une manière déjà employée que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}(-1)^s\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{p+s}}=\sum_{s=1}^{\lambda}(-1)^s\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu^{(s)}}{\alpha_\nu^{s+p}} \tag{16}$$

pour $p>k$. De (16) on conclut que les nombres $c_{n,m}$, $c_{n,m+1}\ldots$ tendent vers des limites déterminées et de (15) on voit que les suites

$$a_{n,m};\quad a_{n,m+1};\quad \ldots$$

tendent vers des limites déterminées

$$a_m;\quad a_{m+1};\quad \ldots.$$

Le théorème est ainsi démontré dans le cas où k est un nombre non entier.

Soit maintenant k un nombre entier et posons $m=k$. Considérons la fonction

$$V_n(z)=\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}A_{n\mu}^{(s)}\left[\frac{1}{(z-\alpha_{n\mu})^s}+\frac{1}{\alpha_{n\mu}^s}P_{m,s}\left(\frac{z}{\alpha_{n\mu}}\right)\right].$$

On démontre comme auparavant qu'elle tend vers la fonction

$$V(z)=\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_\mu^{(s)}\left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s}+\frac{1}{\alpha_\mu^s}P_{m,s}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right)\right].$$

La fonction $R_n(z)$ a la forme suivante

$$R_n(z) = a_{n0} + a_{n1} z + \ldots + a_{nq} z^q + c_{n0} + c_{n1} z + \ldots + c_{n,m} z^m + V_n(z).$$

Puisque $R_n(z)$ tend vers $R(z)$ on voit de la même manière comme dans le cas k non entier que la fonction $R(z)$ aura la forme

$$(17) \qquad R(z) = P_1(z) + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_\mu^s} P_{m,s}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right) \right],$$

où $P_1(z)$ est un polynome de degré max (q, m).

Dans ce cas la série

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s+m}} \right|$$

est convergente. En posant alors

$$c_m' = (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \binom{s-1+m}{m} \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s+m}}, \quad P(z) = P_1(z) + c_m' z^m,$$

de (17) on obtient

$$R(z) = P(z) + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_\mu^s} P_{m-1,s}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right) \right]$$

et la première partie du théorème est démontrée.

Il faut démontrer maintenant le théorème inverse. Nous démontrerons cette partie dans une forme plus précise.

I'. *Supposons que la fonction méromorphe $R(z)$ a la forme*

$$(18) \quad R(z) = P(z) + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + (-1)^{s-1} \sum_{g=0}^{m-1} \binom{s-1+g}{g} \frac{z^g}{\alpha_\mu^{s+g}} \right],$$

la série

$$(19) \qquad \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s+k}} \right|, \quad k > 0,$$

étant convergente, $m = k$ si k est entier et $m = [k] + 1$ dans les autres cas, $P(z)$ est un polynome de degré $[k] = p$. Alors il existe une suite de fonctions rationnelles

$$(20) \qquad R_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{A_{n\nu}^{(\lambda)}}{(z-\alpha_{n\nu})^\lambda} + \frac{A_{n\nu}^{(\lambda-1)}}{(z-\alpha_{n\nu})^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{A_{n\nu}^{(1)}}{z-\alpha_{n\nu}} \right],$$

qui tend vers $R(z)$ uniformément et pour lesquelles les sommes

$$(21) \qquad \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{A_{n\nu}^{(s)}}{\alpha_{n\nu}^{s+k}} \right|$$

sont uniformément bornées.

En effet soit

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-1} z^{m-1}.$$

Considérons les fonctions

$$\varphi_n(z) = \sum_{q=1}^{m} \frac{c_{q-1} z^{q-1}}{1 + \frac{c_{q-1} z^q}{q\,n}}, \quad g_{m-1}(z) = 1 + z + \ldots + z^{m-1},$$

$$v_n(z) = \frac{1}{1+\frac{z}{N}} + \frac{z}{1+\frac{z^2}{2N}} + \ldots + \frac{z^m}{1+\frac{z^{m+1}}{m\,N}}$$

où N est un nombre arbitraire et positif. Il es évident que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = P(z).$$

Nous avons la décomposition dans le cas $c_{q-1} \neq 0$,

$$\frac{c_{q-1} z^{q-1}}{1 + \frac{c_q z^q}{q\,n}} = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{n}{z - \omega_\nu^{(q)} \delta_q},$$

où $\omega_\nu^{(q)}$ sont les racines de l'équation $x^q = -1$ et $\delta_1 = \left|\frac{q\,n}{c_{q-1}}\right|^{\frac{1}{q}}$. Donc $\varphi_n(z)$ a la forme

$$\varphi_n(z) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{n}{z - \omega_\nu^{(q)} \delta_q}, \tag{22}$$

où la somme

$$\sum_{q=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{n}{|\omega_\nu^{(q)} \delta_q|^{k+1}}$$

est bornée. Considérons encore les fonctions

$$\Phi_{n,s}(z) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^{(s)} \left(\frac{1}{z-\alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} + \ldots + \frac{z^{m+s-2}}{\alpha_\mu^{m+s-1}}\right)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{z-\alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} g_{m+s-2}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right)\right],$$

$$\Psi_s(z) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^{(s)} \left[\frac{1}{z-\alpha_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} v_{m+s-2}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right)\right].$$

La différence $\Phi_{n,s}(z) - \Psi_s(z)$ est en valeur absolue égale au plus à

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{n} |A_\mu^{(s)}| \left| \sum_{p=1}^{m+s-1} \frac{\frac{z^{2p-1}}{p\,\alpha_\mu^{2p}}}{1 + \frac{z^p}{p\,N\,\alpha_\mu^p}} \right|$$

et pour chaque R, $|z| \leqq R$, on peut choisir évidemment le nombre N de façon que cette expression tende verz zéro lorsque n, $N \to \infty$. Donc nous aurons aussi pour $|z| \leqq R$

$$\lim_{n \to \infty} [\Phi_{n,s}^{(s-1)}(z) - \Psi_{n,s}^{(s-1)}(z)] = 0,$$

en omettant naturellement les pointes des petits cercles décrits autour les pôles.

Mais on voit facilement que

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_{n,s}^{(s-1)}(z) = (-1)^{s-1}(s-1)! \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \Big[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_\mu^s} P_{m-1,s}\Big(\frac{z}{\alpha_\mu}\Big)\Big].$$

Donc on aura

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_{n,s}^{(s-1)}(z) = (-1)^{s-1}(s-1)! \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)} \Big[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{1}{\alpha_u^s} P_{m-1,s}\Big(\frac{z}{\alpha_\mu}\Big)\Big].$$

D'autre côté nous avons

$$\frac{z^{p-1}}{1 + \dfrac{z^p}{p N \alpha_\mu^p}} = \sum_{h=1}^{p} \frac{N}{z - \omega_h^{(p)} d_p}, \quad p \leqq m + s - 1,$$

où $\omega_h^{(p)}$ sont les racines de l'équation $x^p = -1$ et $d_p = p^{\frac{1}{p}} |\alpha_\mu| N^{\frac{1}{p}}$. Alours pour $\Psi_{n,s}^{(s-1)}(z)$ nous avons

$$\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \Psi_{n,s}^{(s-1)}(z) = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^{(s)} \Big[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \sum_{p=1}^{m+s-1} \sum_{h=1}^{p} \frac{N}{(z - \omega_h^{(p)} d_p)^s} \Big], \quad s \leqq \lambda.$$

La somme (21), qui correspond aux pôles de cette fonction, est égale à

$$\sum_{p=1}^{m+s-1} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{N |A_u^{(s)}|}{p^{\frac{k+s}{p}} |\alpha_\mu|^{k+s} N^{\frac{k+s}{p}}} + \sum_{\mu=1}^{n} \Big| \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{k+s}} \Big|,$$

et elle est évidemment bornée puisque $k+1 \geqq m$, $k+s \geqq p$. Ainsi nous avons démontré que la suite de fonctions

$$V_n(z) = \sum_{q=1}^{m} \frac{c_{q-1} z^{q-1}}{1 + \dfrac{c_{q-1} z^q}{n q}} + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^{(s)} \Big[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \sum_{p=1}^{m+s-1} \sum_{h=1}^{p} \frac{N}{(z - \omega_h^{(p)} d_p)^s} \Big]$$

tend uniformément vers la fonction $R(z)$ et la somme (21) est uniformément bornée. Le théorème est ainsi démontré.

§ 2.

Applications.

II. *Supposons que la suite des fonctions rationnelles*

$$(1) \qquad R_n(z) = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{A_{n\mu}^{(\lambda)}}{(z-\alpha_{n\mu})^{\lambda}} + \frac{A_{n\mu}^{(\lambda-1)}}{(z-\alpha_{n\mu})^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{A_{n\mu}^{(1)}}{z-\alpha_{n\mu}}\right]$$

où $A_{n\mu}^{(s)}$ *sont des nombres réels, et*

$$(2) \quad (-1)^{s-1} A_{n\mu}^{(s)} \geqq 0, \quad |\arg \alpha_{n\mu}| \leqq \Theta < \frac{\pi}{2\lambda}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, \lambda,$$

tende vers la fonction méromorphe $R(z)$. *Alors* $R(z)$ *a la forme*

$$(3) \qquad R(z) = -\delta + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{(z-\alpha_{\mu})^{s}}$$

où l'on a

$$(-1)^{s-1} A_{\mu}^{(s)} \geqq 0, \quad |\arg \alpha_{\mu}| \leqq \Theta, \quad |\arg \delta| \leqq \lambda\Theta,$$

et la série

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s}}\right|$$

est convergente. Cette condition pour $R(z)$ *est aussi suffisante.*

Nous avons vu que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}(-1)^{s-1}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}} = -c_0,$$

où $c_0 = R(0)$, le point $z = 0$ étant réjulier pour $R(z)$. Cela nous montre que la somme

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{(-1)^{s-1} A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}}$$

est bornée par valeur absolue uniformément pour n. Désignons[2]) par $\alpha_{n\mu} = |\alpha_{n\mu}| e^{i\varphi_{n\mu}}$, on aura

$$R\frac{1}{\alpha_{n\mu}^{s}} = \frac{1}{|\alpha_{n\mu}^{s}|}\cos s\,\varphi_{n\mu} \geqq \frac{\cos\lambda\,\varphi_{n\mu}}{|\alpha_{n\mu}|^{s}} \geqq \frac{\cos\lambda\Theta}{|\alpha_{n\mu}|^{s}}.$$

En prenant la partie réelle de (5) on obtient

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\left|\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}}\right| < \frac{M_1}{\cos\lambda\Theta} = M_2,$$

---

[2]) Par $R\alpha$ nous désignons la partie réelle de α.

et d'aprés le théorème I on conclut que la série (4) est convergente. Par suite nous aurons

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = c_0 + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)}\left[\frac{1}{(z-\alpha_\mu)^s} + \frac{(-1)^{s-1}}{\alpha_\mu^s}\right]$$

$$= c_0 + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^{(s)}\frac{(-1)^{s-1}}{\alpha_\mu^s} + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_\mu^{(s)}}{(z-\alpha_\mu)^s}.$$

Donc $R(z)$ aura la forme (3), où

$$\delta = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}(-1)^{s-1}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{(s)}} - \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^s}.$$

De la formule (10) de § 1 il est évident que $A_\mu^{(s)}$ sont des nombres réels et que

$$(-1)^{s-1}A_\mu^{(s)} \geqq 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et choisissons le nambre q de façon que l'on ait

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=q+1}^{\infty}\left|\frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^s}\right| < \varepsilon,$$

ce qui est possible puisque la série (4) est convergente. Soit n_q tel que pour q fixe on ait

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n_q}\frac{(-1)^{s-1}A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^s} = \sum_{s=1}^{\lambda}(-1)^{s-1}\sum_{\mu=1}^{q}\frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^s}.$$

Alors nous aurons

$$\delta = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=n_q+1}^{n}\frac{(-1)^{s-1}A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^s} + \eta, \quad |\eta| < \varepsilon. \tag{6}$$

Puisque $\left|\arg\frac{1}{\alpha_{n\mu}^s}\right| \leqq \lambda\Theta < \frac{\pi}{2}$ et ε peut être pris aussi petit que l'on veut, il découle de (6) que $|\arg\delta| \leqq \lambda\Theta$ et la première partie du théorème est démontrée.

Supposons maintenant que $R(z)$ a la forme (3), la série (4) étant convergente. Il est facile de voir que la fonction

$$R_n(z) = \frac{(-1)^{\lambda-1}n}{\left(z-\sqrt[\lambda]{\frac{n}{\delta}}\right)^\lambda} + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_\mu^{(s)}}{(z-\alpha_\mu)^s}, \quad \left|\arg\sqrt[\lambda]{\frac{n}{\delta}}\right| \leqq \Theta,$$

tend vers $R(z)$ et la partie invèrse du théorème est établie.

III. *Soient* $R_n(z)$ *les fonctions*

$$R_n(z) = \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{(z-\alpha_{n\mu})^s}$$

où les pôles et les nombres $A_{n\mu}^{(s)}$ *satisfont aux conditions*

$$-\Theta \leqq \arg \alpha_{n\mu} \leqq \Theta, \quad (-1)^{s-1} A_{n\mu}^{(s)} \geqq 0, \quad 0 \leqq \Theta < \frac{\pi}{2\lambda},$$

$$-\pi + \Theta \leqq \arg \alpha_{n\mu} \leqq \pi - \Theta, \quad A_{n\mu}^{(s)} \leqq 0.$$

Supposons que la suite $R_n(z)$ *tende vers la fonction méromorphe* $R(z)$ *dont le point* $z = 0$ *est régulier.* $R(z)$ *a la forme suivante*

$$R(z) = -\delta + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_{\mu}^{(s)}}{(z-\alpha_{\mu})^s},$$

où l'on a

$$-\Theta \leqq \arg \alpha_{\mu} \leqq \Theta, \quad (-1)^{s-1} A_{\mu}^{(s)} \geqq 0,$$

$$-\pi + \Theta \leqq \arg \alpha_{\mu} \leqq \pi - \Theta, \quad A_{\mu}^{(s)} \leqq 0, \quad |\arg \delta| \leqq \lambda\Theta,$$

et la série

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^s} \right|$$

est convergente. Cette condition pour $R(z)$ *est aussi suffisante.*

D'aprés les conditions du théorème on a

$$-R(0) = -c_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\lambda} (-1)^{s-1} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{nu}^s}.$$

Soient $\alpha'_{n\mu}$ les pôles de la fonction $R_n(z)$ pour lesquels $R\alpha'_{n\mu} > 0$ et soient $\alpha''_{n\mu}$ ceux avec $R\alpha''_{nu} < 0$. En posant

$$\alpha''_{nu} = -\beta''_{n\mu}, \quad |\arg \beta''_{n\mu}| \leqq \Theta,$$

on aura

$$-c_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\lambda} (-1)^{s-1} \sum_{\mu'} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{'s}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu''} \frac{-A_{n\mu}^{(s)}}{\beta_{n\mu}^{''s}}.$$

Ensuite la démonstration se fait comme celle du théorème II.

IV. *Supposons que la suite des fonctions rationnelles*

$$(7) \qquad R_n(z) = \sum_{\mu=1}^{n} \left[\frac{A_{n\mu}^{(\lambda)}}{(\alpha_{n\mu}-z)^{\lambda}} + \frac{A_{n\mu}^{(\lambda-1)}}{(\alpha_{n\mu}-z)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{A_{n\mu}^{(\lambda)}}{\alpha_{n\mu}-z} \right],$$

où les nombres $A_{n\mu}^{(s)}$ *sont réels et non négatifs,* $|\arg \alpha_{n\mu}| \leqq \frac{\pi}{2\lambda}$, *tende vers la fonction méromorphe* $R(z)$, *dont le point* $z = 0$ *est régulier.* $R(z)$ *a la forme*

$$(8) \qquad R(z) = \gamma z + \delta + \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)} \left[\frac{1}{(\alpha_{\mu}-z)^s} - \frac{1}{\alpha_{\mu}^s} \right],$$

où $A_\mu^{(s)}$ *sont des nombres réels non négatif,* $|\arg \alpha_\mu| \leqq \frac{\pi}{2\lambda}$, *la série*

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s+1}} \right| \tag{9}$$

est convergente. Pour le nombre δ *on a*

$$R\,\delta \geqq R \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_\mu^{(s)}}{\alpha_\mu^{s}}, \tag{10}$$

la série à droite est convergente, γ *est un nombre réel non positif.*

Soit $a > 0$ un nombre arbitraire, mais choisi de façon que la fonction $R(z)$ est régulière pour $|z| \leqq a$. Puisque la fonction $R_n(z-a)$ tend vers $R(z-a)$ on aura

$$\lim \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{(\alpha_{n\mu}+a)^s} = c_0' = R(-a).$$

De cette rélation on obtient

$$R \sum_{s=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{A_{n\mu}^{(s)}}{(\alpha_{n\mu}+a)^s} \leqq M_1, \tag{11}$$

où M_1 est un nombre fini.

Nous démontrons maintenent une inégalité auxiliaire: si α est un nombre complexe arbitraire, $|\arg \alpha| \leqq \frac{\pi}{2\lambda}$, nous avons

$$R \frac{1}{(a+\alpha)^\lambda} \geqq \frac{K(a)}{|a+\alpha|^{\lambda+1}}, \tag{12}$$

où $K(a)$ est une constante positive finie, indépendante de α. Soit d'abord $|\alpha| \leqq g$, où g est un nombre arbitraire mais fixe. Par des calculs facils on voit qu'il existe un nombre $\Theta = \Theta(g)$, $0 < \Theta < \frac{\pi}{2\lambda}$, tel que l'on ait

$$|\arg(a+\alpha)| \leqq \Theta.$$

Si φ est l'argument de $a+\alpha$, on aura

$$R \frac{1}{(a+\alpha)^\lambda} = \frac{\cos \lambda \varphi}{|a+\alpha|^\lambda} \geqq \frac{\cos \lambda \Theta}{|a+\alpha|^\lambda} \geqq K \frac{\cos \lambda \Theta}{|a+\alpha|^{\lambda+1}}, \tag{13}$$

où $K = 1$ si $|a+\alpha| > 1$ et $K = a$ dans le cas $|a+\alpha| \leqq 1$. Soit maintenant $|\alpha| > g$. L'inégalité (12) est équivalente avec la suivante:

$$R \frac{|a+\alpha|^{\lambda+1}}{(a+\alpha)^\lambda} \geqq K(a). \tag{14}$$

Nous avons

$$R \frac{|a+\bar{\alpha}|^\lambda}{|a+\alpha|^{\lambda-1}} = R \frac{\bar{\alpha}^\lambda}{|a+\alpha|^{\lambda-1}} + \binom{\lambda}{1} R \frac{a\,\bar{\alpha}^{\lambda-1}}{|a+\alpha|^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{a^\lambda}{|a+\alpha|^{\lambda-1}}.$$

Puisque $|\arg \bar{\alpha}| \leqq \frac{\pi}{2\lambda}$, donc $R\bar{\alpha}^s \geqq 0$ pour $0 \leqq s \leqq \lambda$ et nous aurons

$$R\frac{(a+\bar{\alpha})^\lambda}{|a+\alpha|^{\lambda-1}} \geqq \lambda a \cos\left[(\lambda-1)\frac{\pi}{2\lambda}\right]\left|\frac{\alpha}{a+\alpha}\right|^{\lambda-1}. \tag{15}$$

Il est évident pour $|\alpha| > g$ que

$$\left|\frac{\alpha}{a+\alpha}\right| \geqq m(a) > 0.$$

Donc en désignant par $K(a)$ le plus petit des nombres

$$K\cos\lambda\Theta, \quad \lambda a \cos\left[(\lambda-1)\frac{\pi}{2\lambda}\right][m(a)]^{\lambda-1}$$

de (13) et (15) on obtient l'inégalité (12).

En se basant sur (12) de (11) on obtient l'inégalité

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{|\alpha_{n\mu}+a|^{s+1}} < M_2,$$

où M_2 est un nombre fini indépendant de n. En suivant une manière déjà employée on démontre d'ici que la série

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{|\alpha_{\mu}+a|^{s+1}}$$

est convergente. On conclut que la série

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{|\alpha_{\mu}|^{s+1}} \tag{16}$$

est convergente. Donc d'aprés le théorème I la fonction $R(z)$ doit avoir la forme suivante

$$R(z) = c_0 + c_1 z + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\left[\frac{1}{(\alpha_\mu - z)^s} - \frac{1}{\alpha_{\mu}^s} - \frac{s z}{\alpha_{\mu}^{s+1}}\right],$$

où

$$c_0 = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^s} \qquad c_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n} s\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}}.$$

A cause de la convergence de la série (16) $R(z)$ aura la forme

$$R(z) = \gamma z + \delta + \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\left[\frac{1}{(\alpha_\mu - z)^s} - \frac{1}{\alpha_{\mu}^s}\right], \tag{17}$$

où l'on a

$$\delta = \lim\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^s},$$

$$\gamma = \lim\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n} s\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} - \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n} s\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}}. \tag{18}$$

De la première formule on obtient

$$R\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}} \leqq M_3, \tag{19}$$

où M_3 ne dépend pas de n. Désignons par

$$\frac{1}{\alpha_{n\mu}^{s}} = \beta_{n\mu}^{(s)} - i\gamma_{n\mu}^{(s)}, \quad \frac{1}{\alpha_{\mu}^{s}} = \beta_{\mu}^{(s)} - i\gamma_{\mu}^{(s)}, \quad \beta_{n\mu}^{(s)} \geqq 0, \ \beta_{\mu}^{(s)} \geqq 0, \ 1 \leqq s \leqq \lambda;$$

alors de (19) nous obtenons que la série

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)} \tag{20}$$

est convergente. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit m choisi de façon que l'on ait

$$\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)} < \varepsilon, \tag{21}$$

ce qui est possible puisque la série (20) est convergente. Soit aussi n_m choisi de façon que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n_m} A_{n\mu}^{(s)}\beta_{n\mu}^{(s)} = \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)}.$$

De la première équation (18) nous avons pour δ

$$R\delta = \lim_{n\to\omega}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n_m} A_{n\mu}^{(s)}\beta_{n\mu}^{(s)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=n_m+1}^{n} A_{n\mu}^{(s)}\beta_{n\mu}^{(s)} \geqq \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)},$$

d'où et de (21) on obtient

$$R\delta \geqq \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)} - \varepsilon$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire

$$R\delta \geqq \sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(s)}\beta_{\mu}^{(s)},$$

et l'inégalité (10) est démontrée.

Considérons maintenant le nombre γ. Nous avons

$$\gamma = \lambda\gamma_{\lambda} + (\lambda - 1)\gamma_{\lambda-1} + \ldots + \gamma_1,$$

où par γ_s on désigne le nombre

$$\gamma_s = \lim\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} - \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}}. \tag{22}$$

Nous démontrons d'abord que

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{\lambda-1} = 0. \tag{23}$$

En effet pour $s \leqq \lambda - 1$ nous avons

$$|\arg \alpha_{n\mu}^{s}| \leqq (\lambda - 1)\frac{\pi}{2\lambda}.$$

De l'inégalité

$$\Big|\sum_{s=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}}\Big| < M$$

il suit l'inégalité

$$R\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s}} < M, \quad 1 \leqq s \leqq \lambda, \tag{24}$$

d'où, en suivant une marche déja plusieurs fois employée, on obtient

$$\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{|\alpha_{n\mu}|^{s}} < M_1, \quad s \leqq \lambda - 1. \tag{25}$$

On conclut d'ici que la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{|\alpha_{\mu}|^{s}}, \quad s \leqq \lambda - 1, \tag{26}$$

est convergente. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit $m_n = m_n(\varepsilon)$ choisi de façon que l'on ait

$$\frac{1}{|\alpha_{n\mu}|^{s+1}} < \varepsilon, \quad \mu > m_n, \quad n > N,$$

$$\frac{1}{|\alpha_{\mu}|^{s+1}} < \varepsilon, \quad \mu > m,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{m_n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}}.$$

Nous aurons

$$\gamma_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{m_n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=m_n+1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} - \sum_{\mu=1}^{m}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}} - \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=m_n+1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{\alpha_{n\mu}^{s+1}} - \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{\alpha_{\mu}^{s+1}},$$

d'où l'on a

$$|\gamma_s| < \varepsilon\sum_{n=m_n+1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(s)}}{|\alpha_{n\mu}|^{s}} + \varepsilon\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(s)}}{|\alpha_{\mu}|^{s}} \leqq 2\varepsilon M', \tag{27}$$

en désignant par M' la borne supérieure des sommes (25) et (26) De (27) il découle que $\gamma_s = 0$, $1 \leqq s \leqq \lambda - 1$. Donc nous aurons

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{A_{n\mu}^{(\lambda)}}{\alpha_{n\mu}^{\lambda+1}} - \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A_{\mu}^{(\lambda)}}{\alpha_{\mu}^{\lambda+1}}.$$

En posant

$$\frac{1}{\alpha_{n\mu}^{\lambda}} = \beta_{n\mu}^{(\lambda)} - i\gamma_{n\mu}^{(\lambda)}, \quad \frac{1}{\alpha_{\mu}^{\lambda}} = \beta_{\mu}^{(\lambda)} - i\gamma_{\mu}^{(\lambda)}, \quad \beta_{n\mu} - i\gamma_{n\mu} = \frac{1}{\alpha_{n\mu}}, \quad \beta_{\mu} - i\gamma_{\mu} = \frac{1}{\alpha_{\mu}},$$

on obtient

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \lim_{n\to\infty}(a_n - ib_n),$$

où l'on a

$$a_n = \Big(\sum_{\mu=1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}\Big) - \Big(\sum_{\mu=1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}\Big) = a_n' - a_n'',$$

$$b_n = \Big(\sum_{\mu=1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}\gamma_{n\mu}^{(\lambda)} - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\Big) + \Big(\sum_{\mu=1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu} - \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}\Big) = b_n' + b_n''.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit et soit m choisi de façon que l'on ait $\sum_{m+1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}^{(\lambda)} < \varepsilon$. Choisissons le nombre m_n $(m_n \to \infty)$ avec n, tel que l'on ait

$$\lim \sum_{\mu=1}^{m_n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}^{(\lambda)}\beta_{\mu}, \quad \beta_{n\mu}^{(\lambda)} < \varepsilon, \quad \mu > m, \quad n > N.$$

Les sommes $\sum_{1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}^{(\lambda)}$ sont bornées, donc on aura pour $n > N$

$$\sum_{\mu=m_n}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu} \leqq M\varepsilon,$$

d'où il suit $\lim a_n' \leqq (M+1)\varepsilon$, c'est-à-dire $\lim a_n' = 0$. Analogiquement on obtient $\lim b_n'' = 0$, $\lim b_n' = 0$, puisque les sommes $\sum_{1}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\beta_{n\mu}$ sont bornées d'aprés (19). Il reste à étudier les nombres a_n''. Les nombres $\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}$ sont positifs et la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{A_{\mu}^{(\lambda)}}{|\alpha_{\mu}|^{\lambda+1}}$ est convergente. Du fait que $\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu} \leqq \frac{1}{|\alpha_{\mu}|^{\lambda+1}}$ on conclut que la série $\sum_{1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}$ est aussi convergente. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement petit, m choisi de façon que l'on ait

$$\sum_{m+1}^{\infty} A_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu} < \varepsilon,$$

m_n tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=1}^{m_n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu} = \sum_{1}^{m} A_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}^{(\lambda)}\gamma_{\mu}.$$

Donc nous aurons

$$\lim_{n\to\infty} a_n'' \geqq \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=m_n}^{n} A_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu}^{(\lambda)}\gamma_{n\mu} - \varepsilon$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, ce que nous montre que $\lim a_n'' \geqq 0$, d'où il vient $\gamma \leqq 0$ et le théorème est démontré.

Dans le cas particulier $\lambda = 1$ on obtient les théorèmes donnés par moi dans le travail [8]. Dans ce cas on peut facilement obtenir les théorèmes de MM. Montel, Pólya, Lindwart, Schur, pour la forme da la fonction limite, comme j'ai le fait dans le travail cité [8].

Travaux cités.

E. Laguerre.

[1] Sur les fonctions du genre zéro et du genre un, Oeuvres, t. I, Paris, 1898, pp. 174—177.

G. Pólya.

[2] Über Annäherung durch Polynomen, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen, Gött. Nachrichten (1913), S. 326—330.

G. Pólya und I. Schur.

[3] Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Journ. für die reine und angew. Mathematik **144** (1914), S. 89—113.

E. Lindwart und G. Pólya.

[4] Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rendiconti del Circolo mat. di Palermo **37** (1914), S. 1—8.

G. Pólya.

[5] Sur les opérations fonctionnelles linéaires échangeables avec la dérivation et sur les zéros des polynomes, Comptes Rendus **183** (1926), p. 413.

W. Saxer.

[6] Über die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergenter Folgen, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 518—535.

P. Montel.

[7] Sur une classe des fonctions méromorphes, Comptes Rendus **195** (1932), p. 643.

N. Obrechkoff.

[8] Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles, Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, t. XIII, 1934, pp. 75—90.

(Eingegangen am 25. Juni 1936.)

Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe.

Von

Eugen Egerváry in Budapest.

Die geometrische Reihe

$$w = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \dots \tag{1}$$

bildet ihren Konvergenzkreis $|z| \leqq 1$ auf die schlichte Halbebene $R(w) \geqq -\frac{1}{2}$ ab, während bekanntlich[1]) keine von ihren Partialsummen

$$s_n(z) = z + z^2 + \dots + z^n, \quad (n = 2, 3, \dots) \tag{2}$$

für $|z| \leqq 1$ schlicht ist. Aus einem allgemeineren Satz von Fejér[2]) entnimmt man andererseits, daß die arithmetischen Mittel *dritter* (und höherer) Ordnung der geometrischen Reihe für $|z| \leqq 1$ schlicht sind, während in bezug auf die Schlichtheit der arithmetischen Mittel niedrigerer Ordnung keine Sätze bekannt zu sein scheinen.

In dieser Arbeit werde ich nun die folgenden Sätze beweisen, welche wieder die „glättende" Wirkung der arithmetischen Mittelbildung deutlich hervortreten lassen.

Satz 1. *Die arithmetischen Mittel erster Ordnung* $\frac{s_n^{(1)}(z)}{n}$,

$$s_n^{(1)}(z) = n \cdot z + (n-1) z^2 + \dots + 1 \cdot z^n, \tag{3}$$

der geometrischen Reihe (1) *sind für* $|z| \leqq 1$ *schlicht, sogar sternförmig in bezug auf einen einzigen Punkt der Funktionsebene, nämlich in bezug auf den Randpunkt*[3]) $w = \frac{s_n^{(1)}(1)}{n}$.

---

[1]) L. Fejér, Über die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen, Acta Litterarum ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae 4 (1928), S. 14—24.

[2]) L. Fejér, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series. Journal of Mathematics and Physics, Vol. XIII (1934) S. 1–17.

[3]) Ein Bereich wird bekanntlich sternförmig in bezug auf einen inneren Punkt genannt, wenn alle durch diesen Punkt gehende Geraden mit dem Bereich eine Strecke gemeinsam haben. In diesem Falle der „eigentlichen" Sternförmigkeit be-

Dieses Ergebnis kann insofern nicht weiter verschärft werden, als alle $s_n^{(1)}(z)$, $(n = 2, 3, \ldots)$ den genauen Schlichtheitsradius[4]) 1 haben, und — wie oben erwähnt — keine von den Partialsummen $s_n(z)$ für $|z| \leqq 1$ schlicht ist.

Satz 2. *Die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung* $\frac{s_n^{(2)}(z)}{\binom{n+1}{2}}$,

$$s_n^{(2)}(z) = \binom{n+1}{2} z + \binom{n}{2} z^2 + \ldots + \binom{2}{2} z^n, \tag{4}$$

der geometrischen Reihe (1) *sind für* $|z| \leqq 1$ *schlicht und sternförmig in bezug auf jeden Punkt eines gewissen Bereiches, der den Punkt* $w = 0$ *(als inneren Punkt) enthält.*

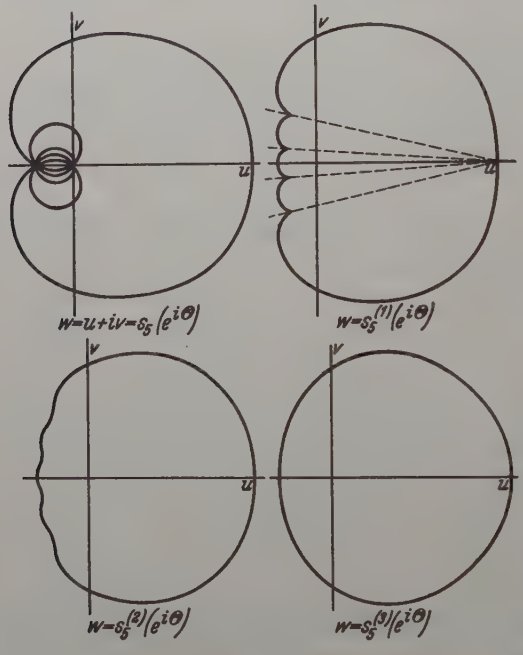


Fig. 1.

Satz 3. *Die arithmetischen Mittel dritter Ordnung* $\frac{s_n^{(3)}(z)}{\binom{n+2}{3}}$,

$$s_n^{(3)}(z) = \binom{n+2}{3} z + \binom{n+1}{3} z^2 + \ldots + \binom{3}{3} z^n, \tag{5}$$

der geometrischen Reihe (1) *sind für* $|z| \leqq 1$ *schlicht und konvex.*

Dieses Ergebnis kann insofern nicht weiter verschärft werden, als alle $s_n^{(3)}(z)$, $(n = 2, 3, \ldots)$ den genauen Konvexitätsradius 1 haben, und keine von den arithmetischen Mitteln zweiter Ordnung $s_n^{(2)}(z)$ für $|z| \leqq 1$ konvex ist.

---

trägt die Drehung des Radiusvektors bei einem Umlauf der Randkurve offenbar 2π. Ich nenne im folgenden einen Bereich „uneigentlich" sternförmig in bezug auf einen Randpunkt, wenn 1. dieser Randpunkt regulär ist mit bestimmter Tangente, 2. der Bereich in einer der durch die Tangente bestimmten Halbebenen liegt und mit jedem, durch den Randpunkt in der Halbebene gezogenem Halbstrahl eine Strecke gemeinsam hat. Die Drehung des Radiusvektors bei einem Umlauf beträgt also in diesem Falle π.

[4]) Schlichtheitsradius von $w = f(z)$ nenne ich den Radius des größten Kreises um $z = 0$, in dessen Inneren $f(z)$ schlicht ist. In ähnlichem Sinne verwende ich die Benennungen Sternförmigkeits- bzw. Konvexitätsradius.

Durch Anwendung von Satz 3 erhält man einen neuen Beweis für den Satz von Fejér[5]), laut welchem eine Potenzreihe mit vierfach monotoner Koeffizientenfolge den Einheitskreis schlicht abbildet.

Bei der geometrischen Reihe

$$w = \frac{z}{1 - z^2} = z + z^3 + \ldots \tag{6}$$

sind weder die Partialsummen, noch die arithmetischen Mittel erster Ordnung schlicht für $|z| \leqq 1$, während nach einem allgemeinen Satze von Fejér die arithmetischen Mittel zweiter (und höherer) Ordnung schlicht sind. Hierzu wird ein Beitrag geliefert durch den

Satz 4. *Die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung* $\dfrac{\sigma_n^{(2)}(z)}{\binom{n+1}{2}}$,

$$\sigma_n^{(2)}(z) = \binom{n+1}{2} z + \binom{n}{2} z^3 + \ldots + \binom{2}{2} z^{2n-1}, \tag{7}$$

der geometrischen Reihe (6) *sind für* $|z| \leqq 1$ *sternförmig in bezug auf den Punkt* $w = 0$. *Alle* $\sigma_n^{(2)}(z)$, $(n = 2, 3, \ldots)$ *haben den genauen Sternförmigkeitsradius* 1.

Den Beweis der angekündigten Sätze führe ich meistens in der Weise, daß ich die für die Sternförmigkeit, bzw. Konvexität charakteristische Ausdrücke als Quadrat einer reellen Funktion darstelle.

Außerdem gebrauche ich folgendes Lemma, welches einen Zusammenhang zwischen der Sternförmigkeit eines allgemeinen und eines ungeraden Polinoms[6]) ausspricht:

Ist

$$z\,\varphi(z^2) = c_1 z + c_2 z^3 + \ldots + c_n z^{2n-1} \tag{8}$$

für $|z| \leqq 1$ *eigentlich sternförmig in bezug auf den Punkt* $w = 0$, *so ist*

$$(z-1)\,\varphi(z) = -c_1 + (c_1 - c_2) z + \ldots + (c_{n-1} - c_n) z^{n-1} + c_n z^n \tag{9}$$

für $|z| \leqq 1$ *uneigentlich sternförmig in bezug auf den Randpunkt* $w = 0$. *Der umgekehrte Schluß ist dann und nur dann richtig, wenn* $\varphi(1) \neq 0$ *ist.*

Beweis. Die notwendige Bedingung für die Sternförmigkeit von $z\,\varphi(z^2)$ bzw. $(z-1)\,\varphi(z)$ in bezug auf $w = 0$ ist

$$\frac{d}{d\theta} \arg z\,\varphi(z^2) = R\, z \frac{d}{dz} \log [z\,\varphi(z^2)] = 1 + 2R \frac{z^2 \varphi'(z^2)}{\varphi(z^2)} \geqq 0, \quad |z| = 1 \tag{10}$$

---

[5]) L. Fejér, Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Transactions of the American Math. Soc. Vol. 39 (1936), S. 18—59.

[6]) Das Lemma ist auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten gültig und läßt sich auch auf Potenzreihen übertragen.

bzw.

$$(11)\quad \frac{d}{d\theta}\arg(z-1)\,\varphi(z) = R\,z\,\frac{d}{dz}\log[(z-1)\,\varphi(z)] = \tfrac{1}{2}^{7}) + R\,\frac{z\,\varphi'(z)}{\varphi(z)} \geqq 0,\ |z|=1$$

und hieraus sieht man unmittelbar, daß aus dem Bestehen der einen Ungleichung dasselbe für die andere folgt. Weiterhin ist nach (10, 11)

$$(12)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\arg z\,\varphi(z^2)\cdot d\theta = 2\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\arg(z-1)\,\varphi(z)\,d\theta,\ |z|=1^{8})$$

und diese Gleichung zeigt, daß die im Lemma gemachten Voraussetzungen zu den darin enthaltenen Folgerungen hinreichend sind.

§ 1.

Die iterierten Summen erster Ordnung der geometrischen Reihe $\frac{z}{1-z}$ sind

$$(13)\quad s_n^{(1)}(z) = n\cdot z + (n-1)\,z^2 + \ldots + 1\cdot z^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Es ist

$$s_n^{(1)}(z) = z^n\cdot s_n'\left(\frac{1}{z}\right), \quad s_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^n$$

also

$$(14)\quad s_n^{(1)}(z) = \frac{n\,z - (n+1)\,z^2 + z^{n+2}}{(1-z)^2}$$

und

$$(15)\quad z\,s_n^{(1)'}(z) = \frac{n\,z - (n+2)\,z^3 + (n+2)\,z^{n+2} - n\,z^{n+3}}{(1-z)^3}$$

Hieraus folgt (mit der Bezeichnung $s_n^{(1)}(e^{i\vartheta}) = u_n(\theta) + i\,v_n(\theta)$)

$$(16)\quad s_{n-1}^{(1)}(e^{i\vartheta}) = \frac{-(n-1) + n\,e^{i\vartheta} - e^{ni\vartheta}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = u_{n-1}(\theta) + i\,v_{n-1}(\theta)$$

und

$$(17)\quad e^{i\vartheta}\,s_{n-1}^{(1)'}(e^{i\vartheta}) = \frac{\sin n\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - n\sin\frac{\theta}{2}\cos n\frac{\theta}{2}}{2\sin^3\frac{\theta}{2}}\,e^{ni\vartheta} = v_{n-1}'(\theta) - i\,u_{n-1}(\theta).$$

---

[7]) Es ist nämlich $\underset{|z|=1}{R}\,\frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}$.

[8]) Die Gleichung (12) lautet nämlich, nach (10) und (11) anders geschrieben

$$\int_0^{2\pi}\left[1 + 2R\,\frac{e^{2i\vartheta}\,\varphi'(e^{2i\vartheta})}{\varphi(e^{2i\vartheta})}\right]d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + R\,\frac{e^{i\vartheta}\,\varphi'(e^{i\vartheta})}{\varphi(e^{i\vartheta})}\right]d\theta$$

und wird unmittelbar evident, wenn man beachtet, daß wegen $\varphi(z) \neq 0$ für $|z| \leqq 1$ die in den Integranden stehende Realteile absolut konvergente trigonometrische Reihen sind, welche kein konstantes Glied haben.

Der Faktor von $e^{n i \vartheta}$ in (17) hat $n-2$ reelle, einfache Nullstellen[9])

$$0 < \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2} < 2\pi.$$

$s_{n-1}^{(1)'}(z)$ verschwindet demnach in den Punkten $z = e^{i\vartheta_\nu}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$ der Einheitskreislinie. Diesen Punkten entsprechen an der Bildkurve der Einheitskreislinie Spitzen mit Rückkehrtangenten, welche, wie eine leichte Rechnung zeigt[10]), im Randpunkte $w = s_{n-1}^{(1)}(1)$ des Bildbereiches sich schneiden. $w = s_{n-1}^{(1)}(1) = \binom{n}{2}$ ist also offenbar der einzige Punkt, in bezug auf welchen der Bildbereich sternförmig sein kann.

Nun hat $\frac{d}{d\vartheta} \operatorname{arctg} \frac{v_{n-1}(\vartheta)}{u_{n-1}(\vartheta) - u_{n-1}(0)}$ das Vorzeichen von

$$(18) \quad [u_{n-1}(\vartheta) - u_{n-1}(0)]\, v'_{n-1}(\vartheta) - v_{n-1}(\vartheta)\, u'_{n-1}(\vartheta)$$

$$= \frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - n\sin\frac{\vartheta}{2}\cos n\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^3\frac{\vartheta}{2}} \left[\frac{-n^2\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \sin^2 n\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \cos n\frac{\vartheta}{2} + \frac{n\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - \sin n\frac{\vartheta}{2}\cos n\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \sin n\frac{\vartheta}{2} \right]$$

$$= n\left[\frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - n\sin\frac{\vartheta}{2}\cos n\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^3\frac{\vartheta}{2}} \right]^2$$

$$= n\left[\frac{(n+1)\sin(n-1)\frac{\vartheta}{2} - (n-1)\sin(n+1)\frac{\vartheta}{2}}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \right]^2 \geqq 0$$

---

[9]) Man erkennt unmittelbar, daß das Kosinuspolynom $\frac{n-2}{2}$-ten Grades

$$\frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - n\sin\frac{\vartheta}{2}\cos n\frac{\vartheta}{2}}{2\sin^3\frac{\vartheta}{2}}$$

an den Endpunkten der Intervallen $\left[\frac{2\nu\pi}{n}, \frac{(2\nu+1)\pi}{n}\right]$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left[\frac{n-2}{2}\right]$ entgegengesetzte Vorzeichen hat und außerdem bei ungeradem n für $\vartheta = \pi$ verschwindet.

[10]) Die Gleichung der Rückkehrtangente im Punkte $u_{n-1}(\vartheta_\nu) + i v_{n-1}(\vartheta_\nu)$ ist mit Rücksicht auf (17)

$$\frac{U - u_{n-1}(\vartheta_\nu)}{V - v_{n-1}(\vartheta_\nu)} = \lim_{\vartheta \to \vartheta_\nu} \frac{u'_{n-1}(\vartheta)}{v'_{n-1}(\vartheta)} = -\operatorname{tg} n\frac{\vartheta_\nu}{2}.$$

das von $s_{n-1}^{(1)}(z)$ vermittelte Bild von $|z| \leqq 1$ ist also uneigentlich sternförmig, nämlich in bezug auf den Randpunkt $s_{n-1}^{(1)}(1)$. Man erkennt gleichzeitig, daß der Sternförmigkeits- bzw. Schlichtheitsradius für alle $s_n^{(1)}(z)$, $n = 2, 3, \ldots$ genau 1 ist.

§ 2.

Im § 1 habe ich bewiesen, daß

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{arctg} \frac{v_n(\theta)}{u_n(\theta) - u_n(0)} = \frac{v_n'(\theta)\,[u_n(\theta) - u_n(0)] - u_n'(\theta)\, v_n(\theta)}{[u_n(\theta) - u_n(0)]^2 + [v_n(\theta)]^2}$$

$$= \underset{z = e^{i\theta}}{R} \left\{ z \frac{d}{dz} \log [s_n^{(1)}(z) - s_n^{(1)}(1)] \right\} \geqq 0.$$

Nun ist aber

$$(19) \quad s_n^{(1)}(z) - s_n^{(1)}(1) = nz + (n-1)z^2 + \ldots 1 \cdot z^n - \binom{n+1}{2}$$

$$= (z-1)\left[\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} z + \ldots + \binom{2}{2} z^{n-1}\right] = (z-1) \frac{s_n^{(2)}(z)}{z},$$

d. h.

$$R \left\{ z \frac{d}{dz} \log \left[(z-1) \frac{s_n^{(2)}(z)}{z} \right] \right\} = R \left\{ \frac{z}{z-1} + z \frac{d}{dz} \log \frac{s_n^{(2)}(z)}{z} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} + Rz \frac{d}{dz} \log \frac{s_n^{(2)}(z)}{z} \geqq 0, \quad |z| = 1.$$

Hieraus folgt zunächst

$$(20) \qquad Rz \frac{d}{dz} \log s_n^{(2)}(z) = 1 + Rz \frac{d}{dz} \log \frac{s_n^{(2)}(z)}{z} \geqq \frac{1}{2}, \quad |z| = 1,$$

$s_n^{(2)}(e^{i\theta})$ ist also sternförmig in bezug auf den Punkt $w = s_n^{(2)}(0) = 0$. Nach der Ungleichung (20) ist aber für genügend kleine $|\gamma|$

$$Rz \frac{d}{dz} \log [s_n^{(2)}(z) - \gamma] \geqq 0, \quad |z| = 1,$$

d. h. $s_n^{(2)}(e^{i\vartheta})$ ist sternförmig in bezug auf sämtliche Punkte $w = \gamma$ eines gewissen konvexen Bereiches, welcher den Punkt $w = 0$ als inneren Punkt enthält.

Hieraus erhält man für $V = 0$ mit Rücksicht auf (16) und $\operatorname{tg} n \frac{\theta_\nu}{2} = n \operatorname{tg} \frac{\theta_\nu}{2}$

$$U = u_{n-1}(\theta_\nu) + v_{n-1}(\theta_\nu) \operatorname{tg} n \frac{\theta_\nu}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = s_{n-1}^{(1)}(1), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-2$$

als Abszisse der gemeinsamen Schnittpunkte aller Rückkehrtangenten mit der reellen Achse.

§ 3.

Die iterierten Summen dritter Ordnung der geometrischen Reihe $\frac{z}{1-z}$ sind

$$s_n^{(3)}(z) = \binom{n+2}{3} z + \binom{n+1}{3} z^2 + \ldots + \binom{3}{3} z^n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Es ist

$$s_n^{(3)}(z) = \frac{z^n}{3!}\, s_{n+2}'''\left(\frac{1}{z}\right), \quad s_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^n,$$

also

$$s_n^{(3)}(z) = \frac{(n+2)(n+1)nz - 3(n+3)(n+1)nz^2 + 3(n+3)(n+2)nz^3 - (n+3)(n+2)(n+1)z^4 + 6z^{n+4}}{3!\,(1-z)^4} \tag{22}$$

und

$$z\, s_n^{(3)'}(z) = \frac{(n+2)(n+1)nz - 3(n+4)(n+1)nz^2 + 3(n+4)(n+3)nz^3 - (n+4)(n+3)(n+2)z^4 + 6(n+4)z^{n+4} - 6nz^{n+5}}{3!\,(1-z)^5}. \tag{23}$$

Hieraus folgt (mit den Bezeichnungen $s_{n-2}^{(3)}(e^{i\theta}) = U(\theta) + i\,V(\theta)$)

$$e^{i\theta}\, s_{n-2}^{(3)'}(e^{i\theta}) = V'(\theta) - i\,U'(\theta)$$

$$= i\,\frac{n(n-1)(n-2)e^{-3i\frac{\theta}{2}} - 3(n+2)(n-1)(n-2)e^{-i\frac{\theta}{2}} + 3(n+2)(n+1)(n-2)e^{i\frac{\theta}{2}} - (n+2)(n+1)ne^{3i\frac{\theta}{2}} + 6(n+2)e^{(2n-1)i\frac{\theta}{2}} - 6(n-2)e^{(2n+1)i\frac{\theta}{2}}}{3!\,2^5 \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}},$$

d. h.

$$\left\{\begin{aligned} U'(\theta) &= \frac{-3(n^2-4)\cos\frac{\theta}{2} + 3n^2\cos 3\frac{\theta}{2} - 3(n+2)\cos(2n-1)\frac{\theta}{2} + 3(n-2)\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{3\cdot 2^4\cdot\sin^5\frac{\theta}{2}}, \\ V'(\theta) &= \frac{-3n(n^2-4)\sin\frac{\theta}{2} + n(n^2+2)\sin 3\frac{\theta}{2} - 3(n+2)\sin(2n-1)\frac{\theta}{2} + 3(n-2)\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{3\cdot 2^4\cdot\sin^5\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Nunmehr habe ich $U'(\theta)\,V''(\theta) - V'(\theta)\,U''(\theta)$ zu bilden.

$$(25)\qquad U'(\theta)\,V''(\theta) - V'(\theta)\,U''(\theta) = \frac{U' \cdot \sin^5\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(V' \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}\right) - V' \cdot \sin^5\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(U' \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^{10}\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left[-3\,(n^2-4)\cos\frac{\theta}{2} + 3\,n^2\cos 3\frac{\theta}{2} - 3\,(n+2)\cos(2n-1)\frac{\theta}{2} + 3\,(n-2)\cos(2n+1\,\frac{\theta}{2}\right]}{3!\,2^4 \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}}$$

$$\cdot\frac{\left[-n\,(n^2-4)\cos\frac{\theta}{2} + n\,(n^2+2)\cos 3\frac{\theta}{2} - (n+2)\,(2n-1)\cos(2n-1)\frac{\theta}{2} + (n-2)\,(2n+1)\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}\right]}{2^6 \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}}$$

$$- \frac{\left[-3n\,(n^2-4)\sin\frac{\theta}{2} + n\,(n^2+2)\sin 3\frac{\theta}{2} - 3\,(n+2)\sin(2n-1)\frac{\theta}{2} + 3\,(n-2)\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}\right]}{3!\,2^4 \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}}$$

$$\cdot\frac{\left[(n^2-4)\sin\frac{\theta}{2} - 3\,n^2\sin 3\frac{\theta}{2} + (n+2)\,(2n-1)\sin(2n-1)\frac{\theta}{2} - (n-2)\,(2n+1)\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}\right]}{2^6 \cdot \sin^5\frac{\theta}{2}}.$$

Mit Rücksicht auf die bei den arithmetischen Mitteln erster Ordnung gemachte Erfahrung, mache ich den Ansatz, daß der Zähler von (25) als Quadrat eines Sinuspolynoms mit möglichst wenigen Gliedern darstellbar ist. Da das Kosinuspolynom im Zähler nach Ausführung der Multiplikationen die Vielfachen: 0, 1, 2, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ von θ enthält, so folgt, daß das gesuchte Sinuspolynom mindestens drei Glieder und dann notwendigerweise die Form

$$(26)\qquad A\sin(n-2)\frac{\theta}{2} + B\sin n\frac{\theta}{2} + C\sin(n+2)\frac{\theta}{2}$$

haben muß.

Da aber $U'V'' - V'U''$ auch für $\theta = 0$ endlich bleibt, so muß das Sinustrinom (26) für $\theta = 0$ mindestens fünffach verschwinden.

Hieraus folgt[11]) unmittelbar für die Koeffizienten A, B, C

$$A : B : C = (n+1)(n+2) : -2(n^2-4) : (n-1)(n-2).$$

Wählt man den noch unbestimmten Proportionalitätsfaktor in (26) derart, daß die konstanten Glieder im Zähler von (25) und im Quadrat von (26) übereinstimmen, so erhält man die gesuchte Darstellung

$$(27)\quad \frac{n}{3 \cdot 2^{10}} \left[\frac{(n+1)(n+2)\sin(n-2)\frac{\theta}{2} - 2(n^2-4)\sin n\frac{\theta}{2} + (n-1)(n-2)\sin(n+2)\frac{\theta}{2}}{\sin^5\frac{\theta}{2}} \right]^2$$

und man verifiziert durch eine leichte, wenn auch etwas langwierige Rechnung, daß das Kosinuspolynom $U'V'' - V'U''$ mit (27) tatsächlich identisch, also nicht negativ ist. Hieraus ergibt sich auch, daß der Konvexitätsradius für alle $s_n^{(2)}(z)$, $(n = 2, 3, \ldots)$ genau 1 ist.

Um aus diesem Ergebnis den in der Einleitung erwähnten Fejérschen Satz herzuleiten, bemerken wir zunächst, daß eine Potenzreihe mit vierfach monotoner Koeffizientenfolge

$$a_1, a_2, \ldots, \lim_{n=\infty} a_n = 0\,^{12}),$$

$$\Delta^{(4)} a_n = a_n - 4a_{n+1} + 6a_{n+2} - 4a_{n+3} + a_{n+4} \geqq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

für $|z| \leqq 1$, $z \neq 1$ konvergent ist und nach Fejér[13]) die Umformung

$$(28)\qquad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{(4)} a_n \cdot s_n^{(3)}(z)$$

gestattet.

Nun gilt für die Randkurven $w = s_n^{(3)}(e^{i\vartheta})$ der konvexen, in bezug auf die reelle Achse symmetrischen Bildbereiche von $s_n^{(3)}(z)$

$$(29)\qquad J\, s_n^{(3)}(e^{i\vartheta}) > 0; \quad \frac{d}{d\vartheta} R\, s_n^{(3)}(e^{i\vartheta}) < 0 \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \pi$$

---

[11]) Für das fünffache Verschwinden des Sinustrinoms (26) für $\theta = 0$ ist notwendig und hinreichend, daß seine erste und dritte Derivierte für $\theta = 0$ verschwinde, d. h.

$$\begin{aligned} (n-2)A + nB + (n+2)C &= 0, \\ (n-2)^3 A + n^3 B + (n+2)^3 C &= 0, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad A : B : C = \begin{vmatrix} n-2 & n & n+2 \\ (n-2)^3 & n^3 & (n+2)^3 \end{vmatrix}.$$

[12]) Im Falle $\lim_{n=\infty} a_n = \alpha > 0$ kommt an der rechten Seite von (28) das additive Glied $\frac{\alpha z}{1-z}$ hinzu, und die folgenden Überlegungen bleiben auch in diesem Falle gültig.

[13]) L. Fejér, Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Acta Litterarum ac Scient. 8 (1936), S. 90—116.

und, da diese Eigenschaften (29) additiv sind, so ist auch bei der Randkurve $w = F(e^{i\vartheta})$ für $0 < \theta < \pi$ die Ordinate positiv, und die Abszisse monoton abnehmend, womit die Schlichtheit von $F(z)$ für $|z| \leqq 1$ bewiesen ist.

§ 4.

Setzt man

$$(30) \qquad \sigma_n^{(2)}(z) = \binom{n+1}{2} z + \binom{n}{2} z^3 + \ldots + \binom{2}{2} z^{2n-1} = z\,\varphi(z^2),$$

so wird

$$(31) \quad s_n^{(1)}(z) - s_n^{(1)}(1) = (z-1)\left[\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} z + \ldots + \binom{2}{2} z^{n-1}\right] = (z-1)\,\varphi(z),$$

wobei $\varphi(1) \neq 0$ ist. Aus der in § 1 bewiesenen Sternförmigkeit von $s_n^{(1)}(z)$ in bezug auf den Punkt $w = s_n^{(1)}(1)$ folgt also auf Grund des in der Einleitung ausgesprochenen Lemmas unmittelbar die Sternförmigkeit von $\sigma_n^{(2)}(z)$ in bezug auf den Punkt $w = 0$. Den Rückkehrtangenten der Bildkurve $w = s_n^{(1)}(e^{i\vartheta})$ entsprechen Inflexionstangenten[14]) der Bildkurve $w = \sigma_n^{(2)}(e^{i\vartheta})$, welche sich im gemeinsamen Punkte $w = 0$ schneiden. Hieraus folgt, daß alle $\sigma_n^{(2)}(z)$, $(n = 2, 3, \ldots)$ den genauen Sternförmigkeitsradius 1 haben.

---

[14]) Mit Ausnahme der Punkte $w = \sigma_{2r}^{(2)}(\pm i)$, welche Spitzen mit gemeinsamer Rückkehrtangente sind.

(Eingegangen am 5. Juli 1936.)

Über die Existenz von Integralen der partiellen Differentialgleichung $f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ in der Umgebung eines singulären Punktes.

Von

E. Digel in Clausthal.

---

1. Im folgenden soll auf einfacherem Wege und mit einer Ergänzung ein Resultat von Herrn Alden [1]) bewiesen werden. Es handelt sich um folgenden

Satz 1: *In einer Umgebung* $\mathfrak{U}$ *des Nullpunktes seien die Funktionen* $f(x, y)$ *und* $g(x, y)$ *mit stetigen partiellen Ableitungen versehen, und es sei* $f^2 + g^2 \neq 0$ *für* $x^2 + y^2 \neq 0$. *Ferner möge das System von Differentialgleichungen*

$$x'(t) = f(x, y), \qquad y'(t) = g(x, y) \tag{1}$$

in $\mathfrak{U}$ *nur geschlossene Integralkurven besitzen. Dann gibt es in* $\mathfrak{U}$ *ein Integral* $z(x, y)$ *der partiellen Differentialgleichung*

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

für welches $z_x^2 + z_y^2 \neq 0$ *in allen Punkten außer im Nullpunkt ist.*

Unter einem Integral verstehen wir dabei eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion, die der Differentialgleichung genügt. Herr Alden hatte dieses Resultat mit der Einschränkung bewiesen, daß die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Nullpunkt nicht gesichert war.

Schließlich wird die Existenz von Integralen in der Umgebung eines Sattelpunktes kurz behandelt.

2. Aus den Sätzen über den Verlauf der Charakteristiken des Systems (1) geht hervor [2]), daß die geschlossenen Lösungen des Systems (1) alle den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten und daß es eine Orthogonaltrajektorie s gibt, welche sämtliche Charakteristiken genau einmal schneidet. Wir können annehmen, daß eine solche Orthogonaltrajektorie gegeben ist durch

$$x = \Phi(T), \qquad y = \Psi(T), \qquad 0 \leqq T < 1.$$

---

[1]) H. H. Alden, American Journal of Mathematics 56 (1934), S. 593—612.

[2]) I. Bendixson, Acta mathematica 24 (1901), S. 1—88, dargestellt bei Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 195—224.

$\Phi(T)$, $\Psi(T)$ sind für $0 \leqq T < 1$ stetig und besitzen für $0 < T < 1$ stetige Ableitungen, für die $|\Phi'(T)| + |\Psi'(T)| > 0$ gilt. Es ist

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0.$$

Die charakteristischen Funktionen des Systems (1) seien

$$x = \varphi(t, \xi, \eta), \qquad y = \psi(t, \xi, \eta).$$

Dabei gilt $\xi = \varphi(0, \xi, \eta)$, $\eta = \psi(0, \xi, \eta)$. ξ, η ist ein beliebiger Punkt in dem Gebiet $\overline{\mathfrak{U}}$, das aus $\mathfrak{U}$ entsteht, wenn der Nullpunkt entfernt wird; t kann beliebige Werte annehmen.

In $\mathfrak{U}$ wird nun eine Funktion $\tau(\xi, \eta)$ folgendermaßen definiert: ξ, η sei zunächst ein Punkt von $\overline{\mathfrak{U}}$. Durch ihn geht genau eine Charakteristik des Systems (1), welche die Kurve $\mathfrak{s}$ in einem eindeutig bestimmten Punkt a, b schneidet, der auf $\mathfrak{s}$ zu dem Parameterwert τ gehören möge. Wenn noch $\tau(0, 0) = 0$ gesetzt wird, so ist $\tau(\xi, \eta)$ in $\mathfrak{U}$ eindeutig definiert. Wir zeigen nun, daß $\tau(\xi, \eta)$ in $\overline{\mathfrak{U}}$ stetige partielle Ableitungen besitzt.

Die Funktion $\tau(\xi, \eta)$ genügt zusammen mit einer Funktion $t(\xi, \eta)$[3]) den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(t, \xi, \eta) - \Phi(\tau) &= 0, \\ \psi(t, \xi, \eta) - \Psi(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Funktionaldeterminante der linken Seiten in bezug auf t und τ ist

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & -\Phi'(\tau) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & -\Psi'(\tau) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a, b) & -\Phi'(\tau) \\ g(a, b) & -\Psi'(\tau) \end{vmatrix}.$$

Da nun $x = \Phi(T)$, $y = \Psi(T)$ eine Orthogonaltrajektorie der Charakteristiken von (1) ist, gibt es eine Zahl $\varrho \neq 0$, so daß

$$\Phi'(\tau) = -\varrho \cdot g(a, b), \qquad \Psi'(\tau) = \varrho \cdot f(a, b)$$

ist. Folglich gilt

$$J = \begin{vmatrix} f(a, b) & -\varrho \cdot g(a, b) \\ g(a, b) & \varrho \cdot f(a, b) \end{vmatrix} = \varrho \cdot (f^2(a, b) + g^2(a, b)) \neq 0.$$

---

[3]) Über die Funktion $t(\xi, \eta)$ läßt sich folgendes sagen: Da die Funktionen $\varphi(t, \xi, \eta)$, $\psi(t, \xi, \eta)$, welche die Charakteristik durch den Punkt ξ, η darstellen, periodische Funktionen der Variabeln t mit einer kleinsten gemeinsamen Periode γ sind, so ist die Funktion $t(\xi, \eta)$ unendlich vieldeutig, und zwar unterscheiden sich ihre Werte um ganzzahlige Vielfache von γ. Daher sind die Funktionen

$$\varphi(t(\xi, \eta), \xi, \eta), \qquad \psi(t(\xi, \eta), \xi, \eta)$$

eindeutig. Das ist bei der folgenden Überlegung zu beachten.

Nach einem bekannten Satz über implizite Funktionen besitzt daher die Funktion $\tau(\xi, \eta)$ stetige partielle Ableitungen in $\overline{\mathfrak{U}}$. Weiter folgt aus diesem Satze, daß sich die Funktion $t(\xi, \eta)$ in einer gewissen Umgebung von ξ, η so in verschiedene Zweige zusammenfassen läßt, daß jeder dieser Zweige eindeutig und mit stetigen partiellen Ableitungen versehen ist. Da die Funktion $\tau(\xi, \eta)$ außerdem längs jeder Charakteristik konstant ist, so ist sie in $\overline{\mathfrak{U}}$ ein Integral der Differentialgleichung (2).

Nun zeigen wir, daß $\left|\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right| > 0$ ist in $\overline{\mathfrak{U}}$. Differenziert man die Gleichungen (3) nach ξ und η und löst nach $\frac{\partial \tau}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$ auf, so erhält man

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} f(a, b) & -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ g(a, b) & -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{vmatrix}}{J}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} f(a, b) & -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ g(a, b) & -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{J}.$$

J ist die oben aufgeschriebene Funktionaldeterminante. Wären $\frac{\partial \tau}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$ beide gleich Null, so würde gelten

$$f(a, b)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - g(a, b)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0,$$

$$f(a, b)\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - g(a, b)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

Die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\xi, \eta)}$ ist ungleich Null[4]). Daher würde aus diesen Gleichungen $f(a, b) = g(a, b) = 0$ folgen, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist.

Da $\tau(\xi, \eta)$ ein Integral von (2) ist, gilt dies auch von jeder stetig differenzierbaren Funktion $\omega(\tau(\xi, \eta))$. Wir konstruieren nun eine solche Funktion $\omega(\tau(\xi, \eta))$, die nach passender Festsetzung ihres Wertes im Nullpunkt, auch in diesem Punkt noch stetige partielle Ableitungen hat.

Wie oben schon festgelegt wurde, schneidet die Charakteristik durch den Punkt ξ, η die Kurve s in einem Punkt, der zum Parameterwert τ gehört. Auf der Menge der Punkte ξ, η, für die $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ $(0 < \alpha < \beta < 1)$ gilt, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \tau}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$ be-

[4]) Vgl. z. B. Kamke, Differentialgleichungen, S. 155.

schränkt. Daraus folgt, daß es eine stetige Funktion $m(\tau)$ mit der Eigenschaft gibt, daß

$$\left|\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right| < m(\tau), \quad \left|\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right| < m(\tau) \quad \text{für} \quad 0 < \tau < 1 \tag{4}$$

ist. Die Funktion $m(\tau)$ kann außerdem noch so angenommen werden, daß sie für $0 < \tau < \delta$ $(\delta < 1)$ monoton fallend und daß

$$\lim_{\tau \to 0+0} m(\tau) = +\infty$$

ist. Wird $\frac{1}{m(\tau)} = 0$ gesetzt für $\tau = 0$, so besitzt die Funktion

$$M(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{m(u)}\, du \tag{5}$$

im Intervall $0 \leqq \tau < 1$ eine stetige Ableitung und es ist

$$M'(\tau) = \frac{1}{m(\tau)}. \tag{6}$$

Außerdem gilt für $0 \leqq \tau < \delta$ die Ungleichung

$$M(\tau) \leqq \frac{\tau}{m(\tau)}. \tag{7}$$

Nun wird die Funktion $F(\xi, \eta) = M(\tau(\xi, \eta)) \cdot \tau(\xi, \eta)$ gebildet. Sie besitzt in $\overline{\mathfrak{U}}$ stetige partielle Ableitungen und es ist

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{dM}{d\tau} \cdot \tau \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + M(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\tau}{m(\tau)} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + M(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \xi}$$

wegen (6). Die Punkte ξ, η, für welche $0 \leqq \tau < \delta$ ist, machen eine Umgebung des Nullpunktes aus. In dieser Umgebung gilt wegen (7) und (4) für $\xi, \eta \neq 0, 0$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \xi}\right| \leqq 2\tau. \tag{8}$$

Da $\lim_{\xi, \eta \to 0, 0} \tau(\xi, \eta) = 0$ ist, so ist auch $\lim_{\xi, \eta \to 0, 0} \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$, und entsprechend beweist man $\lim_{\xi, \eta \to 0, 0} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$. Wenn wir $F(0, 0) = 0$ setzen, so ist $F(\xi, \eta)$ offenbar im Nullpunkt stetig. Die partiellen Ableitungen im Nullpunkt existieren, denn es ist für passend gewähltes $0 < \vartheta < 1$

$$\frac{F(\xi, 0) - F(0, 0)}{\xi} = \frac{\partial F(\vartheta \xi, 0)}{\partial \xi} \to 0 \quad \text{für} \quad \xi \to 0$$

wegen (8). Folglich besitzt die Funktion $F(\xi, \eta)$ auch in $\mathfrak{U}$ stetige partielle Ableitungen und ist ein Integral der Differentialgleichung (2).

Endlich ist für $|\xi| + |\eta| > 0$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 = \left[\frac{dM}{d\tau} \cdot \tau + M(\tau)\right]^2 \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right)^2\right] > 0,$$

weil die Größen $\frac{dM}{d\tau}$, τ, $M(\tau)$, $\left(\frac{\partial \tau}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta}\right)^2$ größer Null sind für $\tau > 0$.

3. Wenn der singuläre Punkt 0, 0 ein Sattelpunkt des Systems (1) ist, braucht es kein Integral $z(x, y)$ der Differentialgleichung (2) mit der Eigenschaft $z_x^2 + z_y^2 \neq 0$ für $x^2 + y^2 \neq 0$ zu geben. Das geht aus dem folgenden Beispiel hervor. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Die Integrale dieser Differentialgleichung haben denselben Wert längs der Kurven $x^2 y = \text{const.}$ $z(x, y)$ sei ein Integral, das in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ des Nullpunktes existiert. In einem dieser Umgebung angehörenden Punkt $x_1, 0\,(x_1 > 0)$ der x-Achse möge $z_x^2 + z_y^2 \neq 0$ sein. Da $z_x(x_1, 0) = 0$ ist, so muß $z_y(x_1, 0) \neq 0$ sein.

Wir wollen nun zeigen, daß auf der y-Achse sowohl z_x als auch z_y gleich Null ist. Beim Nachweis dürfen wir offenbar annehmen, daß $z(x, y)$ auf der x- und y-Achse den Wert Null besitzt. $0, y_2$ und $\delta, y_2\,(\delta > 0,\ y_2 > 0)$ seien Punkte, die in $\mathfrak{U}$ liegen. Die Zahl ε wird nun so gewählt, daß der Punkt x_1, ε in $\mathfrak{U}$ und außerdem auf derselben der Kurven $x^2 y = \text{const.}$ liegt wie der Punkt δ, y_2. Es ist also $x_1^2\,\varepsilon = \delta^2 y_2$. Bei genügend kleinem δ gibt es ein solches ε. Für $\delta \to 0$ geht auch $\varepsilon \to 0$, und es ist

$$\lim_{\delta \to 0}\frac{\varepsilon}{\delta} = \lim_{\delta \to 0}\frac{y_2}{x_1^2}\cdot\delta = 0. \tag{9}$$

Nun gilt

$$z_x(0, y_2) = \lim_{\delta \to 0}\frac{z(\delta, y_2) - z(0, y_2)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0}\frac{z(\delta, y_2)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0}\frac{z(x_1, \varepsilon)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta \to 0}\frac{z(x_1, \varepsilon)}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta} = z_y(x_1, 0)\cdot\lim_{\delta \to 0}\frac{\varepsilon}{\delta} = 0$$

wegen (9).

Da auch $z_y(0, y_2) = 0$ ist, verschwinden auf der y-Achse beide partielle Ableitungen.

Es gibt also, wenn ein Sattelpunkt vorliegt, im allgemeinen kein Integral der partiellen Differentialgleichung (2), das auf allen in den singulären Punkt einmündenden Charakteristiken des Systems (1) partielle Ableitungen besitzt, die nicht beide verschwinden. Um zu einer allgemeinen Aussage zu gelangen, sei zunächst an den Verlauf der Charakteristiken in der Umgebung eines Sattelpunktes erinnert:

Die Funktionen f und g des Systems (1) mögen in einer Umgebung $\mathfrak{G}$ des Nullpunkts stetige partielle Ableitungen besitzen. Ist der Nullpunkt ein Sattelpunkt und der einzige singuläre Punkt in $\mathfrak{G}$, so existiert eine ε-Umgebung $\mathfrak{U}$ des Nullpunktes, die samt ihrem Rande in $\mathfrak{G}$ liegt mit den folgenden Eigenschaften: Es gibt eine gerade Anzahl von Charakteristiken des Systems (1): $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{2n}$, die in den Nullpunkt einmünden und zusammen mit diesem Punkt die Umgebung $\mathfrak{U}$ in die ein-

fach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{2n}$ zerlegen. Wir betrachten die Charakteristiken nur in $\mathfrak{U}$, nicht in $\mathfrak{G}$. Das hat zur Folge, daß unter Umständen Punkte, die in $\mathfrak{G}$ zu derselben Charakteristik gehören, in $\mathfrak{U}$ auf verschiedenen Charakteristiken liegen. Eine Charakteristik durch einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{2n}$ gelangt nach beiden Seiten ins Äußere von $\mathfrak{U}$. Es gilt nun folgender

Satz 2: *Die Differentialgleichung* (2) *besitzt ein Integral* $z(x, y)$, *das in einer in* $\mathfrak{U}$ *gelegenen Umgebung* $\mathfrak{V}$ *des Nullpunktes existiert und für welches* $z_x^2 + z_y^2 \neq 0$ *ist mit Ausnahme des Nullpunktes und der Punkte von* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{2n}$. *Dieses Integral ist also in* $\mathfrak{V}$ *ein Hauptintegral der Differentialgleichung* (2).

Beweis: Es werde zunächst das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ betrachtet. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ seien diejenigen unter den Charakteristiken $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{2n}$, die zu seinem Rande gehören. Die Kurve

$$\mathfrak{s}: \qquad x = \Phi(T), \quad y = \Psi(T), \quad 0 \leqq T < 1,$$

wobei $\Phi(T)$, $\Psi(T)$ für $0 \leqq T < 1$ stetige Ableitungen mit $|\Phi(T)| + |\Psi'(T)| > 0$ haben mögen, sei eine Orthogonaltrajektorie der Charakteristiken des Systems (1), die für $T = 0$ durch einen Punkt von $\mathfrak{C}_1$ geht und für $0 < T < 1$ dem Gebiet $\mathfrak{G}_1$ angehört. Man überzeugt sich leicht, daß jede Charakteristik die Kurve $\mathfrak{s}$ nur einmal schneidet. Die Punkte der Charakteristiken von (1), die durch einen inneren Punkt von $\mathfrak{s}$ gehen, bilden ein Gebiet $\mathfrak{g}_1$[5]), das sicher alle diejenigen Punkte von $\mathfrak{G}_1$ enthält, die einen genügend kleinen Abstand vom Nullpunkt besitzen[6]). Unter $\bar{\mathfrak{g}}_1$ verstehen wir $\mathfrak{g}_1$ vermehrt um die Punkte von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ und den Nullpunkt.

Wie in Nr. 2 wird nun in $\mathfrak{g}_1$ eine Funktion $\tau(\xi, \eta)$ und mit deren Hilfe eine Funktion $F(\xi, \eta)$ definiert[7]). Auf $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ und im Nullpunkt werde $F(\xi, \eta) = 0$ gesetzt. Man beweist nun nach dem Muster von Nr. 2 leicht die folgenden Behauptungen:

a) $F(\xi, \eta)$ besitzt in $\mathfrak{g}_1$ stetige partielle Ableitungen, die nicht beide verschwinden.

b) ξ_0, η_0 sei entweder der Nullpunkt oder ein Punkt von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Dann gilt für Punkte ξ, η in $\mathfrak{g}_1$

$$\lim_{\xi, \eta \to \xi_0, \eta_0} \frac{\partial F}{\partial \xi} = \lim_{\xi, \eta \to \xi_0, \eta_0} \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0.$$

---

[5]) Zum Beweis vgl. man E. Kamke, Math. Annalen 99 (1928), S. 605.

[6]) Das kann man sich leicht selber überlegen oder aus Bendixson, a. a. O., S. 19 ff. entnehmen.

[7]) Um einzusehen, daß $\frac{\partial \tau}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$ für $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ $(0 < \alpha < \beta < 1)$ beschränkt sind, hat man zu beachten, daß die Umgebung $\mathfrak{U}$ samt ihrem Rande in dem Definitionsgebiet von f und g liegt.

Auf die gleiche Weise wird die Funktion $F(\xi, \eta)$ in den Teilgebieten $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_{2n}$ von $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{2n}$ definiert und $\bar{\mathfrak{g}}_1 + \bar{\mathfrak{g}}_2 + \ldots + \bar{\mathfrak{g}}_{2n} = \mathfrak{B}$ gesetzt. $\mathfrak{B}$ ist eine Umgebung des Nullpunktes. Die Punkte von $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{2n}$ sind innere Punkte von $\mathfrak{B}$ und es gilt

c) In jedem Punkt ξ_0, η_0 von $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{2n}$ existieren die partiellen Ableitungen von $F(\xi, \eta)$ und haben den Wert Null.

Das ergibt sich folgendermaßen: ξ_0, η_0 sei etwa ein Punkt von $\mathfrak{C}_1$ und die Charakteristik $\mathfrak{C}_1$ gehöre zum Rande der beiden Gebiete $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_{2n}$. Weiter sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine δ-Umgebung des Punktes ξ_0, η_0, die nur Punkte von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_{2n}$ und $\mathfrak{C}_1$ enthält. Diese δ-Umgebung kann ferner so gewählt werden, daß in denjenigen ihrer Punkte, die zu $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{g}_{2n}$ gehören, $\left|\frac{\partial F}{\partial \xi}\right| < \varepsilon$ und $\left|\frac{\partial F}{\partial \eta}\right| < \varepsilon$ ist.

ξ, η_0 sei ein von ξ_0, η_0 verschiedener Punkt dieser δ-Umgebung. Ist nun

1. ξ, η_0 ein Punkt von $\mathfrak{C}_1$, so ist $\frac{F(\xi, \eta_0) - F(\xi_0, \eta_0)}{\xi - \xi_0} = 0$.

2. ξ, η_0 kein Punkt von $\mathfrak{C}_1$; dann gibt es auf der Strecke von ξ_0, η_0 nach ξ, η_0 einen eventuell mit ξ_0, η_0 zusammenfallenden Punkt a, η_0 von $\mathfrak{C}_1$, der am nächsten bei ξ, η_0 liegt und es gilt mit $0 < \vartheta < 1$

$$\left|\frac{F(\xi, \eta_0) - F(\xi_0, \eta_0)}{\xi - \xi_0}\right| \leqq \left|\frac{F(\xi, \eta_0) - F(a, \eta_0)}{\xi - a}\right| = |F_\xi(a + \vartheta(\xi - a), \eta_0)| < \varepsilon.$$

Es ist also in jedem Falle $\left|\frac{F(\xi, \eta_0) - F(\xi_0, \eta_0)}{\xi - \xi_0}\right| < \varepsilon$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Da die Existenz der partiellen Ableitungen im Nullpunkt nun ohne weiteres aus dem Mittelwertsatz folgt, stellt die Funktion $F(\xi, \eta)$ in $\mathfrak{B}$ ein Integral mit den angegebenen Eigenschaften dar.

(Eingegangen am 9. Juli 1936.)

Über den Brunn-Minkowskischen Satz.

Von

Harald Geppert in Gießen.

Die Theorie der Eibereiche verwendet als Operationen die der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar, die die entsprechenden Behandlungen der Stützfunktion widerspiegeln. Will man die Addition umkehren, so zeigt sich, daß man die Beschränkung auf Eibereiche fallen lassen und diese in die umfassendere Klasse derjenigen Bereiche einbetten muß, die sich durch eine Stützfunktion beschreiben lassen. Jeder stützbare Bereich ist dann unter gewissen Regularitätsannahmen die Differenz zweier konvexer Bereiche.

Der Brunn-Minkowskische Satz besagt, daß in einer Linearschar ebener konvexer Bereiche die Quadratwurzel des Flächeninhalts eine konkave Funktion des Scharparameters ist; seine Verschärfungen bemühen sich um die Feststellung, wann der Flächeninhalt selbst konkave Funktion des Scharparameters ist; durch Erweiterung des Gesichtsfeldes auf stützbare Bereiche gelingt es, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser Verschärfung anzugeben; das Ergebnis schließt alle bekannten Ungleichungen, insbesondere die Brunn-Minkowskische, ein, und erweitert deren Gültigkeitsgrenzen auf stützbare Bereiche. Die Methode ist die der Entwicklung nach Fourierreihen; im Raume tritt ihr die Entwicklung nach Kugelfunktionen an die Seite, so daß die Beantwortung der gleichlaufenden Fragen gelingt, die sich auf die Oberflächen stützbarer, insbesondere konvexer Flächen, beziehen.

Die beste Übersicht über die vorliegenden Methoden gibt die ausgezeichnete Schrift von Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math. III, 1., 1934, sowie das Buch von T. Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes, Paris 1929.

1. Stützfunktion und stützbare Bereiche.

Jeder ebene konvexe Bereich B kann nach Vorgabe eines willkürlichen Anfangspunktes O durch seine Stützfunktion $h(\varphi)$ beschrieben werden, die den Abstand der zum Halbstrahl in der Richtung φ senkrechten Stützgeraden von O, in dieser Richtung gemessen, bezeichnet. Für die analytische Theorie der konvexen Bereiche ist das Wesentliche die Existenz einer solchen Stützfunktion; diese lassen sich daher in eine umfassendere Klasse von Bereichen einordnen, die wir *stützbare Bereiche* nennen und

deren jeder durch eine Stützfunktion gekennzeichnet wird. Ist B nicht konvex, so soll B stützbar heißen, wenn die Randkurve C geschlossen ist, in jedem Punkte genau eine Tangente besitzt, und es zu jeder durch O gehenden Geraden genau zwei auf ihr senkrechte Tangenten von C gibt. Stützfunktion nennt man den Abstand der zur φ-Richtung senkrechten Tangente von O, mit positivem oder negativem Zeichen versehen, je nachdem er in der Richtung des φ-Halbstrahles oder in der entgegengesetzten Richtung aufzutragen ist.

In diesem Sinne ist der von der Sternkurve $x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1$ begrenzte Bereich stützbar mit der Stützfunktion $h(\varphi) = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$. Durchläuft φ die Wertefolge 0 bis 2π, so erhält C einen gewissen Umlaufssinn; es kann vorkommen, daß C sich überschlägt und B in mehrere Teile zerfällt, die teils positiv, teils negativ umlaufen werden; ein Beispiel gibt der zur Stützfunktion $h(\varphi) = \frac{1}{2} |\cos \varphi| - 1$ gehörige, von den nach der x_2-Achse weisenden Halbkreisen um $\pm \frac{1}{2}$ mit dem Radius 1 und den Parallelen $x_2 = \pm 1$ begrenzte stützbare Bereich.

Die Tatsache, daß O beliebig ist, zwingt dazu, auch negative Werte von $h(\varphi)$ zuzulassen, die dann in der zur φ-Richtung entgegengesetzten Richtung abzutragen sind. Nach Vorgabe von O und der Richtung $\varphi = 0$ ist $h(\varphi)$ durch den Bereich B noch nicht festgelegt, vielmehr ist immer zugleich mit $h(\varphi)$ auch $\bar{h}(\varphi) = -h(\varphi + \pi)$ Stützfunktion von B. Je nachdem man B durch $h(\varphi)$ oder $\bar{h}(\varphi)$ darstellt, ändert sich seine funktionale Bedeutung, aber nicht die geometrische Gestalt. Will man an B kennzeichnen, welche der beiden Stützfunktionen benutzt wird, so genügt die Angabe, welcher Randpunkt als zu $\varphi = 0$ gehörig angesehen wird, falls $h(0) + h(\pi) \neq 0$ ist; dies wollen wir uns im folgenden immer getan denken. Durch $h(\varphi) = \bar{h}(\varphi) + \text{const.}$ sind die Bereiche konstanter Breite, durch $h(\varphi) = -\bar{h}(\varphi)$ die Mittelpunktsbereiche ausgezeichnet.

$h(\varphi)$ ist periodisch mit der Periode 2π; ist $h(\varphi)$ stetig differenzierbar, so ergeben sich die nichtgeradlinigen Teile von C aus den Formeln

$$x_1 = h \cos \varphi - h' \sin \varphi; \quad x_2 = h \sin \varphi + h' \cos \varphi, \tag{1.1}$$

und

$$F = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{h^2(\varphi) - h'^2(\varphi)\}\, d\varphi \tag{1.2}$$

liefert den Flächeninhalt von B, wobei die negativ umlaufenen Teile negativ gezählt werden. Ein konvexer Bereich hat stets nichtnegativen Flächeninhalt, dagegen kann der Inhalt eines stützbaren Bereiches sowohl positiv wie negativ sein. Das Integral

$$L = \int_0^{2\pi} h(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \{h(\varphi) + h''(\varphi)\}\, d\varphi \tag{1.3}$$

stellt, wenn B konvex, also $h(\varphi)+h''(\varphi)$ einerlei Zeichens ist, absolut genommen, die Länge von C dar; beim allgemeinen stützbaren Bereich mit zweifach differenzierbarer Stützfunktion ist die Länge hingegen durch

$$\int_0^{2\pi} |h(\varphi)+h''(\varphi)|\,d\varphi$$

zu erklären, und dieses Integral stimmt im allgemeinen nicht mit (1. 3) überein. L und F hängen nicht von der Wahl der benutzten Stützfunktionen oder der des Aufpunktes ab.

Es liegt nahe, die Funktionen $h(\varphi)$ und $\bar{h}(\varphi)$ durch Fourierreihen darzustellen

$$(1.4)\qquad \begin{cases} h(\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi); \\ \bar{h}(\varphi) = -\frac{1}{2}a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi); \end{cases}$$

dann wird

$$(1.5)\qquad \begin{cases} L = \pi a_0, \\ F = \frac{\pi}{4}a_0^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2-1)(a_\nu^2+b_\nu^2), \end{cases}$$

woraus sofort die Ungleichung

$$(1.6)\qquad L^2 \geqq 4\pi F$$

entnommen wird, die aber nur bei konvexen Bereichen die isoperimetrische Ungleichung bedeutet. In Rücksicht auf (1. 5) werden wir mit $h(\varphi)$ diejenige Stützfunktion bezeichnen, die $a_0 \geqq 0$ liefert.

Die Stützfunktion des Punktes $x_1 = a$, $x_2 = b$ bezüglich O ist $h(\varphi) = \bar{h}(\varphi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi$; diejenige einer Strecke der Länge $2l$ und der Richtung α bezüglich ihres Mittelpunktes O:

$$(1.7)\quad h(\varphi) = \bar{h}(\varphi) = l\cdot|\cos(\varphi-\alpha)|$$
$$= \frac{2l}{\pi} - \frac{4l}{\pi}\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{4\nu^2-1}(\cos 2\nu\alpha\cos 2\nu\varphi + \sin 2\nu\alpha \sin 2\nu\varphi).$$

2. Die Addition stützbarer Bereiche.

Sind B_1, B_2 zwei konvexe Bereiche, so bieten sich als nächstliegende Möglichkeiten zur Erklärung der Addition die folgenden dar:

a) Man wählt in B_2 eine feste Marke A und schiebt B_2 über B_1 ohne Drehung so hin, daß A alle Punkte von B_1 überstreicht; das von B_2 dabei überstrichene Gebiet nennen wir $B_1 + B_2$. Diese Addition ist assoziativ und kommutativ, sie entspricht offenbar der Addition der Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$ von B_1 und B_2.

b) Man schiebt B_2 ohne Drehung über B_1 so hin, daß B_2 und B_1 immer mindestens einen Punkt gemein haben, und nennt den dabei von B_2 überstrichenen Bereich die Summe von B_1 und B_2. Die Stützfunktion dieses Summenbereiches ist dann $h_1(\varphi) + b_2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, wenn $b(\varphi)$ die Breite eines Bereiches in der φ-Richtung bedeutet. Diese Addition ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

c) Man führt das Verfahren der vorigen Nummer unter Zulassung beliebiger Drehungen von B_2 aus; dann ist die Stützfunktion des Summenbereiches $h_1(\varphi) + \max b_2(\varphi)$; diese Addition ist weder assoziativ, noch kommutativ.

Diese Überlegungen führen dazu, als Summe zweier stützbarer Bereiche B_1, B_2 den durch die Summe der Stützfunktionen $h_1(\varphi) + h_2(\varphi)$ gekennzeichneten Bereich $B_1 + B_2$ zu erklären. Damit ist zugleich eine geometrische Konstruktion dieser Summe gegeben, die im Gegensatz zu der eingangs entwickelten für beliebige stützbare Bereiche gilt. Es gibt stets zwei derartige Summenbereiche, deren erster, B, zu den Stützfunktionen $h_1 + h_2$ bzw. $\bar{h}_1 + \bar{h}_2$, deren zweiter, B', zu $h_1 + \bar{h}_2$ bzw. $\bar{h}_1 + h_2$ gehört. Wählt man die Bezeichnung der Stützfunktionen wie oben angegeben und sind B_1, B_2 konvex, so ist auch der erste Summenbereich konvex, während dies beim zweiten nicht der Fall zu sein braucht.

Lauten die Fourierentwicklungen von $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} h_1(\varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi), \\ h_2(\varphi) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu \cos \nu\varphi + d_\nu \sin \nu\varphi), \end{cases}$$

so ist nach (1.3):

$$(2.2)\qquad \begin{cases} L(B_1 + B_2) = \pi(a_0 + c_0) = L_1 + L_2, \\ F(B_1 + B_2) = F_{11} + 2F_{12} + F_{22}, \end{cases}$$

wenn F_{11}, F_{22} die nach (1.2) zu bildenden Flächeninhalte von B_1, B_2, F_{12} den „gemischten" Flächeninhalt von B_1 und B_2, der durch die Formel

$$(2.3)\qquad F_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{h_1 h_2 - h_1' h_2'\}\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4}a_0 c_0 - \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=2}^{\infty}{}' (\nu^2 - 1)(a_\nu c_\nu + b_\nu d_\nu)$$

gegeben ist, bezeichnen. Da Parallelverschiebung der Bereiche mit der Addition eines Punktes gleichwertig ist, zeigt die Tatsache, daß (1.5) und (2.3) die $\nu = 1$ entsprechenden Glieder nicht enthalten, die Unempfindlichkeit dieser Begriffe gegen Parallelverschiebung der Bereiche. Geht man

von dem anderen Summenbereich B' aus, so erhält man einen zweiten gemischten Inhalt

$$(2.4) \qquad F'_{12} = -\frac{\pi}{4} a_0 c_0 + \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu (\nu^2 - 1)(a_\nu c_\nu + b_\nu d_\nu).$$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen seien einige gemischte Inhalte angegeben:

a) B_2 ist ein Kreis vom Radius a, also $h_2(\varphi) = a$.

$$(2.5) \qquad F_{12} = \frac{\pi}{2} a_0 a = \frac{1}{2} a L_1 = -F'_{12};$$

bei konvexen Bereichen B_1 bedeutet diese Addition den Übergang zum Parallelbereich im Abstande a.

b) B_2 ist eine Strecke der Länge $2l$ in Richtung α; nach (1.7) ist

$$(2.6) \qquad F_{12} = -F'_{12} = a_0 l + 2l \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu (a_{2\nu} \cos 2\nu\alpha + b_{2\nu} \sin 2\nu\alpha)$$

$$= l \cdot \left\{ h_1\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + h_1\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right\} = l \cdot b_1(\alpha),$$

wobei man unter

$$b(\varphi) = h\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + h\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

die Breite eines stützbaren Bereiches, d. h. den Abstand der zur φ-Richtung parallelen Stützgeraden bzw. Randtangenten versteht. Bei konvexem B_1 bedeutet diese Addition die „teleskopische" Verzerrung um $2l$ in Richtung α.

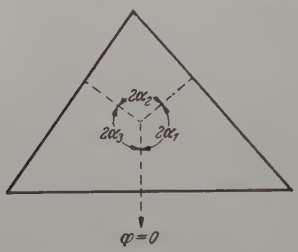


Fig. 1.

c) B_3 ist ein Dreieck, dessen Inkreismittelpunkt O von den Dreiecksseiten den Abstand d hat; bilden die Lote von O aus auf die Seiten miteinander die Winkel $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$ (Fig. 1), und wählt man die eine Lotrichtung als Nullrichtung $\varphi = 0$, so ist

$$h_2(\varphi) = \begin{cases} d \cdot \dfrac{\cos(\varphi - \alpha_1)}{\cos \alpha_1}, & 0 \leqq \varphi \leqq 2\alpha_1, \\ d \cdot \dfrac{\cos(2\alpha_1 + \alpha_2 - \varphi)}{\cos \alpha_2}, & 2\alpha_1 \leqq \varphi \leqq 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ -d \cdot \dfrac{\cos(\varphi - \alpha_1 - \alpha_3)}{\cos \alpha_3}, & 2\pi - 2\alpha_3 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \end{cases}$$

und die Fourierentwicklung dieser Funktion lautet:

$$h_2(\varphi) = \frac{d}{\pi} (\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3)$$

$$- \frac{d}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu^2 - 1} \cdot \{(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_3) + (\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2) \cos 2\nu\alpha_1 + (\tan\alpha_2 + \tan\alpha_3) \cos 2\nu\alpha_3\}$$

$$+ \frac{d}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu^2 - 1} \cdot \{-(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2) \sin 2\nu\alpha_1 + (\tan\alpha_2 + \tan\alpha_3) \sin 2\nu\alpha_3\},$$

wobei die Koeffizienten für $\nu = 1$ nach der L'Hôpitalschen Regel zu berechnen sind. Demnach ist:

$$(2.7)\quad F_{12} = \frac{d}{2}(\tan\alpha_2 + \tan\alpha_3)\cdot\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\nu\alpha_3 - b_\nu \sin 2\nu\alpha_3)\right\}$$

$$+ \frac{d}{2}(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_3)\cdot\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\right\}$$

$$+ \frac{d}{2}(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2)\cdot\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\nu\alpha_1 + b_\nu \sin 2\nu\alpha_1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(s_1 d_1 + s_2 d_2 + s_3 d_3),$$

wenn

$$s_1 = d(\tan\alpha_2 + \tan\alpha_3), \quad s_2 = d(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_3),$$
$$s_3 = d(\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2)$$

die Längen der Dreiecksseiten, d_1, d_2, d_3 die Abstände der diesen gleichgerichteten Stützgeraden des Bereiches B_1 von O bezeichnen. Für konvexe B_1 ist das Ergebnis auch geometrisch leicht abzuleiten. Hingegen wird

$$F'_{12} = -\tfrac{1}{2}(s_1 d'_1 + s_2 d'_2 + s_3 d'_3),$$

wenn d'_1, d'_2, d'_3 die Abstände der andern, den Dreiecksseiten parallelen Stützgeraden bzw. Tangenten von O bezeichnen.

3. Lineare Scharen stützbarer Bereiche.

Zur Stützfunktion $-h(\varphi)$ gehört ein Bereich $-B$, dessen Bild aus B durch Spiegelung am Nullpunkte entsteht. Unter $\lambda \cdot B$ bei skalarem λ ist dann der zur Stützfunktion $\lambda \cdot h(\varphi)$ gehörige Bereich zu verstehen, der bei positivem λ aus B, bei negativem λ aus $-B$ durch ähnliche Vergrößerung im Verhältnis $|\lambda|$ entsteht. Damit ist auch in allen Fällen erklärt, was unter dem Bereich $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ zu begreifen ist. Aus der Fourierentwicklung (1.4) liest man sofort ab, *daß sich jeder stützbare Bereich als Summe bzw. Differenz eines Mittelpunktsbereiches und eines Bereiches konstanter Breite darstellen läßt.*

Es gilt ein wichtigerer Satz: *Jeder stützbare Bereich mit zweimal stetig differenzierbarer Stützfunktion läßt sich als Differenz zweier konvexer Bereiche darstellen.* (Die Differenzierbarkeitsannahme, die nur wegen der Vereinfachung des Beweises erfolgt, kann gelockert werden.)

Ist nämlich $h(\varphi)$ die Stützfunktion von B, so ist der Krümmungsradius der Randkurve

$$r(\varphi) = h(\varphi) + h''(\varphi);$$

zu vorgegebenem $r(\varphi)$ gehört dann und nur dann ein periodisches $h(\varphi)$, wenn

$$\int_0^{2\pi} r(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} r(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

ist, wie man sofort durch Einsetzen von (1.4) bestätigt. Ist $r(\varphi)$ dauernd eines Zeichens, so ist der Bereich konvex. Wechselt $r(\varphi)$ sein Zeichen, so sei

$$r(\varphi) = r_1(\varphi) - r_2(\varphi)$$

eine Zerlegung, in der $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ periodische positive Funktionen von φ bezeichnen; ist dann

$$\int_0^{2\pi} r_1(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} r_2(\varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \alpha,$$

$$\int_0^{2\pi} r_1(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} r_2(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \beta,$$

so ersetze man $r_1(\varphi)$ und $r_2(\varphi)$ durch

$$r_1^*(\varphi) = r_1(\varphi) + c - \frac{\alpha}{\pi} \cos \varphi - \frac{\beta}{\pi} \sin \varphi,$$

$$r_2^*(\varphi) = r_2(\varphi) + c - \frac{\alpha}{\pi} \cos \varphi - \frac{\beta}{\pi} \sin \varphi,$$

mit beliebiger Konstanten $c > \frac{1}{\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; dann kennzeichnen $r_1^*(\varphi)$ und $r_2^*(\varphi)$ zwei konvexe Bereiche mit den Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$, derart, daß $h(\varphi) = h_1(\varphi) - h_2(\varphi)$ wird.

Dieser Satz zeigt, daß die Einführung der stützbaren Bereiche notwendig und ausreichend ist, wenn man die unbeschränkte Addition und Subtraktion konvexer Bereiche zulassen will.

Sind zwei stützbare Bereiche B_1 und B_2 vorgegeben, so werden wir die Linearschar von Bereichen

$$B(\lambda) = (1 - \lambda) B_1 + \lambda B_2$$

betrachten; sie läßt sich etwa in der Weise geometrisch veranschaulichen, daß man über der x_1, x_2-Ebene, die den Bereich B_1 trägt, λ als dritte Koordinate aufträgt, in der Ebene $\lambda = 1$ bei Beibehaltung der x_1 und x_2 Richtungen und Wahl des Durchstoßpunktes mit der λ-Achse als Anfangspunkt den Bereich B_2 zeichnet und die zu gleichem φ gehörigen, also parallelen Stützgeraden durch eine Ebene verbindet. Die entstehenden ∞^1 Ebenen hüllen eine Torse T ein, deren Erzeugenden die Verbindungsgeraden derjenigen Randpunkte von B_1 und B_2 sind, die zu gleichen Parameterwerten φ gehören. Der Schnitt von T in der Höhe λ liefert den Bereich $B(\lambda)$. Selbstverständlich ändert sich die Torse, wenn man einen der beiden Bereiche durch seine zweite Stützfunktion kennzeichnet

Sind B_1 und B_2 konvex, so sind bei richtiger Wahl der Stützfunktionen auch alle Bereiche $B(\lambda)$ für $0 \leqq \lambda \leqq 1$ konvex und haben positiven Flächeninhalt. Hat $B(\lambda_1)$ positiven, $B(\lambda_2)$ negativen Flächeninhalt, so muß es zwischen λ_1 und λ_2 Bereiche der Linearschar geben, die sich selbst überschlagen, d. h. T muß sich dort selbst durchdringen. Dies bleibt auch in dem Grenzfalle richtig, daß T ein Kegel mit der Spitze zwischen λ_1 und λ_2 ist, was nur dann eintritt, wenn B_1 und B_2 ähnlich und ähnlich gelegen (homothetisch) sind. Zur Veranschaulichung ist Fig. 2 gezeichnet, in der B_1 ein Kreis, B_2 eine gleichbreite

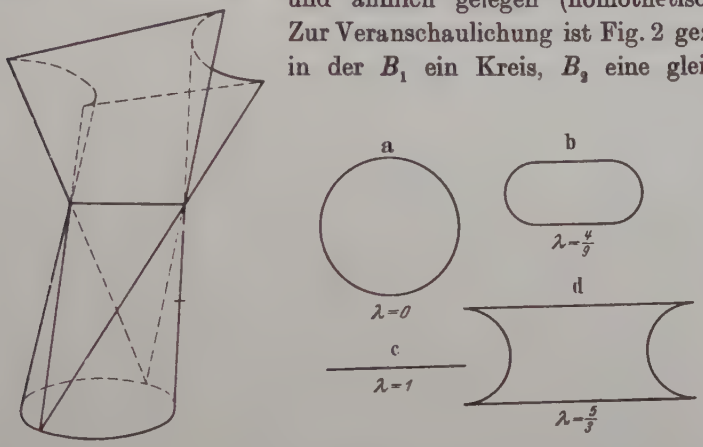


Fig. 2.

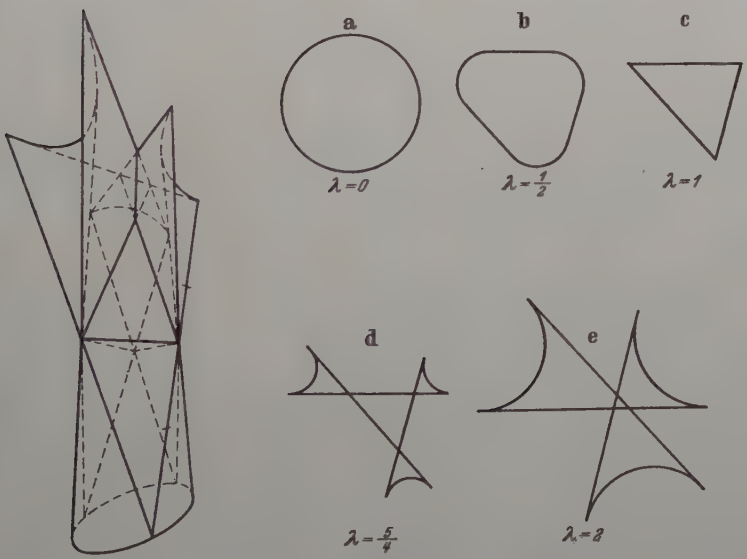


Fig. 3.

Strecke ist; es sind die zu $\lambda = {}^4/_9$ und $\lambda = {}^5/_3$ gehörigen Bereiche der Linearschar besonders gezeichnet. Fig. 3 gibt die Torse unter der Annahme, daß B_1 ein Kreis und B_2 ein diesem eingeschriebenes Dreieck seien; die zu $\lambda = {}^1/_2, {}^5/_4, 2$ gehörigen Bereiche der Linearschar verdeutlichen die Durchdringung.

4. Der Flächeninhalt in einer Linearschar.

Es ist der Flächeninhalt von $B(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \lambda^2 (F_{11} - 2F_{12} + F_{22}) - 2\lambda (F_{11} - F_{12}) + F_{11}. \tag{4.1}$$

$F(\lambda)$ als Funktion von λ aufgetragen, stellt eine Parabel dar, die nach oben oder unten geöffnet ist, je nachdem der Faktor von λ^2 positiv oder negativ ist. Betrachten wir dasjenige Werteintervall J von λ, in dem $F(\lambda) \geqq 0$ gilt, so ist daselbst $F(\lambda)$ im ersten Falle konvexe, im zweiten konkave Funktion von λ; außerhalb J liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Im Hinblick auf eine Verschärfung des Brunn-Minkowskischen Satzes stellen wir die Frage, wann $F(\lambda)$ in J konkave Funktion von λ ist, d. h. wann

$$F_{11} - 2F_{12} + F_{22} \leqq 0; \tag{4.2}$$

$$-\tfrac{1}{2}(a_0 - c_0)^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)\{(a_\nu - c_\nu)^2 + (b_\nu - d_\nu)^2\} \geqq 0$$

gilt. Wir behaupten folgenden Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, daß $F(\lambda)$ im Bereiche positiver Werte konkave Funktion von λ sei, ist das Vorhandensein eines stützbaren, nicht punktförmigen Bereiches B_3 mit nichtnegativem Flächeninhalt, für den

$$F_{13} = F_{23} \tag{4.3}$$

gilt.

Notwendig. Denn ist (4. 2) als Ungleichung erfüllt und reicht J von λ_1 bis λ_2, so liegt der Scheitel der oben bezeichneten Parabel in der Stelle

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{F_{11} - F_{12}}{F_{11} - 2F_{12} + F_{22}},$$

und es ist

$$B_3 = B(\lambda_0) = \frac{1}{F_{11} - 2F_{12} + F_{22}} \cdot \{(F_{22} - F_{12}) B_1 + (F_{11} - F_{12}) B_2\}$$

ein solcher Bereich, für den

$$F_{13} = F_{23} = \frac{F_{11}F_{22} - F_{12}^2}{F_{11} - 2F_{12} + F_{22}},$$

sowie $F(\lambda_0) \geqq 0$ gilt. Steht in (4. 2) das Gleichheitszeichen, so ist $B_3 = B_1 - B_2$ ein Bereich von der verlangten Art.

Hinreichend. Denn ist

$$h_3(\varphi) = \tfrac{1}{2} e_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (e_\nu \cos \nu\varphi + f_\nu \sin \nu\varphi)$$

die Stützfunktion von B_3, so ist nach Voraussetzung:

$$\frac{2}{\pi} F_{33} = \frac{1}{2} e_0^2 - \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(e_\nu^2 + f_\nu^2) \geqq 0,$$

$$\frac{2}{\pi}(F_{13} - F_{23}) = \frac{1}{2}(a_0 - c_0) e_0 - \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)\{(a_\nu - c_\nu) e_\nu + (b_\nu - d_\nu) f_\nu\} = 0,$$

also:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(a_0 - c_0)^2 e_0^2 = {} & \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)\{(a_\mu - c_\mu)^2 + (b_\mu - d_\mu)^2\}\{e_\nu^2 + f_\nu^2\} \\
& + \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)\{(a_\nu - c_\nu)^2 + (b_\nu - d_\nu)^2\}\{e_\mu^2 + f_\mu^2\} \\
& - \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)[\{(a_\nu - c_\nu) e_\mu - (a_\mu - c_\mu) e_\nu\}^2 \\
& + \{(a_\nu - c_\nu) f_\mu - (b_\mu - d_\mu) e_\nu\}^2 + \{(a_\mu - c_\mu) f_\nu - (b_\nu - d_\nu) e_\mu\}^2 \\
& + \{(b_\nu - d_\nu) f_\mu - (b_\mu - d_\mu) f_\nu\}^2] \\
\geqq {} & (a_0 - c_0)^2 \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(e_\nu^2 + f_\nu^2),
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& [-\tfrac{1}{2}(a_0 - c_0)^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)\{(a_\nu - c_\nu)^2 + (b_\nu - d_\nu)^2\}] \cdot \sum_{\mu=2}^{\infty} (\mu^2 - 1)(e_\mu^2 + f_\mu^2) \\
& \geqq \tfrac{1}{2} \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\mu^2 - 1)(\nu^2 - 1)[\{(a_\nu - c_\nu) e_\mu - (a_\mu - c_\mu) e_\nu\}^2 \\
& \quad + 2\{(a_\mu - c_\mu) f_\nu - (b_\nu - d_\nu) e_\mu\}^2 + \{(b_\nu - d_\nu) f_\mu - (b_\mu - d_\mu) f_\nu\}^2] \geqq 0.
\end{aligned}$$

Man erkennt aus dem vorhergehenden, daß in (4.2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn entweder $F_{33} > 0$ und gleichzeitig $a_\nu - c_\nu = b_\nu - d_\nu$ ($\nu = 0, 2, 3, \ldots$) ist, d. h. B_1 und B_2 bis auf eine Parallelverschiebung gleich sind, oder $F_{33} = 0$ ist und dann

$$B_1 = B_2 + t \cdot B_3 + B_4 \tag{4.4}$$

ist, worin t einen beliebigen Skalar, B_4 einen beliebigen stützbaren Bereich mit den Eigenschaften $F_{44} = 0$ und $F_{34} = 0$ bezeichnet.

Nach den Ergebnissen der Nr. 2 ist demnach $F(\lambda) \geqq 0$ eine konkave Funktion von λ, wenn beispielsweise

a) $a_0 = c_0$, d. h. $L_1 = L_2$, insbesondere bei konvexen Bereichen der Umfang gleich ist;

b) für eine bestimmte Richtung α: $b_1(\alpha) = b_2(\alpha)$ gilt, d. h. die Breite der Linearschar in dieser Richtung konstant ist; insbesondere bei konvexen Bereichen, die sich nach geeigneter Parallelverschiebung in den gleichen Parallelstreifen einbetten lassen.

c) B_1 und B_2 irgend zwei kongruente gleichgerichtete Stützgeradendreiecke besitzen, insbesondere bei konvexen Bereichen, die sich nach Parallelverschiebung in ein gleiches umschriebenes Dreieck betten lassen.

Die Figuren 2 und 3, in denen der zweite bzw. dritte Fall erfüllt ist, veranschaulichen an der Torse T den Grund, warum der Flächeninhalt der Querschnitte für große λ infolge des Überschlagens negativ geworden ist, d. h. (4. 2) gilt.

Ist nun B_3 ein beliebiger stützbarer Bereich mit $F_{33} \geqq 0$, so erfüllen die Bereiche B_1 und $\frac{F_{13}}{F_{23}} \cdot B_2$ die Voraussetzung (4. 3), und daher folgt aus (4. 2) die Ungleichung

$$\frac{F_{11}}{F_{13}^2} - 2\frac{F_{12}}{F_{13}F_{23}} + \frac{F_{22}}{F_{23}^2} \leqq 0, \tag{4.5}$$

die für beliebige stützbare Bereiche B_1 und B_2 gilt und eine für konvexe Bereiche bekannte Ungleichung auf stützbare Bereiche verallgemeinert; in ihr gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn entweder $F_{33} > 0$ und B_1, B_2 zueinander homothetisch sind, oder $F_{33} = 0$ ist und mit der Bezeichnung von (4. 4)

$$B_1 = \frac{F_{13}}{F_{23}} \cdot B_2 + t \cdot B_3 + B_4$$

gilt.

Wenn mindestens einer der Bereiche B_1 und B_2 nichtnegativen Flächeninhalt hat, muß darnach die quadratische Form

$$F_{11} - 2tF_{12} + t^2 F_{22}$$

ndefinit sein, also

$$F_{12}^2 \geqq F_{11}F_{22} \tag{4.6}$$

gelten, d. h. es gilt eine *Erweiterung des Brunn-Minkowskischen Satzes, derzufolge die Größe $\sqrt{F(\lambda)}$, solange sie reell ist, in jeder Linearschar stützbarer Bereiche eine konkave Funktion von λ ist.* (4. 5) zeigt, daß in einer Linearschar, die Bereiche positiven Inhalts besitzt, das Gleichheitszeichen in (4. 6) nur dann auftreten kann, wenn alle ihre Bereiche zueinander homothetisch sind. Die Torse T muß sich dann, insbesondere bei Zugrundelegung konvexer Bereiche B_1 und B_2, überschlagen.

5. Stützbare Flächen.

Die für ebene Bereiche entwickelten Begriffe lassen sich ohne Schwierigkeit auf höhere Dimensionen übertragen. Insbesondere heißt eine geschlossene Fläche im Raume stützbar, wenn sie in jedem Punkte genau eine und zu jeder Richtung genau zwei senkrechte Tangential-

ebenen besitzt; sie wird dann durch ihre Stützfunktion $h(\theta, \varphi)$ beschrieben, die den Abstand der zum Vektor

$$\alpha = (\sin\theta\cos\varphi;\ \sin\theta\sin\varphi;\ \cos\theta), \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi,\quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

senkrechten Tangentialebene vom Anfangspunkt O, in Richtung α gemessen, angibt. Führt man noch die Vektoren

$$\beta = (\cos\theta\cos\varphi;\ \cos\theta\sin\varphi;\ -\sin\theta),$$
$$\gamma = (\ -\sin\varphi;\ \cos\varphi;\ 0)$$

ein, so hat die Fläche, falls $h(\theta, \varphi)$ stetig differenzierbar ist, die Gleichung

$$\mathfrak{x} = h\alpha + \frac{\partial h}{\partial\theta}\beta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial h}{\partial\varphi}\gamma. \tag{5.1}$$

Man gewinnt daraus die Formel für die Gesamtoberfläche

$$O = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h\left\{2h + \operatorname{cotang}\theta\,\frac{\partial h}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 h}{\partial\varphi^2}\right\}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{5.2}$$

und diejenige für das Oberflächenintegral der mittleren Krümmung, das der Größe L des ebenen Falles an die Seite tritt,

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \tag{5.3}$$

Durch die Darstellung in den Parametern θ, φ sind die Punkte der Fläche den Punkten der Einheitskugel zugeordnet; es können dann auf ihr Gebiete auftreten, in denen dem positiven Drehsinn auf der Kugel der negative Drehsinn auf der Fläche entspricht, diese Gebiete liefern zu O negative Beiträge.

Den Fourierentwicklungen entsprechen jetzt solche nach Kugelfunktionen. Setzt man

$$X_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n}(a_{n,m}\cos m\varphi + b_{n,m}\sin m\varphi)\cdot P_{n,m}(\cos\theta), \tag{5.4}$$

worin $P_{n,m}(x)$ die zum Legendreschen Polynom $P_n(x)$ zugeordnete Legendresche Funktion m-ter Ordnung bezeichnet, so gelten folgende Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_k(\theta, \varphi)\,X_n(\theta, \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0, \qquad k \neq n \tag{5.5}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_n(\theta, \varphi)^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = A_n$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1}a_{n,0}^2 + \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(a_{n,m}^2 + b_{n,m}^2),$$

und die $X_n(\theta, \varphi)$ erfüllen die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \theta^2} + \operatorname{cotang}\theta \frac{\partial X_n}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1)X_n = 0. \tag{5.6}$$

Entwickelt man $h(\theta, \varphi)$ in der Form

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\theta, \varphi), \tag{5.7}$$

so lassen sich O und M durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken:

$$O = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{2 - n(n+1)\}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_k(\theta, \varphi) X_n(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{5.8}$$

$$= A_0 - \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1) - 2\} A_n;$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_n(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{5.9}$$

$$= 4\pi a_{0,0}.$$

Da

$$A_0 = 4\pi a_{0,0}^2$$

ist, liest man sofort die Ungleichung ab

$$M^2 \geqq 4\pi O, \tag{5.10}$$

die der Ungleichung (1.6) des ebenen Falles an die Seite tritt und nur dann zur Gleichung wird, wenn

$$a_{n,m} = b_{n,m} = 0, \qquad (n \geqq 2,\ m = 0, 1, \ldots, n)$$

also

$$h(\theta, \varphi) = a_{0,0} + a_{1,0}\cos\theta + (a_{1,1}\cos\varphi + b_{1,1}\sin\varphi)\sin\theta$$

ist. Dies ist aber die Stützfunktion einer Kugel vom Radius $a_{0,0}$ um den Mittelpunkt $a_{1,1}$, $b_{1,1}$, $a_{1,0}$. Also gilt in (5.10) das Gleichheitszeichen nur für Kugel und Punkt. Überhaupt ist $X_1(\theta, \varphi)$ die Stützfunktion eines Punktes, nämlich $a_{1,1}, b_{1,1}, a_{1,0}$; $X_0(\theta, \varphi)$ diejenige einer Kugel um O mit dem Radius $a_{0,0}$. Auf diesem Wege wurde (5.10) von Hurwitz bewiesen[1]).

6. Die Oberfläche in einer Linearschar.

Sind K_1 und K_2 zwei stützbare Flächen, die zu den Stützfunktionen

$$h_1(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(1)}(\theta, \varphi); \qquad h_2(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(2)}(\theta, \varphi)$$

gehören, so versteht man unter der Fläche $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$ die zur Stützfunktion $\lambda_1 h_1(\theta, \varphi) + \lambda_2 h_2(\theta, \varphi)$ gehörige stützbare Fläche. Da nach

[1]) Werke I, 553.

(5.2) und (5.3) M linear, O quadratisch homogen in bezug auf h ist, müssen sich M und O für die Summenfläche $K_1 + K_2$ folgendermaßen zusammensetzen:

$$M = M_1 + M_2; \quad O = O_{11} + 2O_{12} + O_{22}, \tag{6.1}$$

wenn O_{11}, O_{22}, M_1, M_2 die nach (5.2) bzw. (5.3) zu bildenden Größen für K_1 und K_2 bezeichnen.

$$O_{12} = \frac{1}{4}\Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h_1 \cdot \Big\{2h_2 + \operatorname{cotang}\theta\,\frac{\partial h_2}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 h_2}{\partial\varphi^2}\Big\}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} h_2 \cdot \Big\{2h_1 + \operatorname{cotang}\theta\,\frac{\partial h_1}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 h_1}{\partial\varphi^2}\Big\}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{6.2}$$

heißt dann die gemischte Oberfläche von K_1 und K_2. Sind $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ die in $X_n^{(1)}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ die in $X_n^{(2)}$ auftretenden Entwicklungskoeffizienten, so gelten die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_k^{(1)}(\theta,\varphi)\,X_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0, \quad (k \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_n^{(1)}(\theta,\varphi)\,X_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = A_n'$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1}\,a_{n,0}c_{n,0} + \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,(a_{n,m}c_{n,m} + b_{n,m}d_{n,m}),$$

und daher lautet der Ausdruck von O_{12} in den Entwicklungskoeffizienten:

$$O_{12} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{4 - k(k+1) - n(n+1)\} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} X_k^{(1)}(\theta,\varphi)\,X_n^{(2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{6.3}$$

$$= A_0' - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1) - 2\}\,A_n'.$$

Das Fehlen der Summanden für $n = 1$ in den Gleichungen (5.8) und (6.3) bedeutet die Unempfindlichkeit dieser Begriffe gegenüber der Addition eines Punktes, d. h. der Parallelverschiebung der Flächen.

Die gemischte Oberfläche zwischen einer konvexen Fläche K und einer Kugel vom Radius a ist nach (6.3)

$$O_{12} = 4\pi a_{00}a = Ma; \tag{6.4}$$

geometrisch bedeutet diese Addition den Übergang zur Parallelfläche von K im Abstande a. Der Addition einer Strecke der Länge $2l$ in Richtung des Vektors α entspricht eine teleskopische Verlängerung von K in der genannten Richtung; die gemischte Oberfläche dieser Strecke mit K ist dann

$$O_{12} = l \cdot u(\alpha), \tag{6.5}$$

wenn $u(\alpha)$ den Umfang der Projektion von K in Richtung α bezeichnet.

Bildet man aus K_1 und K_2 die Linearschar $K(\lambda) = (1-\lambda)K_1 + \lambda K_2$, in der λ alle reellen Werte durchläuft, so wird die Oberfläche

$$O(\lambda) = \lambda^2 (O_{11} - 2O_{12} + O_{22}) - 2\lambda (O_{11} - O_{12}) + O_{11} \tag{6.6}$$

im Gebiete positiver Werte eine konkave oder konvexe Funktion von λ sein, je nachdem

$$O_{11} - 2O_{12} + O_{22} \lesseqgtr 0 \tag{6.7}$$

oder die entgegengesetzte Ungleichung gilt. Wir untersuchen wiederum die Möglichkeit der Konkavität von $O(\lambda)$. Setzt man noch

$$A_n'' = \frac{4\pi}{2n+1} c_{n,0}^2 + \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (c_{n,m}^2 + d_{n,m}^2),$$

so ist die Ungleichung (6.7) gleichbedeutend mit

$$-(A_0 - 2A_0' + A_0'') + \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) - 2\} \{A_n - 2A_n' + A_n''\} \gtreqless 0, \tag{6.8}$$

oder unter Verwendung der Abkürzung

$$B_n = A_n - 2A_n' + A_n'' = \frac{4\pi}{2n+1} (a_{n,0} - c_{n,0})^2$$

$$+ \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \{(a_{n,m} - c_{n,m})^2 + (b_{n,m} - d_{n,m})^2\}$$

gleichbedeutend mit

$$-B_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) - 2\} B_n \gtreqless 0. \tag{6.9}$$

Entsprechend dem früher bewiesenen Satze behaupten wir nun:

Notwendig und hinreichend dafür, daß $O(\lambda)$ im Bereiche positiver Werte eine konkave Funktion des Scharparameters λ sei, ist das Vorhandensein einer stützbaren nicht punktförmigen Fläche K_3 mit nichtnegativer Oberfläche, die die Gleichung

$$O_{13} = O_{23} \tag{6.10}$$

erfüllt.

Das „notwendig" beweist man wie im ebenen Falle; es bleibt also nur das „hinreichend" aufzuzeigen. Es sei

$$h_3(\vartheta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(3)}(\vartheta,\varphi)$$

die Stützfunktion von K_3, und $e_{n,m}$, $f_{n,m}$ seien die Entwicklungskoeffizienten in $X_n^{(3)}$. Verwendet man die Abkürzungen

$$C_n = \frac{4\pi}{2n+1} e_{n,0}^2 + \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (e_{n,m}^2 + f_{n,m}^2),$$

$$B_n' = \frac{4\pi}{2n+1} (a_{n,0} - c_{n,0}) e_{n,0}$$

$$+ \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \{(a_{n,m} - c_{n,m}) e_{n,m} + (b_{n,m} - d_{n,m}) f_{n,m}\},$$

so besagen die Voraussetzungen, daß

$$C_0 - \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) - 2\} C_n \geqq 0,$$

$$B_0' - \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) - 2\} B_n' = 0$$

sein soll. Dann ist auch

$$B_0'^2 = B_0 C_0 = \tfrac{1}{4} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \{k(k+1) - 2\} \{n(n+1) - 2\} B_k' B_n';$$

andererseits ergibt eine leichte algebraische Umformung

$$B_k' B_n' = \tfrac{1}{2}(B_k C_n + B_n C_k) - \tfrac{1}{2} D_{nk},$$

worin

$$D_{nk} = \left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2 \sum_{l=0}^{k} \sum_{m=0}^{n} [\{(a_{n,m} - c_{n,m}) e_{k,l} - (a_{k,l} - c_{k,l}) e_{n,m}\}^2$$
$$+ \{(a_{n,m} - c_{n,m}) f_{k,l} - (b_{k,l} - d_{k,l}) e_{n,m}\}^2$$
$$+ \{(a_{k,l} - c_{k,l}) f_{n,m} - (b_{n,m} - d_{n,m}) e_{k,l}\}^2$$
$$+ \{(b_{n,m} - d_{n,m}) f_{k,l} - (b_{k,l} - d_{k,l}) f_{n,m}\}^2]$$

sicherlich nichtnegativ ist. In der letzten Summe hat man sich bei der Ausführung jede mit einem Zeiger Null versehene Größe mit $\sqrt{2}$ multipliziert zu denken und $b_{k,0} = d_{k,0} = f_{k,0} = 0$ für alle k zu setzen. Daher folgt weiter

$$B_0 C_0 = \tfrac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \{k(k+1) - 2\} \{n(n+1) - 2\} (B_k C_n - \tfrac{1}{2} D_{nk})$$

$$\geqq \tfrac{1}{2} B_0 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \{n(n+1) - 2\} C_n,$$

mithin

$$[-B_0+\tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\{k(k+1)-\{2B_k]\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1)-2\}C_n$$

$$\geqq \tfrac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\{k(k+1)-2\}\{n(n+1)-2\}D_{nk}\geqq 0,$$

woraus sofort (6.9) folgt. Die Erläuterungen über das Eintreten des Gleichheitszeichens sind zu denen des ebenen Falles gleichlaufend.

Sind daher K_1 und K_2 beliebige stützbare Flächen, K_3 eine solche mit nichtnegativer Oberfläche, so gilt die Ungleichung

$$\frac{O_{11}}{O_{13}^2}-2\frac{O_{12}}{O_{13}O_{23}}+\frac{O_{22}}{O_{23}^2}\leqq 0, \tag{6.11}$$

aus der die Übertragung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung auf Oberflächen stützbarer Flächen:

$$O_{12}^2\geqq O_{11}O_{22} \tag{6.12}$$

mit der zum ebenen Falle parallelen Diskussion folgt.

In diesem Ergebnis sind eine Reihe bekannter Spezialfälle eingeschlossen: Die Oberfläche einer Linearschar konvexer Flächen mit gleichem Integral der mittleren Krümmung oder gleichem Umfang in einer Richtung ist konkave Funktion des Scharparameters. *Die Quadratwurzel aus der Oberfläche in einer linearen Schar stützbarer Flächen, ist, solange sie reell ist, eine konkave Funktion des Scharparameters.*

(Eingegangen am 10. Juli 1936.)

Über eine Erweiterung des kleinen Fermatschen Satzes.

Von

Alfred Brauer in Berlin.

Ist $a_{01}, a_{02}, \ldots$ eine Zahlenfolge, so verstehe man unter den Derivierten erster Ordnung a_{1n} dieser Folge in bezug auf die von Null verschiedene Größe k die Zahlen

$$a_{1n} = \frac{a_{0,n+1} - a_{0n}}{k^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Derivierten höherer Ordnung seien definiert durch

$$a_{mn} = \frac{a_{m-1,n+1} - a_{m-1,n}}{k^n} \qquad (m = 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Ist p eine Primzahl und a eine zu p teilerfremde Zahl, so folgt aus dem Fermatschen Satz, daß die Derivierten erster Ordnung in bezug auf p der Zahlenfolge

$$a, a^p, a^{p^2}, \ldots \tag{1}$$

sämtlich ganze Zahlen sind. Herr I. Schur[1]) hat dies folgendermaßen erweitert:

Satz I: *Die Derivierten der Ordnungen* $1, 2, \ldots, p-1$ *der Zahlenfolge* (1) *sind sämtlich ganze Zahlen.*

Satz II: *Setzt man* $a^p = a + a_{11}p$, *so sind für* $a_{11} \equiv 0 \pmod p$ *die Derivierten aller Ordnungen ganze, durch* p *teilbare Zahlen. Ist aber* $(a_{11}, p) = 1$, *so sind für* $p = 2$ *die Derivierten* $a_{m+1,1}$ *reduzierte Brüche mit dem Nenner* 2^m, *die übrigen Derivierten sind ganze gerade Zahlen; für ungerades* p *sind die Derivierten der Ordnung* p *sämtlich reduzierte Brüche mit dem Nenner* p.

Herr Schur erhält diese Sätze auf Grund einer Hilfsbetrachtung über Gaußsche Polynome. Im folgenden soll für diese Resultate ein neuer Beweis gegeben werden. Statt des Satzes I beweise ich den etwas allgemeineren

Satz Ia: *Es seien* a *und* k *teilerfremde ganze rationale Zahlen,* a *gehöre* $\pmod k$ *zum Exponenten* l, *und es sei* l *ein Teiler von* $k-1$; *ferner sei* q *die kleinste in* k *aufgehende Primzahl. Dann sind die* $q-1$ *ersten Derivierten in bezug auf* k *der Zahlenfolge*

$$a, a^{\ }, a^{k^2}, \ldots$$

sämtlich ganze rationale Zahlen.

[1]) Ein Beitrag zur elementaren Zahlentheorie, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (1933), S. 145—151.

Ist k eine Primzahl, so liefert dies Satz I. Auch für zusammengesetzte Zahlen k kann die Voraussetzung für alle zu k teilerfremden Zahlen a erfüllt sein; z. B. gilt dies für $k = 3 \cdot 11 \cdot 17$, $k = 5 \cdot 13 \cdot 17$, $k = 5 \cdot 17 \cdot 29$, $k = 5 \cdot 29 \cdot 73$, usw. Analog läßt sich auch Satz II verallgemeinern.

Der Beweis wird auf Grund der folgenden Hilfssätze geführt, von denen der erste selbstverständlich ist.

Hilfssatz 1: *Die ganzen Zahlen u, v und k mögen der Gleichung $u^k = u + v\,k$ genügen, es sei $(u, k) = 1$; man setze*

$$c_\varrho = \frac{1}{k}\binom{k+1}{\varrho}. \tag{2}$$

Dann ist v durch u teilbar, und es gilt

$$u^{k^2} = (u + v\,k)^k = u^k\left(1 + \frac{v\,k}{u}\right)^k = \{u + v\,k\}\left\{\sum_{\varrho=0}^{k}\left(\frac{v}{u}\right)^\varrho\binom{k}{\varrho}k^\varrho\right\}$$

$$= u + v\,k + v\,k^2 + \sum_{\varrho=2}^{k+1}\frac{v^\varrho}{u^{\varrho-1}}\,c_\varrho\,k^{\varrho+1}.$$

Hilfssatz 2: *Es seien $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ und k ganze rationale Zahlen. Die Folgen ganzer rationaler Zahlen $a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mögen den Bedingungen*

$$a_{\mu,\nu+1} = a_{\mu\nu} + g_\mu\,a_{\mu+1,\nu}\,k^\nu \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{3}$$

genügen. Ferner sei für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$a_{m\nu} = f_{m0}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu}) + f_{m1}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})\,k^\nu + \ldots + f_{mr_m}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})\,k^{r_m\nu}, \tag{4}$$

wo die $f_{m\varrho}$ rationale Funktionen von $a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu}$ mit ganzen rationalen, von ν unabhängigen Koeffizienten sind. Die Nenner von $f_{m\varrho}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})$ in reduzierter Form seien für alle ν und $\varrho \leqq t-1$ $(t \geqq 1)$ zu k teilerfremd, in den übrigen Nennern möge jede der in k aufgehenden Primzahlen höchstens in derselben Potenz wie in k aufgehen; es sei d das Produkt dieser im Nenner von f_{mt} aufgehenden Primzahlpotenzen[2]). Dann sind die Derivierten erster Ordnung $a_{m+1,\nu}$ in bezug auf k der Folge (4) für $t > 1$ sämtlich ganze rationale Zahlen und für $t = 1$ reduzierte Brüche mit dem Nenner d.

---

[2]) Es ist zu beachten, daß man den Faktor d und die übrigen in den Nennern auftretenden Teiler von k nicht gegen $k^{\varrho\nu}$ fortheben darf, da vorausgesetzt wird, daß (4) eine Entwicklung nach Potenzen von k^ν ist und die Koeffizienten der $a_{\mu\nu}$ in $f_{m\varrho}$ von ν unabhängig sein sollen.

Beweis: Es soll zunächst gezeigt werden, daß für die $a_{m+1,\nu}$ eine zu (4) analoge Darstellung gilt. Da nämlich $t \geqq 1$ ist, ist der Nenner von $f_{m0}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})$ für alle ν zu k teilerfremd; daher folgt aus (3) und (4)

$$(5)\quad f_{m0}(a_{0,\nu+1}, a_{1,\nu+1}, \ldots, a_{m-1,\nu+1}) \equiv f_{m0}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu}) \pmod{k^\nu}\ ^{3}),$$

$$(6)\quad a_{m+1,\nu} = \frac{1}{k^\nu}(a_{m,\nu+1} - a_{m\nu})$$

$$= \frac{1}{k^\nu}\{f_{m0}(a_{0\nu} + g_0 a_{1\nu} k^\nu, \ldots, a_{m-1,\nu} + g_{m-1} a_{m\nu} k^\nu) - f_{m0}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})\}$$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{r_m} \{f_{m\varrho}(a_{0\nu} + g_0 a_{1\nu} k^\nu, \ldots, a_{m-1,\nu} + g_{m-1} a_{m\nu} k^\nu) k^{\varrho(\nu+1)-\nu} - f_{m\varrho}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu}) k^{\varrho\nu-\nu}\}.$$

Ordnet man in (6) nach steigenden Potenzen von k^ν, indem man die von ν unabhängigen Potenzen von k in die Koeffizienten von k^ν hineinzieht, so erhält man, da wegen (5) die Glieder mit $k^{-\nu}$ fortfallen, für $a_{m+1,\nu}$ eine Darstellung von der Form

$$(7)\quad a_{m+1,\nu} = f_{m+1,0}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m\nu}) + f_{m+1,1}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m\nu}) k^\nu + \ldots + f_{m+1,r_{m+1}}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m\nu}) k^{r_{m+1}\nu}.$$

Aus (6) folgt, daß hierbei die $f_{m+1,\varrho}$ als Summen rationaler Funktionen wieder rational sind; die Koeffizienten sind ganze rationale, von ν unabhängige Zahlen; die Nenner enthalten die in k aufgehenden Primzahlen höchstens in derselben Potenz wie k. Wegen (6) und (7) setzen sich die Koeffizienten $f_{m+1,\varrho}$ von $k^{\varrho\nu}$ für $\varrho \leqq t-2$ additiv aus Gliedern von $f_{m0}, f_{m1}, \ldots, f_{m,\varrho+1}$, deren Nenner zu k teilerfremd waren, zusammen. Daher sind die Nenner von $f_{m+1,\varrho}$ für $\varrho \leqq t-2$ ebenfalls zu k teilerfremd. Der Koeffizient $f_{m+1,t-1}$ von $k^{(t-1)\nu}$ setzt sich aus Gliedern von $f_{m0}, f_{m1}, \ldots, f_{m,t-1}$, ferner aus Gliedern von

$$f_{mt}(a_{0,\nu+1}, a_{1,\nu+1}, \ldots, a_{m-1,\nu+1}) k^t$$

und dem Summanden $-f_{mt}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})$ additiv zusammen, da hier in (6) auch $\varrho = t$ zu berücksichtigen ist. Das Produkt der im Nenner von f_{mt} aufgehenden Primfaktoren von k ist d; wegen $t \geqq 1$ hebt sich der Faktor d in $f_{mt} k^t$ fort. Daher hat in $f_{m+1,t-1}$ nur der Summand $-f_{mt}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})$ einen zu k nicht teilerfremden Nenner; das Produkt der im Nenner von $f_{m+1,t-1}$ aufgehenden Prim-

---

[3]) Die rationalen Zahlen $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_3}{z_4}$ mit zu k teilerfremden Nennern heißen kongruent (mod k), wenn $z_1 z_4 \equiv z_2 z_3 \pmod{k}$ ist.

faktoren ist also d. Endlich folgt aus der Definition der Derivierten, daß für $g_m = 1$

$$a_{m,\nu+1} = a_{m\nu} + g_m a_{m+1,\nu} k^\nu \tag{8}$$

gilt, also (3) auch für $\mu = m$ erfüllt ist.

Daher ist die Darstellung (7) analog zu (4). Der Faktor d im Nenner ist, roh gesprochen, hier bei der Bildung der Derivierten ein Glied nach links gerückt.

Nun können bei den Derivierten in bezug auf k der ganzen Zahlen $a_{m\nu}$ im Nenner höchstens Primfaktoren von k aufgehen. Aus (7) folgt, daß sich für $\varrho \geqq 1$ diese Primfaktoren gegen $k^{\varrho\nu}$ fortheben lassen. Ist also der Nenner von $f_{m+1,0}$ zu k teilerfremd, d. h. ist $t \geqq 2$, so sind die $a_{m+1,\nu}$ sämtlich ganze rationale Zahlen. Für $t = 1$ ist das Produkt der im Nenner von $f_{m+1,0}$ aufgehenden Primfaktoren von k gleich d, also sind die $a_{m+1,\nu}$ reduzierte Brüche mit dem Nenner d.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist $t > 1$, so sind wegen (3), (8) und (7) für die Zahlenfolge $a_{m+1,\nu}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 ebenfalls erfüllt; daher sind die Derivierten zweiter Ordnung der $a_{m\nu}$ in bezug auf k für $t > 2$ sämtlich ganz, für $t = 2$ reduzierte Brüche mit dem Nenner d. Daher ergibt sich induktiv:

Hilfssatz 3: *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes* 2 *sind die Derivierten der ersten* $t - 1$ *Ordnungen in bezug auf* k *der Zahlenfolge* (4) *sämtlich ganze rationale Zahlen, die der Ordnung* t *reduzierte Brüche mit dem Nenner* d. *Sind in* (4) *die Nenner aller* $f_{m\varrho}(a_{0\nu}, a_{1\nu}, \ldots, a_{m-1,\nu})$ *zu* k *teilerfremd, so sind die sämtlichen Derivierten in bezug auf* k *von* (4) *ganz und rational.*

Auf Grund dieser Hilfssätze ergibt sich nun leicht der Beweis des Satzes Ia:

Es gehöre also $a \pmod k$ zum Exponenten l, und es sei l ein Teiler von $k - 1$. Dann ist also $a^{k-1} \equiv 1 \pmod k$; durch Potenzieren erhält man hieraus induktiv für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$a^{k^{\nu-1}(k-1)} \equiv 1 \pmod{k^\nu}, \tag{9}$$

$$a^{k^\nu} \equiv a^{k^{\nu-1}} \pmod{k^\nu}. \tag{10}$$

Setzt man nun $a^{k^{\nu-1}} = a_{0\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots$, so hat die Zahlenfolge $a_{0\nu}$ wegen (10) die Form

$$a_{01} = a,\ a_{02} = a_{01} + a_{11}k,\ a_{03} = a_{02} + a_{12}k^2, \ldots, \tag{11}$$

$$a_{0,\nu+1} = a_{01} + a_{1\nu}k^\nu, \ldots,$$

wo die ersten Derivierten $a_{1\nu}$ in bezug auf k ganze rationale Zahlen sind. Man setze nun in Hilfssatz 1 für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$u = a_{0\nu}, \quad v = a_{1\nu} k^{\nu-1},$$

dann folgt wegen $a_{0\nu}^k = a_{0,\nu+1} = a_{0\nu} + a_{1\nu} k^\nu$

$$(12) \quad a_{0\nu} + a_{1\nu} k^\nu + a_{1,\nu+1} k^{\nu+1}$$
$$= a_{0,\nu+1} + a_{1,\nu+1} k^{\nu+1} = a_{0,\nu+2} = (a_{0\nu} + a_{1\nu} k^\nu)^k$$
$$= a_{0\nu} + a_{1\nu} k^\nu + a_{1\nu} k^{\nu+1} + \sum_{\varrho=2}^{k+1} \frac{a_{1\nu}^\varrho}{a_{0\nu}^{\varrho-1}} c_\varrho k^{\varrho\nu+1}.$$

Setzt man daher

$$(13) \quad a_{1,\nu+1} = a_{1\nu} + a_{2\nu} k^\nu,$$

so folgt aus (12)

$$(14) \quad a_{2\nu} = \sum_{\varrho=2}^{k+1} \frac{a_{1\nu}^\varrho}{a_{0\nu}^{\varrho-1}} c_\varrho k^{(\varrho-2)\nu}.$$

Wegen (11) ist $a_{0\nu} \equiv a \not\equiv 0 \pmod{k}$. Ist q der kleinste Primteiler von k, so folgt für $q = 2$ die Behauptung des Satzes aus (11). Für $q > 2$ sind $c_2, c_3, \ldots, c_{q-1}$ ganz und rational, da nach (2) $c_\varrho = \frac{1}{k}\binom{k+1}{\varrho}$ ist und $(q-1)!$ zu k teilerfremd, also $\binom{k+1}{\varrho} \equiv 0 \pmod{k}$ für $\varrho = 2, 3, \ldots, q-1$ ist. Der Nenner von c_q ist q, denn von den Zahlen $k+1$, k, $\ldots$, $k-q+2$ ist nur k durch q teilbar. In den übrigen c_ϱ treten als Nenner höchstens Teiler von k auf. Daher sind wegen (11), (13) und (14) die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 für $g_0 = g_1 = 1$, $m = 2$ und $t = q-2$ erfüllt. Folglich sind die $q-3$ ersten Derivierten der Folge $a_{2\nu}$, also die $q-1$ ersten Derivierten von $a_{0\nu}$ sämtlich ganze rationale Zahlen. Damit ist Satz Ia bewiesen.

Aus Hilfssatz 3 und (14) ergibt sich nun auch die folgende Verallgemeinerung von Satz II:

Satz IIa: *Es sei* $a^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$, $a \not\equiv \pm 1$; *man setze* $a^k = a + a_{11} k$. *Die Primzahlzerlegung von* k *sei* $k = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_r^{\beta_r}$ *mit* $q_1 < q_2 < \ldots < q_r$. *Es sei*

1. $$(a_{11}, k) = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_r^{\gamma_r} = Q_1,$$

wo alle $\gamma_\varrho > 0$ *sind. Dann sind die Derivierten* a_{mn} *aller Ordnungen in bezug auf* k *der Zahlenfolge*

$$(15) \quad a, a^k, a^{k^2}, \ldots$$

sämtlich ganze rationale, durch Q_1 *teilbare Zahlen. Es sei*

2. $$(a_{11}, k) = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_{s-1}^{\gamma_{s-1}} z = Q_2 z \qquad (s \leqq r),$$

wo $z \not\equiv 0 \pmod{q_s}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s-1} > 0$ *und entweder* k *ungerade oder* k *gerade und* $s > 1$ *ist. Dann sind die Derivierten der ersten* q_{s-1} *Ordnungen von* (15) *ganze rationale Zahlen, die der Ordnung* q_s *reduzierte Brüche mit dem Nenner* q_s.

3. *Es sei* $k \equiv 2 \pmod 4$, a_{11} *ungerade und*

$$(a_{11}, k) = q_2^{\gamma_2} q_3^{\gamma_3} \ldots q_r^{\gamma_r} = Q_3,$$

wo $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_r > 0$ *ist. Dann sind die Derivierten* a_{m1} *von* (15) *reduzierte Brüche mit dem Nenner* 2^{m-1}, *die übrigen Derivierten ganze durch* $2Q_3$ *teilbare Zahlen.*

4. *Es sei* k *gerade,* a_{11} *ungerade und* $a_{11} \not\equiv 0 \pmod{q_2 q_3 \ldots q_r}$. *Dann ist* a_{21} *ein Bruch mit dem Nenner* 2 *und* $a_{2\nu}$ *mit* $\nu > 1$ *ganz und rational.*

5. *Es sei* $k \equiv 0 \pmod 4$ *und* $a_{11} \not\equiv 0 \pmod 2$. *Dann sind die Derivierten zweiter Ordnung von* (15) *sämtlich reduzierte Brüche mit dem Nenner* 2.

Beweis: Man setze wieder $a^{k^{\nu-1}} = a_{0\nu}$. Da die Voraussetzungen des Satzes Ia erfüllt sind, folgt für ungerades k aus (13) für alle ν

$$a_{1,\nu+1} \equiv a_{1\nu} \pmod k, \tag{16}$$

da hier $a_{2\nu}$ wegen $q > 2$ ganz ist. Für gerades k ist wegen (11)

$$a_{0,\nu+2} = a_{0,\nu+1} + a_{1,\nu+1} k^{\nu+1} = a_{0,\nu+1}^k = (a_{0\nu} + a_{1\nu} k^\nu)^k. \tag{17}$$

Da nach (9) $a_{0\nu}^{k-1} \equiv a^{k^{\nu-1}(k-1)} \equiv 1 \pmod{k^\nu}$ ist, folgt aus (17)

$$\begin{aligned} a_{0,\nu+1} + a_{1,\nu+1} k^{\nu+1} &\equiv a_{0\nu}^k + k a_{0\nu}^{k-1} a_{1\nu} k^\nu + \binom{k}{2} a_{0\nu}^{k-2} a_{1\nu}^2 k^{2\nu} \\ &\equiv a_{0,\nu+1} + a_{1\nu} k^{\nu+1} + \binom{k}{2} a_{0\nu}^{k-2} a_{1\nu}^2 k^{2\nu} \pmod{k^{2\nu+1}}, \end{aligned}$$

$$a_{1,\nu+1} \equiv a_{1\nu} + \frac{k-1}{2} a_{0\nu}^{k-2} a_{1\nu}^2 k^\nu \pmod{k^\nu}. \tag{18}$$

Daher gilt für gerades k und gerades a_{11} die Kongruenz (16) ebenfalls für alle ν. Ist aber k gerade und a_{11} ungerade, so folgt aus (18)

$$a_{1,\nu+1} \equiv a_{1\nu} \equiv a_{11} + \frac{k}{2} \pmod k \qquad (\nu > 1). \tag{19}$$

Aus (16) bzw. (19) ergeben sich nun die Behauptungen in den einzelnen Fällen:

1. $(a_{11}, k) = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_r^{\gamma_r} = Q_1$, $\quad \gamma_\varrho > 0$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$.

Da hier (16) gilt, sind alle $a_{1\nu}$ durch Q_1 teilbar; man setze $a_{1\nu} = Q_1 a'_{1\nu}$. Aus (14) folgt

$$a'_{2\nu} = \frac{a_{2\nu}}{Q_1} = \sum_{\varrho=2}^{k+1} \frac{a'^{\varrho}_{1\nu} Q_1^{\varrho-1} c_\varrho}{a_{0\nu}^{\varrho-1}} k^{(\varrho-2)\nu}. \tag{20}$$

Nun ist $Q_1^{\varrho-1} c_\varrho$ für $\varrho = 2, 3, \ldots$ ganz und rational, da

$$c_\varrho = \frac{(k+1)(k-1)(k-2)\ldots(k-\varrho+2)}{\varrho!}$$

war und jeder Primteiler q_ϱ von k in $Q_1^{\varrho-1}$ mindestens in der Potenz $\varrho - 1$ und in $\varrho!$ höchstens in der Potenz $\frac{\varrho-1}{q_\varrho - 1}$ aufgeht. Da in den Nennern der Derivierten $a_{2\nu}$ von (15) höchstens Primteiler von k auftreten können, folgt wegen $(a_{0\nu}, k) = 1$ aus (20), daß alle $a'_{2\nu}$ ganze rationale Zahlen sind. Ferner sind in (20) für $a'_{2\nu}$ als Funktion von $a_{0\nu}$ und $a'_{1\nu}$ wegen $a_{0,\nu+1} = a_{0\nu} + Q_1 a'_{1\nu} k^\nu$ und $a'_{1,\nu+1} = a'_{1\nu} + a'_{2\nu} k^\nu$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 für $m = 2$, $g_0 = Q_1$ und $g_1 = 1$ erfüllt. Da in (20) in der Summe die Nenner sämtlich zu k teilerfremd waren, sind also alle Derivierten von $a'_{2\nu}$ ganze rationale Zahlen und folglich alle Derivierten von $a_{0\nu}$ durch Q_1 teilbare ganze rationale Zahlen.

2. $$(a_{11}, k) = q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_{s-1}^{\gamma_{s-1}} z = Q_2 z \qquad (s \leqq r),$$

wo $z \not\equiv 0 \pmod{q_s}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s-1} > 0$ und entweder k ungerade oder k gerade und $s > 1$ ist. Aus (16) folgt für alle ν, daß $a_{1\nu} \equiv 0 \pmod{Q_2}$, aber $a_{1\nu} \not\equiv 0 \pmod{q_s}$ ist; man setze $a_{2\nu} = Q_2 a'_{1\nu}$. Aus (14) folgt

$$a'_{2\nu} = \frac{a_{2\nu}}{Q_2} = \sum_{\varrho=2}^{k+1} \frac{a'^{\varrho}_{1\nu} Q_2^{\varrho-1} c_\varrho}{a_{0\nu}^{\varrho-1}} k^{(\varrho-2)\nu}. \tag{21}$$

Für $\sigma < s$ ist jeder Primteiler q_σ von k auch Teiler von Q_2; daher folgt analog wie im Falle 1., daß $Q_2^{\varrho-1} c_\varrho$ für $\varrho < q_s$ ganz und rational ist. Dagegen ist der Nenner von $a'^{q_s}_{1\nu} Q_2^{q_s-1} c_{q_s}$ gleich q_s, da $(a'^{q_s}_{1\nu} Q_2^{q_s-1}, q_s) = 1$ ist. Wegen $q_s > 2$ folgt aus (21), daß $a'_{2\nu}$ ganz ist. Nach Hilfssatz 2 für $m = 2$, $g_0 = Q_2$, $g_1 = 1$ und $t = q_s - 2$ sind also die Derivierten der ersten $q_s - 3$ Ordnungen von $a'_{2\nu}$, also auch von $a_{2\nu}$ ganze rationale Zahlen. Die Derivierten der Ordnung $q_s - 2$ von $a'_{2\nu}$ und wegen $(Q_2, q_s) = 1$ auch von $a_{2\nu}$, sind reduzierte Brüche mit dem Nenner q_s. Daher sind die Derivierten der ersten $q_s - 1$ Ordnungen von $a_{0\nu}$ ganz und rational, die der Ordnung q_s reduzierte Brüche mit dem Nenner q_s.

3. $k \equiv 2 \pmod 4$, $a_{11} \not\equiv 0 \pmod 2$ und $(a_{11}, k) = q_2^{\gamma_2} q_3^{\gamma_3} \ldots q_r^{\gamma_r} = Q_3$. Da a_{11} ungerade ist, folgt aus (14), daß a_{21} ein reduzierter Bruch mit dem Nenner 2 ist. Wegen (19) sind alle $a_{1\nu}$ mit $\nu > 1$ gerade und durch Q_3 teilbar. Da alle $a_{\mu\nu}$ mit $\nu \geqq 2$ von allen $a_{\mu'1}$ mit $\mu' \leqq \mu$ unabhängig sind, folgt analog wie im Falle 1., daß alle $a_{\mu\nu}$ mit $\mu > 0$ und $\nu \geqq 2$ ganze durch $2Q_3$ teilbare Zahlen sind. Ferner ergibt sich, daß hier in der Darstellung (14) von $a_{2\nu}$ die Nenner sämtlich zu $\frac{k}{2}$ teilerfremd sind. Hieraus folgt, analog wie beim Beweis der Hilfssätze 2 und 3,

daß die Derivierten in bezug auf k von $a_{2\nu}$, also insbesondere $a_{\mu+1,1}$ für $\mu \geqq 2$, sämtlich ganze Zahlen $\left(\mathrm{mod}\ \frac{k}{2}\right)$ sind. Also ist

$$a_{\mu 1} \equiv a_{\mu 2} \left(\mathrm{mod}\ \frac{k}{2}\right). \tag{22}$$

Andererseits war a_{21} ein reduzierter Bruch mit dem Nenner 2. Es sei nun schon bewiesen, daß $a_{\mu 1}$ für $\mu \leqq m-1$ ein reduzierter Bruch mit dem Nenner $2^{\mu-2}$ ist. Da $a_{m-1,2}$ eine ganze Zahl war, folgt aus (22), daß

$$a_{m1} = \frac{a_{m-1,2} - a_{m-1,1}}{k}$$

ein reduzierter Bruch mit dem Nenner 2^{m-1} ist.

4. Es sei $k \equiv 2 \pmod 4$, $a_{11} \not\equiv 0 \pmod 2$, $a_{11} \not\equiv 0 \pmod{q_2 q_3 \dots q_r}$. Aus (14) und (19) folgt wie im Falle 3, daß a_{21} ein reduzierter Bruch mit dem Nenner 2 und die $a_{2\nu}$ mit $\nu > 1$ ganz und rational sind.

5. Es sei $k \equiv 0 \pmod 4$, $a_{11} \not\equiv 0 \pmod 2$.

Aus (19) folgt, daß hier alle $a_{1\nu}$ ungerade, also nach (14) alle $a_{2\nu}$ reduzierte Brüche mit dem Nenner 2 sind.

In den Fällen 4. und 5. lassen sich auch noch etwas genauere Aussagen über die höheren Derivierten machen, je nachdem, welches der kleinste ungerade Primteiler von k ist, der nicht in a_{11} aufgeht; hierauf soll nicht näher eingegangen werden.

(Eingegangen am 5. August 1936.)

Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

§ 1.

Einleitung.

Ein Laplace-Integral

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\varphi(t)\,dt \tag{1.1}$$

bzw. ein Laplace-Stieltjes-Integral

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,d\Phi(t) \tag{1.2}$$

stellt bekanntlich in der Konvergenzhalbebene eine analytische Funktion, die Laplace-Transformierte von $\varphi(t)$ bzw. $\Phi(t)$ dar. Es verhält sich in dieser Beziehung wie sein Analogon für nichtkontinuierliche, äquidistante Summationsindizes, die Potenzreihe $\sum_0^\infty a_n z^n$, die im Konvergenzkreis bzw. in der Gestalt $\sum_0^\infty a_n e^{-nt}$ in der Konvergenzhalbebene eine analytische Funktion darstellt. Während aber jede in einem Kreis analytische Funktion auch umgekehrt in eine Potenzreihe entwickelbar ist, ist keineswegs jede in einer Halbebene analytische Funktion durch ein Laplace-Integral darstellbar. Das Problem, für welche Funktionen dies doch zutrifft, wird vermutlich wie bei den Dirichletschen Reihen (Bohrsche Theorie der fastperiodischen Funktionen) erst durch eine passende Verallgemeinerung des Laplace-Integrals eine funktionentheoretisch befriedigende Lösung finden[1]). Man wird daher vorläufig die Fragestellung so einengen, daß man eine gewisse *Klasse* von Funktionen $\varphi(t)$ bzw. $\Phi(t)$ zugrunde legt und die zu-

[1]) Nach Beendigung der vorliegenden Note erhielt ich Kenntnis von der kürzlich erschienenen Arbeit von Widder [1], in der (Theorem 7. 2) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit von $\psi(s)$ durch ein Integral der Form (1. 2) angegeben ist. Zur Formulierung der (explizit geschrieben ziemlich komplizierten) Bedingung wird der zuerst von E. L. Post 1930 eingeführte Operator

$$L_{k,t}[\psi(s)] = \frac{(-1)^k}{k!}\,\psi^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gehörige Klasse von Funktionen $\psi(s)$ durch innere funktionentheoretische Eigenschaften zu charakterisieren versucht und umgekehrt.

Die bisherigen Untersuchungen in dieser Richtung knüpfen meist an die Form (1. 2) an, was sich abgesehen von der größeren Schmiegsamkeit des Stieltjes-Integrals daraus erklärt, daß unser Problem als eine Verallgemeinerung des Momentenproblems aufgefaßt werden kann[2]) und daß man bei diesem die befriedigendsten Resultate für die Formulierung in Stieltjesscher Gestalt erhalten hat, so daß man ein gleiches für das Laplace-Problem erwarten darf. Das glatteste Ergebnis bezüglich des Integrals (1. 2) ist das von S. Bernstein [1], daß wir auch nachher zu einer gelegentlichen Bemerkung benutzen werden: Der Klasse der für $t > 0$ *monoton wachsenden* $\Phi(t)$ entspricht umkehrbar eindeutig die Klasse der für $s > 0$ abnehmenden *vollmonotonen* Funktionen $\psi(s)$, d. h. der Funktionen mit der Eigenschaft $(-1)^n \psi^{(n)}(s) \geqq 0$.

Ein ähnlich abgerundetes Ergebnis kann man nun für die Laplace-Transformation in der Gestalt (1. 1) erzielen, wenn man einerseits für $\varphi(t)$ die Klasse L^2 der quadratisch integrabeln Funktionen und andererseits für $\psi(s)$ eine Klasse zugrunde legt, deren Analogon bei Potenzreihen schon länger als wichtige Funktionenfamilie bekannt ist. Es handelt sich dort um die Klasse H^p derjenigen für $|z| < 1$ analytischen Funktionen $f(z) = f(\varrho e^{i\varphi}) = \sum_0^\infty a_n z^n$, bei denen

$$m(\varrho) = \int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{i\varphi})|^p d\varphi \leqq M \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < 1$$

ist, wo M von f und p abhängen kann. Entsprechend werden wir es bei der Laplace-Transformation mit der Klasse $\mathfrak{H}_*^p$ derjenigen für $\xi > 0$ analytischen Funktionen $\psi(s) = \psi(\xi + i\eta)$ zu tun haben, bei denen

$$\mu(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^p d\eta \leqq M \quad \text{für} \quad \xi > 0$$

---

benutzt, mit dessen Hilfe Post eine in gewisser Hinsicht zu der Formel $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ bei Potenzreihen analoge Umkehrformel der Laplace-Transformation:

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} L_{k,t}[\psi(s)]$$

aufgestellt hat. Die Bedingung bezieht sich, was überhaupt für die Widdersche Arbeit charakteristisch ist, auf das Verhalten von $\psi(s)$ im Reellen. Im Gegensatz dazu wird es sich in der vorliegenden Note um das Verhalten von $\psi(s)$ im Komplexen, also um eine funktionentheoretische Betrachtung handeln.

[2]) Setzt man $e^{-t} = x$, $\Phi(t) = -\chi(e^{-t})$, so nimmt (1. 2) die Form an: $\psi(s) = \int_0^1 x^s d\chi(x)$. $\psi(s)$ bedeutet also die für alle Exponenten $s > 0$ gebildeten Potenzmomente der Belegungsfunktion $\chi(x)$.

ist. Wir werden nun zeigen, daß der Klasse L^2 von Funktionen φ genau die Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ von Funktionen ψ entspricht.

Zur Erläuterung der Beweismethode sei an das Analogon bei Potenzreihen erinnert: Aus der bekannten Relation:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\varrho\, e^{i\varphi})|^2\, d\varphi = \sum_0^\infty |a_n|^2 \varrho^{2n} \qquad (0 \leqq \varrho < 1) \tag{1.3}$$

folgt sofort, daß die Zugehörigkeit von $f(z)$ zu H^2 völlig gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum_0^\infty |a_n|^2$ ist. Handelt es sich um Laplace-Integrale, so müssen wir die beiden Teilaussagen des Satzes scharf trennen: 1. Ist $\psi(s)$ durch ein Laplace-Integral (1.1) mit φ aus L^2 darstellbar (das entspricht der Konvergenz von $\sum |a_n|^2$), so kann man auf Grund der Parsevalschen Gleichung für die Fourier-Transformation eine zu (1.3) analoge Gleichung (siehe unten (3.4)) ableiten und unmittelbar schließen, daß ψ zu $\mathfrak{H}_*^2$ gehört. 2. Im umgekehrten Fall, wenn ψ als zu $\mathfrak{H}_*^2$ gehörig bekannt ist, versagt die Analogie, da man noch nicht weiß, ob ψ durch ein Laplace-Integral darstellbar ist. Um weiterzukommen, kann man zunächst einmal bei Potenzreihen an einen Weg denken, der hier allerdings einen horrenden Umweg bedeuten würde, nämlich über das intrikate Randverhalten der Funktion: Eine Funktion $f(\varrho\, e^{i\varphi})$ aus H^2 besitzt eine fast überall vorhandene quadratisch integrable Randfunktion $f(e^{i\varphi}) = \lim_{\varrho \to 1} f(\varrho\, e^{i\varphi})$. Diese ist nach dem Riesz-Fischerschen Satz in eine im quadratischen Mittel gegen sie konvergierende Fourrierreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\varphi}$ entwickelbar, wobei $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Diese Fourierreihe ist nun nichts anderes als die Potenzreihe auf dem Rand $\varrho = 1$. Bildet man also mit den gewonnenen Koeffizienten a_n die Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, so kann man aus der Regularität von $f(z)$ im vollen Kreis $|z| < 1$ noch schließen, daß $a_n = 0$ für $n = -1, -2, \ldots$ ist, und hat so die Potenzreihe gewonnen, durch die unsere aus H^2 stammende Funktion $f(z)$ darstellbar ist.

Dieser Weg erweist sich nun bei der Laplace-Transformation als gangbar. So wie eine Potenzreihe auf dem Rande des Konvergenzkreises eine Fourierreihe bedeutet, wird ein Laplace-Integral auf der Konvergenzgeraden zu einem (einseitigen, d. h. von 0 bis ∞ erstreckten) Fourier-Integral. Dieses benutzen wir als Verbindungsglied zwischen der Funktion ψ und dem Laplace-Integral. Eine Funktion aus $\mathfrak{H}_*^2$ besitzt eine Randfunktion aus L^2, die wir nach dem Plancherelschen Satz, der wie

immer an die Stelle des Riesz-Fischerschen tritt, durch ein (zweiseitiges, d. h. von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecktes) Fourier-Integral darstellen können, das wir nun bloß wieder in die Ebene hinein auszudehnen brauchen, um das die Funktion $\psi(s)$ darstellende Laplace-Integral zu bekommen, nachdem wir auf Grund der Regularität von $\psi(s)$ in der ganzen Halbebene $\xi > 0$ das Verschwinden des von $-\infty$ bis 0 erstreckten Integrationsteiles festgestellt haben.

Gehen wir nun zum Falle $p \neq 2$ über, so fallen die beiden Teilaussagen, von denen die eine die Zugehörigkeit von φ zur Klasse L^p, die andere die Zugehörigkeit von ψ zur Klasse $\mathfrak{H}_*^p$ zur Voraussetzung hat, und die sich im Falle $p = 2$ zu der notwendigen und hinreichenden Bedingung eines einzigen Satzes zusammenschlossen, in zwei verschiedene Sätze auseinander.

1. Der φ-Klasse L^p mit $1 < p < 2$ entspricht ein Teilbereich der ψ-Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ mit $p' = \frac{p}{p-1} > 2$. Das ergibt sich mit denselben Mitteln wie im Falle $p = 2$, nur tritt die Titchmarshsche Theorie der Fourier-Transformation an die Stelle der Plancherelschen und an die Stelle der Parsevalschen Gleichung die Titchmarshsche Ungleichung, die aber auch zum Beweis ausreicht.

2. Was umgekehrt die ψ-Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ mit $p' \geqq 1$ angeht, so hat Hille [1] ohne Beweis den Satz ausgesprochen, daß jedes ihrer Elemente durch ein Laplace-Integral der Stieltjesschen Gestalt (1. 2) darstellbar ist und daß im Falle $1 \leqq p' \leqq 2$ die Funktion $\Phi(t)$ absolut stetig ausfällt, so daß sich (1. 2) in die Gestalt (1. 1) setzen läßt. Ein ausgeführter Beweis dieses Satzes ist mir nicht zu Gesicht gekommen. Daß die Funktionen der Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ mit $1 < p' < 2$ sich in der Form (1. 1) darstellen lassen, wobei die φ einen Teilbereich der Klasse L^p mit $p = \frac{p'}{p'-1} > 2$ ausmachen, werden wir leicht durch Umformung der von Hille und Tamarkin [2] gegebenen Darstellung der Funktionen der Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ durch ein Cauchysches Integral zeigen können.

Die gegenseitige Zuordnung der Funktionen φ und ψ wird also durch folgendes Schema gekennzeichnet:

p	φ in L^p	ψ in $\mathfrak{H}_*^{p'}$	$p' = \frac{p}{p-1}$
$1 < p < 2$	Vollbereich	Teilbereich	$p' > 2$
$p = 2$	Vollbereich	Vollbereich	$p' = 2$
$p > 2$	Teilbereich	Vollbereich	$1 < p' < 2$

Bei den obigen Beweisen wird eine Formel mitgeliefert, die zu gegebenem ψ die darstellende Funktion φ zu berechnen gestattet. Sie stimmt formal mit der bekannten Riemannschen oder Mellinschen Umkehrformel überein, die die Werte von $\psi(s)$ auf einer vertikalen Geraden, also im Komplexen benutzt. Es ist nun interessant, daß man im Falle $p = 2$ eine Umkehrformel der Laplace-Transformation angeben kann, in der nur die Werte von $\psi(s)$ im Reellen vorkommen[3]). Diese Formel haben in etwas anderer Gestalt schon Paley und Wiener [1], S. 39 aufgestellt, aber ohne funktionentheoretische Charakterisierung der ψ-Klasse, auf die sie anwendbar ist.

§ 2.

Definitionen. Allgemeine Sätze über die Laplace- und Fourier-Transformation und über die Funktionsklassen $\mathfrak{H}^p$.

In § 2 sind die weniger bekannten Hilfsmittel zusammengestellt.

Die Klassen L^p und $\mathfrak{H}^p$.

Die Klasse der in jedem endlichen Intervall zwischen a und $+\infty$ Lebesgue-integrabeln Funktionen $F(x)$, für die

$$\int_a^\infty |F(x)|^p \, dx \qquad (p \geqq 1)$$

existiert, heiße $L^p(a, \infty)$. In der Folge wird immer entweder $a = 0$ oder $a = -\infty$ sein.

Die Klasse der Funktionen $F(z) = F(x + iy)$, die in der Halbebene $y > 0$ analytisch sind und für die

$$\mathsf{M}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^p \, dx \leqq M \qquad (y > 0,\ p \geqq 1)$$

ausfällt, heiße $\mathfrak{H}^p$.

Die Klasse der Funktionen $\psi(s) = \psi(\xi + i\eta)$, die in der Halbebene $\xi > 0$ analytisch sind und für die

$$\mu(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^p \, d\eta \leqq M \qquad (\xi > 0,\ p \geqq 1)$$

ausfällt, heiße $\mathfrak{H}_+^p$.

---

[3]) Eine derselben Eigenschaft teilhaftige Umkehrformel für die „zweiseitige" Laplace-Transformation $\psi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \varphi(t) \, dt$ ist vor kurzem von Tricomi [1] auf Grund einer von mir angegebenen Umkehrformel für die Gauß-Transformation abgeleitet und von mir mit exakten Gültigkeitsbedingungen versehen worden (Doetsch [4], S. 306).

Laplace-Transformierte von positiven Funktionen.

Hilfssatz 1. *Ist in dem für* $\Re s > \xi_0$ *konvergenten Laplace-Integral* (1.1) *die Funktion* $\varphi(t)$ *positiv*:

$$\varphi(t) \geqq 0 \quad \text{für} \quad t > 0,$$

so ist ψ *für die reellen Argumente* $\xi > \xi_0$ *eine logarithmisch-konvexe Funktion, d. h.* $\log \psi(\xi)$ *ist konvex:*

$$(2.1) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \log \psi(\xi_1) & \log \psi(\xi_2) & \log \psi(\xi_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0 \quad \text{für} \quad \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3.$$

Der Beweis steht bereits in Doetsch [2], S. 156; er ist so kurz, daß er hier rasch wiederholt werden kann. Auf der Geraden $\Re s = \xi$ ist wegen $\varphi(t) \geqq 0$:

$$|\psi(s)| \leqq \int_0^\infty e^{-\xi t} \varphi(t)\, dt = \psi(\xi).$$

$\psi(\xi)$ ist also das Maximum von $|\psi(s)|$ auf $\Re s = \xi$. Der Logarithmus der oberen Grenze einer analytischen Funktion auf parallelen Geraden $\Re s = \xi$ ist aber nach dem Dreigeradensatz (Doetsch [1]) eine konvexe Funktion von ξ.

Hilfssatz 1 gilt, wie man dem Beweis sofort ansieht, auch für eine in einem Streifen konvergente „zweiseitige" Laplace-Transformierte $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \varphi(t)\, dt$ mit positivem φ.

Bemerkung. Eine logarithmisch-konvexe Funktion ist eo ipso im gewöhnlichen Sinn konvex. Denn aus (2.1) in der Gestalt

$$(\xi_3 - \xi_2) \log \psi(\xi_1) - (\xi_3 - \xi_1) \log \psi(\xi_2) + (\xi_2 - \xi_1) \log \psi(\xi_3) \geqq 0$$

ergibt sich

$$(2.2) \qquad \psi(\xi_2) \leqq \left(\psi(\xi_1)^{\xi_3 - \xi_2}\, \psi(\xi_3)^{\xi_2 - \xi_1}\right)^{\frac{1}{\xi_3 - \xi_1}}.$$

Nun ist aber bekanntlich für positive Zahlen

$$(u^\alpha v^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leqq \frac{\alpha u + \beta v}{\alpha + \beta},$$

also folgt aus (2.2) erst recht

$$\psi(\xi_2) \leqq \frac{(\xi_3 - \xi_2)\, \psi(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)\, \psi(\xi_3)}{\xi_3 - \xi_1}$$

oder

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \psi(\xi_1) & \psi(\xi_2) & \psi(\xi_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Dagegen braucht eine konvexe Funktion nicht logarithmisch konvex zu sein; Beispiel: ξ^2 ist konvex, $\log \xi^2 = 2 \log \xi$ aber konkav. Logarithmische Konvexität ist eine viel einschneidendere Bedingung als gewöhnliche Konvexität.

Exkurs über vollmonotone Funktionen.

Nach dem in § 1 erwähnten Satz von S. Bernstein ist jede abnehmende vollmonotone Funktion als Laplace-Integral der Gestalt (1. 2) mit monoton wachsendem $\Phi(t)$ darstellbar. Für ein solches gilt unser Hilfssatz 1 natürlich auch. Wir erhalten also:

Eine vollmonotone Funktion ist auch logarithmisch-konvex.

Daß für eine vollmonotone Funktion $\log \psi(s)$ konvex ist, läßt sich wegen der Existenz der Ableitungen auch so ausdrücken:

$$\frac{d^2 \log \psi(s)}{d s^2} = \frac{\psi(s)\,\psi''(s) - \psi'(s)^2}{\psi(s)^2} \geqq 0$$

oder

$$\psi(s)\,\psi''(s) \geqq \psi'(s)^2,$$

womit wir ein Ergebnis von S. Bernstein ([1], S. 7) wiedergefunden haben. Nun kann bei einer vollmonotonen Funktion keine Ableitung irgendwo verschwinden, wenn die Funktion nicht von dieser Stelle an konstant sein soll. Denn ist z. B. $\psi^{(2\nu)}(s_0) = 0$, so ist, da wegen $\psi^{(2\nu+1)}(s) \leqq 0$ die Funktion $\psi^{(2\nu)}(s)$ nicht wachsen kann, aber $\geqq 0$ bleiben muß, $\psi^{(2\nu)}(s) = 0$ für $s \geqq s_0$. Folglich ist $\psi^{(2\nu-1)}(s) = c_1 \leqq 0$ und damit $\psi^{(2\nu-2)}(s) = c_1 s + c_2$ für $s \geqq s_0$. Wäre $c_1 < 0$, so würde von einer Stelle an $\psi^{(2\nu-2)}(s) < 0$ sein, während es doch $\geqq 0$ sein muß. Also ist $c_1 = 0$ und $\psi^{(2\nu-2)}(s) = c_2 \geqq 0$ für $s \geqq s_0$. Wäre nun (im Falle $\nu > 1$) $c_2 > 0$, so würde folgen: $\psi^{(2\nu-3)}(s) = c_2 s + c_3 > 0$ von einer Stelle an, während $\psi^{(2\nu-3)}(s) \leqq 0$ sein muß. Es ist also $c_2 = 0$ usw. Ähnlich schließt man, wenn man mit einer Ableitung ungerader Ordnung anfängt.

Außer in dem evtl. vorhandenen konstanten Schwanzstück der Funktion $\psi(s)$ sind also alle Ableitungen $\neq 0$, so daß wir die oben gefundene Relation auch so schreiben können (beachte $\psi' < 0$, $\psi'' > 0$):

$$\frac{\psi}{\psi'} \leqq \frac{\psi'}{\psi''}.$$

Nun ist aber $-\psi'(s)$ ebenfalls eine vollmonotone Funktion, es gilt also

$$\frac{-\psi'}{-\psi''} \leqq \frac{-\psi''}{-\psi'''} \quad \text{oder} \quad \frac{\psi'}{\psi''} \leqq \frac{\psi''}{\psi'''}$$

usw. So hat sich ergeben:

Bei einer vollmonotonen Funktion $\varphi(s)$ gilt (außer in dem evtl. vorhandenen konstanten Schwanzstück, wo alle Ableitungen verschwinden):

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)} \leqq \frac{\varphi'(s)}{\varphi''(s)} \leqq \frac{\varphi''(s)}{\varphi'''(s)} \leqq \cdots.$$

Die vorkommenden Quotienten sind sämtlich negativ, absolut genommen bilden sie also eine monoton fallende Folge.

Fourier-Transformierte.

$F(x)$ sei in jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrabel. Wir setzen

$$f_\alpha(y) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} F(x)\, dx.$$

Wenn $f_\alpha(y)$ für $\alpha \to \infty$ im Mittel q-ter Ordnung ($q \geqq 1$) gegen eine Funktion $f(y)$ aus $L^q(-\infty, \infty)$ konvergiert, d. h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y) - f_\alpha(y)|^q\, dy \to 0 \quad \text{für} \quad \alpha \to \infty,$$

abgekürzt

$$f(y) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(q)} f_\alpha(y),$$

so heißt $f(y)$ die Fourier-Transformierte von $F(x)$ in $L^q(-\infty, \infty)$, in Zeichen:

$$f(y) = \mathfrak{F}^q\{F(x);\, y\} \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{F}^q\{F\}.$$

Hilfssatz 2. *Existiert einerseits $f(y) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(q)} f_\alpha(y)$ und andererseits fast überall $g(y) = \lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha(y)$, so ist fast überall $f(y) = g(y)$.*

Hilfssatz 3. *Wenn $F(x)$ zu $L^p(-\infty, \infty)$ mit $1 < p \leqq 2$ gehört, so existiert sicher die Fourier-Transformierte in $L^{p'}(-\infty, \infty)$ mit $p' = \frac{p}{p-1}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$:*

$$f(y) = \mathfrak{F}^{p'}\{F(x);\, y\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(p')} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} F(x)\, dx.$$

(Titchmarsh [1]).

Hilfssatz 4. *Wenn $F(x)$ zu $L^{p'}$ mit $1 < p \leqq 2$ gehört und $f(y)$ die Fourier-Transformierte von $F(x)$ in $L^{p'}(-\infty, \infty)$ mit $p' = \frac{p}{p-1}$ ist, so ist umgekehrt $F(x)$ bis auf den Faktor 2π die Fourier-Transformierte von $f(-y)$ in $L^p(-\infty, \infty)$:*

$$f(y) = \mathfrak{F}^{p'}\{F(x);\, y\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(p')} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} F(x)\, dx,$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}^p\{f(-y);\, x\} = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}^p\{f(y);\, -x\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(p)} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} f(y)\, dy$$

(Hille und Tamarkin [1]).

Hilfssatz 5. *In der Bezeichnung von Hilfssatz 4 gilt für* $p = 2$ *die Parsevalsche Gleichung*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 \, dy = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 \, dx,$$

für $1 < p < 2$ *dagegen die Titchmarshsche Ungleichung*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^{p'} \, dy \right)^{1/p'} \leqq (2\pi)^{1/p'} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

(Titchmarsh [1]; im Falle $p = 2$ stellen Hilfssatz 3 bis 5 die bekannten Ergebnisse von Plancherel dar).

Hilfssatz 6. *Gehören* F_1, F_2 *und* $f_1 \cdot f_2$, *wo*

$$f_1 = \mathfrak{F}^2\{F_1\}, \quad f_2 = \mathfrak{F}^2\{F_2\}$$

ist, zu $L^2(-\infty, \infty)$, *so gehört auch die Faltung*

$$F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-\xi) F_2(\xi) \, d\xi$$

zu $L^2(-\infty, \infty)$, *und es ist (Faltungssatz):*

$$\mathfrak{F}^2\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{F}^2\{F_1\} \cdot \mathfrak{F}^2\{F_2\}$$

(Doetsch [4], S. 287).

Funktionen der Klasse $\mathfrak{H}^p$.

Hilfssatz 7. *Eine Funktion* $F(z) = F(x+iy)$ *der Klasse* $\mathfrak{H}^p$ *besitzt für fast alle* x *eine Randfunktion* $F(x)$:

$$F(x) = \lim_{y \to +0} F(x+iy),$$

die zur Klasse $L^p(-\infty, \infty)$ *gehört. Sie strebt gegen diese Randfunktion auch im Mittel p-ter Ordnung:*

$$F(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{y \to +0}^{(p)} F(x+iy).$$

Außerdem strebt $\mathsf{M}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^p \, dx$ *für* $y \to +0$ *von unten gegen* $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^p \, dx$.

Hilfssatz 8. *Eine Funktion* $F(z)$ *der Klasse* $\mathfrak{H}^p$ *läßt sich für* $y > 0$ *durch das Cauchysche Integral über ihre Randfunktion darstellen:*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{x-z} \, dx.$$

Die Hilfssätze 7 und 8 konnten von Hille und Tamarkin [2], S. 338 leicht durch konforme Abbildung der Halbebene auf den Kreis aus den entsprechenden Ergebnissen von Smirnoff und Fichtenholz über die Klasse H^p hergeleitet werden.

Hilfssatz 9. *$F(x)$ gehöre zu $L^p(-\infty, \infty)$ mit $p \geqq 1$ und habe in irgendeinem $L^q(-\infty, \infty)$ mit $q \geqq 1$ eine Fourier-Transformierte $f(y)$. Damit $F(x)$ die Randfunktion einer Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{H}^p$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß $f(y) = 0$ für $y < 0$ ist.* (Hille und Tamarkin [2], S. 345) Diesem Satz entspricht die Tatsache, daß bei einer an eine Potenzreihe auf dem Rande anschließenden Fourierreihe die Koeffizienten mit negativem Index verschwinden.

§ 3.

Funktionen aus $\mathfrak{H}^2_*$ als Laplace-Transformierte von Funktionen aus L^2.

Satz 1. a) *Notwendig und hinreichend dafür, daß sich eine Funktion $\psi(s) = \psi(\xi + i\eta)$ für $\xi > 0$ als Laplace-Transformierte der Gestalt* (1.1) *einer Funktion $\varphi(t)$ aus $L^2(0, \infty)$ darstellen läßt, ist die Zugehörigkeit von $\psi(s)$ zu $\mathfrak{H}^2_*$.*

b) *Ein solches $\psi(s)$ besitzt für fast alle η eine Randfunktion $\psi(i\eta) = \lim_{\xi \to +0} \psi(\xi + i\eta)$, gegen die $\psi(\xi + i\eta)$ auch im quadratischen Mittel strebt und die sich so darstellen läßt:*

$$\psi(i\eta) = \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty}^{(2)} \int_0^a e^{-i\eta t} \varphi(t)\, dt.$$

c) *Die Größe $\mu(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^2\, d\eta$ ist eine für $\xi > 0$ logarithmisch-konvexe, beliebig oft differenzierbare und vollmonotone Funktion von ξ und besitzt für $\xi \to +0$ den Grenzwert*

$$2\pi \int_0^\infty |\varphi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(i\eta)|^2\, d\eta.$$

d) *Das zu $\psi(s)$ gehörige $\varphi(t)$ läßt sich aus $\psi(s)$ nach der Umkehrformel*

$$\varphi(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty}^{(2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{(\xi + i\eta)t} \psi(\xi + i\eta)\, d\eta \qquad (\xi \geqq 0)$$

berechnen. Die rechte Seite ist von ξ unabhängig.

Beweis: Sei zunächst $\varphi(t)$ eine Funktion aus $L^2(0, \infty)$. Dann ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_0^\infty |e^{-st}\varphi(t)|\,dt \leqq \Big(\int_0^\infty e^{-2\xi t}\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt\Big)^{1/2},$$

und folglich (1.1) für $\xi > 0$ absolut konvergent. $\psi(s)$ ist für $\xi > 0$ analytisch. Setzen wir

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{für } t \geqq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

so gehört $e^{-\xi t}\varphi_0(t)$ für $\xi \geqq 0$ zu $L^2(-\infty, \infty)$; also existiert nach Hilfssatz 3

$$\mathfrak{F}^2\{e^{-\xi t}\varphi_0(t);\ \eta\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}{}^{(2)} \int_0^\alpha e^{-i\eta t}[e^{-\xi t}\varphi(t)]\,dt \tag{3.2}$$

für $\xi \geqq 0$ und stimmt nach Hilfssatz 2 für $\xi > 0$ mit dem konvergenten Integral

$$\psi(s) = \psi(\xi + i\eta) = \int_0^\infty e^{-i\eta t}[e^{-\xi t}\varphi(t)]\,dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-i\eta t}[e^{-\xi t}\varphi(t)]\,dt$$

für fast alle η überein. Wir können also für $\xi > 0$

$$\mathfrak{F}^2\{e^{-\xi t}\varphi_0(t);\ \eta\} = \psi(\xi + i\eta) \tag{3.3}$$

setzen. Die Parsevalsche Gleichung (Hilfssatz 5) liefert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^2\,d\eta = 2\pi\int_0^\infty e^{-2\xi t}|\varphi(t)|^2\,dt. \tag{3.4}$$

Die rechte Seite ist für $\xi > 0$ offensichtlich beschränkt, nämlich $\leqq 2\pi\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt$, also auch die linke, womit die Zugehörigkeit von $\psi(s)$ zur Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ erwiesen ist.

Zugleich ergibt sich:

$$\mu(\xi) = 2\pi\int_0^\infty e^{-2\xi t}|\varphi(t)|^2\,dt,$$

woraus nach Hilfssatz 1 folgt, daß $\mu(\xi)$ logarithmisch-konvex ist[4]). Wegen

$$\mu^{(n)}(\xi) = 2\pi(-2)^n\int_0^\infty e^{-2\xi t}t^n|\varphi(t)|^2\,dt$$

[4]) Der entsprechende Satz für Potenzreihen, daß $\log m(\varrho)$ (vgl. § 1) für $p = 2$ eine konvexe Funktion von $\log\varrho$ darstellt, ist bekannt und folgt analog sofort aus dem Hadamardschen Dreikreisesatz, wird allerdings meist (vgl. z. B. Titchmarsh [2], S. 173) anders bewiesen.

ist $\mu(\xi)$ auch vollmonoton. Da $2\pi\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt$ konvergiert, strebt $\mu(\xi)$ für $\xi \to +0$ gegen diesen Wert[5]). Wie schon oben bemerkt, existiert $\mathfrak{F}^2\{\varphi_0(t);\eta\}$; wir bezeichnen diese Funktion mit $\psi(i\eta)$:

$$\psi(i\eta) = \mathfrak{F}^2\{\varphi_0(t);\eta\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha\to\infty}{}^{(2)} \int_0^\alpha e^{-i\eta t}\varphi(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(i\eta)|^2\,d\eta = 2\pi\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt. \tag{3.6}$$

Also ist $\lim_{\xi\to+0}\mu(\xi)$ auch gleich dem links stehenden Ausdruck.

Wir behaupten nun, daß die durch (3.5) definierte Funktion $\psi(i\eta)$ fast überall die Randfunktion von $\psi(s)$ ist. Nach (3.3) und (3.5) ist

$$\psi(\xi+i\eta) - \psi(i\eta) = \mathfrak{F}^2\{e^{-\xi t}\varphi_0(t) - \varphi_0 t\},$$

also nach der Parsevalschen Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi+i\eta) - \psi(i\eta)|^2\,d\eta = 2\pi\int_0^\infty |(e^{-\xi t}-1)\varphi(t)|^2\,dt.$$

Die rechte Seite strebt für $\xi\to 0$ gegen 0[6]), also auch die linke, d. h.

$$\psi(i\eta) = \operatorname*{l.i.m.}_{\xi\to 0}{}^{(2)}\ \psi(\xi+i\eta).$$

Andererseits strebt nach Hilfssatz 7, wenn wir ihn sinngemäß auf die Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ statt auf $\mathfrak{H}^2$ anwenden, $\psi(\xi+i\eta)$ fast überall gegen eine Randfunktion $r(\eta)$:

$$r(\eta) = \lim_{\xi\to 0}\psi(\xi+i\eta).$$

Nach Hilfssatz 2 ist fast überall $r(\eta) = \psi(i\eta)$.

---

[5]) Nach dem für Laplace-Transformierte geltenden Analogon des Abelschen Stetigkeitssatzes für Potenzreihen.

[6]) Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man T so groß, daß für alle $\xi > 0$

$$\int_T^\infty |(e^{-\xi t}-1)\varphi(t)|^2\,dt \leqq \int_T^\infty |\varphi(t)|^2\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Sodann bestimme man δ so, daß für $0 < \xi < \delta$

$$\int_0^T |(e^{-\xi t}-1)\varphi(t)|^2\,dt \leqq |e^{-\xi T}-1|^2\int_0^T |\varphi(t)|^2\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt. Dann ist

$$\int_0^\infty |(e^{-\xi t}-1)\varphi(t)|^2\,dt < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < \xi < \delta.$$

Nun setzen wir umgekehrt voraus, daß $\psi(s) = \psi(\xi + i\eta)$ zur Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ gehört[7]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^2 d\eta \leqq M \quad \text{für} \quad \xi > 0,$$

oder anders geschrieben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(y - ix)|^2 dx \leqq M \quad \text{für} \quad y > 0.$$

Die Funktion $\psi(y - ix) = \psi(-iz)$ gehört mithin der Klasse $\mathfrak{H}^2$ an, besitzt also nach Hilfssatz 7 für $y \to +0$ eine Randfunktion $\psi(-ix)$, die aus $L^2(-\infty, \infty)$ stammt und daher nach Hilfssatz 3 eine Fourier-Transformierte in $L^2(-\infty, \infty)$ hat, die wir, mit $\frac{1}{2\pi}$ multipliziert, mit $\varphi(t)$ bezeichnen:

$$(3.7) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}^2 \{\psi(-ix); t\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-itx} \psi(-ix)\, dx$$

$$= \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta} \psi(i\eta)\, d\eta.$$

$\varphi(t)$ ist die Fourier-Transformierte in $L^2(-\infty, \infty)$ der Randfunktion einer analytischen Funktion $\psi(-iz)$ aus $\mathfrak{H}^2$, folglich ist nach Hilfssatz 9

$$(3.8) \qquad \varphi(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0.$$

Mit dieser Funktion $\varphi(t)$ aus $L^2(0, \infty)$ bilden wir nun das Laplace-Integral

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t)\, dt,$$

das (vgl. oben) für $\xi > 0$ absolut konvergiert und eine analytische Funktion darstellt, und behaupten, daß es mit unserer Ausgangsfunktion $\psi(s)$ übereinstimmt. Hierzu bemerken wir zunächst, daß durch Anwendung von Hilfssatz 4 auf (3.7) und Beachtung von (3.8) folgt:

$$(3.9) \qquad \psi(i\eta) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(2)} \int_0^{\alpha} e^{-i\eta t} \varphi(t)\, dt.$$

Nun wurde oben gezeigt, daß die durch (3.5) definierte Funktion die Randfunktion des mit $\varphi(t)$ gebildeten Laplace-Integrals ist. Wenden wir dies auf $\Psi(s)$ an, so sehen wir, daß die durch (3.9) dargestellte Funktion $\psi(i\eta)$, die nichts anderes als die Randfunktion unserer Ausgangs-

[7]) Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, daß die Darstellbarkeit von $\psi(s)$ durch ein Laplace-Integral in § 5 noch einmal, *aber auf andere Art* mitbewiesen wird. — Im folgenden haben wir, um bei Berechnung der Fourier-Transformierten keinen Vorzeichenfehler aufkommen zu lassen, die Umschreibung von der Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ auf $\mathfrak{H}^2$ etwas ausführlich vorgenommen.

funktion $\psi(s)$ für $\xi \to 0$ ist, zugleich die Randfunktion von $\Psi(s)$ ist. Hieraus folgt aber $\Psi(s) = \psi(s)$. Denn $\Psi(s)$ ist nach dem Ergebnis zu Anfang unseres Beweises, $\psi(s)$ nach Voraussetzung aus der Klasse $\mathfrak{H}_*^2$, also wegen der Minkowskischen Ungleichung

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\xi+i\eta) - \psi(\xi+i\eta)|^2 \, d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\xi+i\eta)|^2 \, d\eta\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi+i\eta)|^2 \, d\eta\right)^{\frac{1}{2}}$$

auch $\Psi(\xi+i\eta) - \psi(\xi+i\eta)$. Außerdem hat $\Psi(\xi+i\eta) - \psi(\xi+i\eta)$ die Randfunktion 0, so daß nach Hilfssatz 7, angewandt auf $\mathfrak{H}_*^2$ statt $\mathfrak{H}^2$, der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\xi+i\eta) - \psi(\xi+i\eta)|^2 \, d\eta$$

für $\xi \to +0$ von unten gegen 0 strebt. Dann ist er aber überhaupt identisch 0, woraus fast überall $\Psi(\xi+i\eta) = \psi(\xi+i\eta)$ folgt. Da beide Funktionen analytisch sind, so ist $\Psi(s) \equiv \psi(s)$. $\psi(s)$ ist also durch ein Laplace-Integral mit einem φ aus $L^2(0, \infty)$ darstellbar.

Kehren wir schließlich noch die Fourier-Transformation (3.3) bzw. (3.5) nach Hilfssatz 4 um, so erhalten wir den unter d) angegebenen Ausdruck für $\varphi(t)$. — Damit sind alle Behauptungen bewiesen.

§ 4.

Laplace-Transformierte von Funktionen aus L^p.

Satz 2. *$\varphi(t)$ sei eine Funktion aus $L^p(0, \infty)$ mit $1 < p \leqq 2$.*

a) *Das Laplace-Integral* (1.1) *konvergiert für $\xi > 0$ ($s = \xi + i\eta$) absolut und stellt eine Funktion $\psi(s)$ der Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ mit $p' = \frac{p}{p-1}$ dar*[8]).

---

[8]) In der neuen Arbeit von Widder [1] wird für die Darstellbarkeit von $\psi(s)$ als Laplace-Transformierte einer Funktion $\varphi(t)$ aus $L^p(0, \infty)$, $p > 1$, eine notwendige und hinreichende Bedingung (Theorem 4.1) angegeben, die vermittels des Operators $L_{k,t}$ (siehe Fußnote 1) formuliert ist und sich entsprechend dem Charakter der Arbeit auf das Verhalten von ψ im Reellen bezieht, nämlich

$$\int_0^{\infty} |L_{k,t}[\psi(s)]|^p \, dt \leqq M, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Da $\lim_{k \to \infty} L_{k,t}[\psi] = \varphi$ ist, drückt sich in der Bedingung gewissermaßen die Voraussetzung $\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^p \, dt \leq M$, dargestellt durch ψ, aus.

b) *Die Funktion $\psi(s)$ besitzt für fast alle η eine Randfunktion $\psi(i\eta) = \lim_{\xi \to +0} \psi(\xi + i\eta)$, gegen die $\psi(\xi + i\eta)$ auch im Mittel der Ordnung p' strebt und die sich so darstellen läßt:*

$$\psi(i\eta) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(p')} \int_0^\alpha e^{-i\eta t} \varphi(t)\, dt.$$

c) *Ist $\psi(s)$ durch ein $\varphi(t)$ aus $L^p(0, \infty)$ mit $1 < p \leqq 2$ als Laplace-Integral darstellbar, so ergibt sich $\varphi(t)$ aus $\psi(s)$ vermittels der Umkehrformel*

$$\varphi(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(p)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{(\xi + i\eta)t} \psi(\xi + i\eta)\, d\eta \quad (\xi \geqq 0).$$

d) *$\psi(s)$ läßt sich durch das Cauchysche Integral über seine Randfunktion darstellen:*

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\eta)}{s - i\eta}\, d\eta \qquad (\xi > 0).$$

Bemerkung: Der Satz läßt sich leicht sinngemäß auf zweiseitige Laplace-Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \varphi(t)\, dt$ übertragen.

Beweis: Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\int_0^\infty |e^{-st} \varphi(t)|\, dt \leqq \Big(\int_0^\infty e^{-p'\xi t}\, dt\Big)^{1/p'} \Big(\int_0^\infty |\varphi(t)|^p\, dt\Big)^{1/p},$$

so daß (1. 1) für $\xi > 0$ absolut konvergiert. Definieren wir $\varphi_0(t)$ durch (3. 1), so gehört $e^{-\xi t} \varphi_0(t)$ zu $L^p(-\infty, \infty)$ mit $1 < p \leqq 2$, so daß nach Hilfssatz 3

$$(4.1) \quad \mathfrak{F}^{p'}\{e^{-\xi t} \varphi_0(t); \eta\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(p')} \int_0^\alpha e^{-i\eta t} [e^{-\xi t} \varphi(t)]\, dt \qquad \text{für } \xi \geqq 0$$

existiert und nach Hilfssatz 2 für $\xi > 0$ mit $\psi(s)$ übereinstimmt.

Die Titchmarshsche Ungleichung (Hilfssatz 5) liefert:

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta)|^{p'}\, d\eta\Big)^{1/p'} \leqq (2\pi)^{1/p'} \Big(\int_0^\infty e^{-p\xi t} |\varphi(t)|^p\, dt\Big)^{1/p}.$$

Die rechte Seite ist für $\xi > 0$ beschränkt, nämlich

$$\leqq (2\pi)^{1/p'} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^p\, dt\Big)^{1/p},$$

also auch die linke, so daß $\psi(\xi + i\eta)$ zu $\mathfrak{H}_*^{p'}$ gehört.

Nach Hilfssatz 7 hat nun $\psi(\xi + i\eta)$ für $\xi \to 0$ fast überall eine Randfunktion $\psi(i\eta)$, die zu $L^{p'}(-\infty, \infty)$ gehört. Wir behaupten: Diese stimmt mit der nach Hilfssatz 3 existierenden Fourier-Transformierten

$$(4.2) \qquad \psi_0(i\eta) = \mathfrak{F}^{p'}\{\varphi_0(t); \eta\} = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}^{(p')} \int_0^\alpha e^{-i\eta t} \varphi(t)\, dt$$

überein. Denn es ist

$$\psi(\xi + i\eta) - \psi_0(i\eta) = \mathfrak{F}^{p'}\{e^{-\xi t}\varphi_0(t) - \varphi_0(t)\},$$

also nach der Titchmarshschen Ungleichung

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\xi + i\eta) - \psi_0(i\eta)|^{p'} d\eta\Big)^{1/p'} \leqq (2\pi)^{1/p'}\Big(\int_0^{\infty} |(e^{-\xi t} - 1)\varphi(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Mit der rechten Seite strebt auch die linke für $\xi \to 0$ gegen 0, so daß man erhält:

$$\psi_0(i\eta) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\xi \to 0}^{(p')} \psi(\xi + i\eta).$$

Nimmt man hierzu

$$\psi(i\eta) = \lim_{\xi \to 0} \psi(\xi + i\eta),$$

so folgt nach Hilfssatz 2, daß fast überall $\psi(i\eta) = \psi_0(i\eta)$ ist.

Die im Satz genannte Umkehrformel folgt unmittelbar durch Anwendung von Hilfssatz 4 auf (4. 1) und (4. 2).

Daß die Funktion $\psi(s)$ durch das Cauchysche Integral ihrer Randfunktion darstellbar ist, läßt sich, da wir sie als zu $\mathfrak{H}_*^{p'}$ gehörig erwiesen haben, direkt aus Hilfssatz 8 folgern. Wir ziehen aber vor, es aus den obigen Ergebnissen abzuleiten, weil dieser Weg zugleich eine Vorbereitung auf den Beweis von Satz 3 ist, wo das Umgekehrte gemacht wird.

Setzen wir die Darstellung von $\varphi(t)$ durch die Randfunktion in das Laplace-Integral ein, so ergibt sich:

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\alpha \to \infty}^{(p)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\psi(i\eta)\,d\eta.$$

Wir behaupten: Statt $\int_0^{\infty} dt \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\alpha \to \infty}^{(p)}$ kann man $\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\infty} dt$ schreiben. Nach der Hölderschen Ungleichung ist nämlich

$$\Big|\int_0^{\infty} e^{-st}\Big[\varphi(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\psi(i\eta)\,d\eta\Big]\,dt\Big|$$

$$\leqq \Big(\int_0^{\infty} e^{-p'\xi t}\,dt\Big)^{1/p'}\Big(\int_0^{\infty} \Big|\varphi(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\psi(i\eta)\,d\eta\Big|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Wegen

$$\varphi(t) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\alpha \to \infty}^{(p)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\psi(i\eta)\,d\eta$$

strebt (bei festem s) die rechte Seite für $\alpha \to \infty$ gegen 0, also auch die linke. Es ist also

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\varphi(t)\,dt = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\psi(i\eta)\,d\eta.$$

Hier kann man nun die Integrationen nach t und η vertauschen, z. B. deshalb, weil alle vorkommenden Integrale konvergent bleiben, wenn man die Integranden durch ihre Absolutbeträge ersetzt, und erhält:

$$\psi(s) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \psi(i\eta) \int_0^{\infty} e^{(-s+i\eta)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\eta)}{s - i\eta}\, d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\psi(u)}{s-u}\, du.$$

Das Cauchysche Integral[9]) konvergiert, wie man mit der Hölderschen Ungleichung feststellt, absolut.

§ 5.

Funktionen aus $\mathfrak{H}_*^{p'}$ als Laplace-Transformierte.

Satz 3. *Jede Funktion $\psi(s)$ aus der Klasse $\mathfrak{H}_*^{p'}$ mit $1 < p' \leqq 2$ ist als Laplace-Transformierte (1. 1) einer Funktion $\varphi(t)$ der Klasse $L^p(0, \infty)$ mit $p = \frac{p'}{p'-1}$ darstellbar. $\varphi(t)$ berechnet sich aus $\psi(s)$ nach der Formel*

$$\varphi(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{\alpha \to \infty}{}^{(p)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{(\xi + i\eta)t}\, \psi(\xi + i\eta)\, d\eta \qquad (\xi \geqq 0),$$

wobei für $\xi = 0$ unter $\psi(i\eta)$ die Randfunktion von $\psi(\xi + i\eta)$ zu verstehen ist.

Beweis: Wie in der Einleitung erwähnt, ist der Satz ohne Beweis im wesentlichen von Hille [1] ausgesprochen worden. Der Beweis von § 3 für den Fall $p = p' = 2$ läßt sich wegen der Unsymmetrie der Titchmarshschen Ungleichung nicht ohne weiteres auf $1 < p' < 2$ übertragen. Es ist daher am einfachsten, von der Darstellung des $\psi(s)$ durch ein Cauchysches Integral auszugehen und gewissermaßen den Beweis am Schluß von § 4 rückwärts zu durchlaufen.

Da $\psi(s)$ zu $\mathfrak{H}_*^{p'}$ gehört, so liegt $\psi(-iz) = \psi(y - ix)$ in der Klasse $\mathfrak{H}^{p'}$, läßt sich also nach Hilfssatz 8 durch das Cauchysche Integral über die Randfunktion $\psi(-ix)$ darstellen:

$$\psi(y - ix) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(-iv)}{v - (x+iy)}\, dv \qquad (y > 0).$$

---

[9]) Das Durchlaufen der imaginären Achse von $-i\infty$ bis $+i\infty$ bedeutet ein Umfahren der rechten Halbebene, in der s liegt, im negativen Sinn, daher steht im Nenner $s - u$ und nicht $u - s$.

Für $\psi(s)$ selbst finden wir dadurch bei $\xi > 0$:

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(i\eta)}{s - i\eta} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(i\eta)\, d\eta \int_0^{\infty} e^{-(s+i\eta)t}\, dt.$$

Dies ist aber gleich

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \; \underset{\alpha \to \infty}{\overset{(p)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\, \psi(i\eta)\, d\eta.$$

Denn wegen $1 < p' \leqq 2$ existiert nach Hilfssatz 3 der hier vorkommende $\underset{}{\overset{(p)}{\text{l. i. m.}}}$ mit $p = \frac{p'}{p'-1}$, und im übrigen beweist man die Gleichheit der beiden Ausdrücke genau wie am Schluß von § 4. Setzen wir

$$\underset{\alpha \to \infty}{\overset{(p)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\, \psi(i\eta)\, d\eta = \varphi(t) \tag{5.1}$$

(wir brauchen $\varphi(t)$ nur für $t \geqq 0$, nach Hilfssatz 9 verschwindet es übrigens für $t < 0$), so ist

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \varphi(t)\, dt$$

und $\varphi(t)$ eine Funktion aus $L^p(0, \infty)$. — Ist $\xi > 0$, so ist für $\psi(s+\xi)$ die Voraussetzung des Satzes auch erfüllt. Dieser Funktion entspricht als darstellende Funktion $e^{-\xi t}\varphi(t)$, so daß (5.1) den allgemeinen in der Behauptung angegebenen Ausdruck für $\varphi(t)$ ergibt.

Ganz analog beweist man den allgemeineren Satz:

Satz 4. *$\psi(s)$ sei für $\xi > 0$ analytisch, habe für $\xi \to 0$ fast überall eine Randfunktion $\psi(i\eta)$, die zu einem gewissen $L^p(-\infty, \infty)$ $(p \geqq 1)$ gehört, und lasse sich für $\xi > 0$ durch das Cauchysche Integral*

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\psi(u)}{s - u} du$$

darstellen. Besitzt dann $\psi(i\eta)$ eine Fourier-Transformierte in irgendeinem $L^q(-\infty, \infty)$ $(q \geqq 1)$, so ist $\psi(s)$ auch durch ein Laplace-Integral

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, \varphi(t)\, dt$$

mit

$$\varphi(t) = \underset{\alpha \to \infty}{\overset{(q)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{it\eta}\, \psi(i\eta)\, d\eta$$

darstellbar.

Größenordnung von $\psi(s)$ für $\xi \to \infty$.

Eine für $\xi > 0$ durch ein Laplace-Integral darstellbare Funktion strebt bekanntlich in jedem Winkelraum $|\operatorname{ampl} s| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ für $s \to \infty$ gegen 0. Für Funktionen aus $\mathfrak{H}_*^p$ oder allgemeiner für solche, die sich durch ihr Cauchysches Integral darstellen lassen, gilt die bedeutend schärfere Aussage:

Satz 5. *Die für $\xi > 0$ definierte Funktion $\psi(s)$ habe für $\xi \to 0$ eine Randfunktion $\psi(iy)$ aus einem L^p $(p \geqq 1)$ und sei für $\xi > 0$ durch ihr Cauchysches Integral*

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(iy)}{s - iy}\, dy$$

darstellbar. Dann ist $\psi(s)$ auf jeder Vertikalen $\Re s = \xi > 0$ beschränkt, und zwar

$$|\psi(s)| \leqq \frac{\text{const.}}{\xi^{1/p}}.$$

Beweis: Nach der Hölderschen Ungleichung gilt für $p > 1$ und $p' = \frac{p}{p-1}$:

$$2\pi |\psi(s)| \leqq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(iy)|^p\, dy \right)^{1/p} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|s - iy|^{p'}} \right)^{1/p'}.$$

Es ist $(s = \xi + i\eta,\ \xi > 0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|s - iy|^{p'}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{[\xi^2 + (\eta - y)^2]^{p'/2}} = \frac{1}{\xi^{p'}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\left[1 + \left(\frac{\eta - y}{\xi}\right)^2\right]^{p'/2}}$$

$$= \frac{1}{\xi^{p'-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{p'/2}} = \frac{c_0}{\xi^{p'-1}},$$

also

$$2\pi |\psi(s)| \leqq \frac{c_1}{\xi^{1-1/p'}} = \frac{c_1}{\xi^{1/p}}.$$

Für $p = 1$ ist:

$$2\pi |\psi(s)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(iy)|}{[\xi^2 + (\eta - y)^2]^{1/2}}\, dy \leqq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(iy)|\, dy.$$

§ 6.

Eine reelle Umkehrformel für die Laplace-Transformation.

In § 5 wurde bei dem Existenzbeweis für die Darstellung einer Funktion $\psi(s)$ aus $\mathfrak{H}_*^{p'}$, $1 < p' \leqq 2$, auch eine Formel für die darstellende Funktion $\varphi(t)$ mitgeliefert, die die Werte von $\psi(s)$ auf einer Vertikalen, also im Komplexen benutzt. Für den Fall $p = 2$ kann man aber eine andere Umkehrformel angeben, in der nur die Werte von $\psi(s)$ im Reellen gebraucht werden, was besonders für praktische Zwecke wertvoll ist, wo man $\psi(s)$ meist nur für reelle s kennt. Die folgende Herleitung dieser Formel beruht auf der Idee, daß man die Laplace-Transformation, deren Kern e^{-st} von dem Produkt der Variablen s und t abhängt, durch eine Substitution in eine solche verwandeln kann, deren Kern von der Summe der Variablen abhängt. Das Laplace-Integral nimmt dadurch die Gestalt einer Faltung an, die durch die Fourier-Transformation vermöge eines geeigneten „Faltungssatzes" in ein einfaches algebraisches Produkt verwandelt werden kann, wodurch sich die das Umkehrproblem darstellende Integralgleichung auf eine algebraische Gleichung reduziert[10]). Was die auf diesem Weg gefundene Formel angeht, so ist sie, wie in der Einleitung erwähnt, in etwas anderer Gestalt schon von Paley und Wiener, ebenfalls unter Heranziehung der Fourier-Transformation, aufgestellt worden. Es fehlt bei ihnen aber die jetzt durch Satz 1 ermöglichte exakte Abgrenzung des Funktionenbereichs der $\psi(s)$, für die sie gültig ist. Auch ist die Ableitung etwas unübersichtlich, weil kein allgemeiner Faltungssatz an die Spitze gestellt ist.

Satz 6. *Dann und nur dann, wenn $\psi(s)$ zur Klasse $\mathfrak{H}_*^2$ gehört, ist (nach Satz 1) $\psi(s)$ die Laplace-Transformierte (1. 1) einer Funktion $\varphi(t)$ aus $L^2(0, \infty)$, die sich aus den Werten von $\psi(s)$ längs der reellen Achse so berechnen läßt:*

$$\varphi(t) = \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty}^{(2)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(s)\, ds \int_0^{a} \Re \frac{(st)^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)} dy.$$

Beweis: In der Darstellung

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t)\, dt$$

---

[10]) Mit dieser Methode ist in Doetsch [4] die Umkehrung der Gauß-Transformation bewerkstelligt; siehe die allgemeine Formulierung S. 296. Die Methode ermöglicht z. B. auch einen außerordentlich übersichtlichen Beweis der bekannten Watsonschen Ergebnisse über „general transforms" (Bestimmung aller involutorischen Transformationen) und verwandter Sätze, siehe Doetsch [5], [6].

der zu $\mathfrak{H}_*^2$ gehörigen Funktion $\psi(s)$ setzen wir

$$t = e^{\xi}, \quad s = e^{x}.$$

Das ergibt:

$$\psi(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x + \xi} \varphi(e^{\xi}) e^{\xi} d\xi$$

oder

$$e^{x/2} \psi(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x+\xi}{2}} e^{-e^x + \xi} [e^{\xi/2} \varphi(e^{\xi})] d\xi.$$

Mit

$$e^{x/2} \varphi(e^x) = F(x), \quad e^{x/2} \psi(e^x) = G(x), \quad e^{x/2} e^{-e^x} = \Theta(x)$$

nimmt die Transformation die Gestalt an:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x+\xi) F(\xi) d\xi = \Theta(x) * F(-x)$$

siehe die Definition des Faltungssymbols in Hilfssatz 6). Dabei wissen wir auf Grund von Satz 1, daß

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(e^{\xi})|^2 e^{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi)|^2 d\xi$$

konvergiert, so daß $F(x)$ zur Klasse $L^2(-\infty, \infty)$ gehört. Das gleiche gilt von $\Theta(x)$. Also existieren in $L^2(-\infty, \infty)$ die Fourier-Transformierten

$$\mathfrak{F}^2\{F; y\} = f(y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}^2\{\Theta; y\} = \vartheta(y),$$

wobei explizit

$$\vartheta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} e^{\frac{x}{2}} e^{-e^x} dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2} - iy} e^{-t} \frac{dt}{t} = \Gamma(\tfrac{1}{2} - iy)$$

ist. Bekanntlich gilt:

$$|\Gamma(\tfrac{1}{2} - iy)| \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}|y|};$$

also ist $\vartheta(y)$ beschränkt und $\vartheta(y) f(-y)$ gehört zu $L^2(-\infty, \infty)$. Nach Hilfssatz 6 ist dann auch $G(x)$ aus $L^2(-\infty, \infty)$, $g(y) = \mathfrak{F}^2\{G; y\}$ vorhanden und

$$g(y) = \vartheta(y) f(-y),$$

so daß man erhält:

$$f(y) = \frac{g(-y)}{\vartheta(-y)} = \frac{g(-y)}{\Gamma(\frac{1}{2} + iy)}.$$

Da $f(y)$ zu $L^2(-\infty, \infty)$ gehört, ergibt sich das zugehörige $F(x)$ nach Hilfssatz 4 so:

$$F(x) = \underset{\alpha\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{ixy} \frac{g(-y)}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)}\, dy$$

oder explizit:

$$F(x) = \underset{\alpha\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{ixy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)}\, dy \underset{\beta\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{iy\xi} G(\xi)\, d\xi.$$

Für die ursprüngliche Gestalt der Transformation bedeutet das:

$$e^{x/2}\varphi(e^x) = \underset{x\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{ixy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)} dy \underset{\beta\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \int_{-\beta}^{+\beta} e^{iy\xi} e^{\xi/2}\, \psi(e^\xi)\, d\xi$$

oder

$$\varphi(t) = \underset{\alpha\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{t^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)}\, dy \underset{\gamma\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \int_{\gamma^{-1}}^{\gamma} s^{-\frac{1}{2}+iy}\, \psi(s)\, ds.$$

Aus ähnlichen Gründen wie am Schluß von § 4 kann man hier $\int_{-\alpha}^{+\alpha} dy \underset{\gamma\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}}$ durch $\lim_{\gamma\to\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} dy$ ersetzen. Außerdem darf man die Reihenfolge der beiden Integrationen vertauschen und erhält:

$$\varphi(t) = \underset{\alpha\to\infty}{\overset{(2)}{\text{l. i. m.}}} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi(s)\, ds \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(ts)^{-\frac{1}{2}-iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)}\, dy.$$

Hier kann man noch

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{(ts)^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)} dy = \int_0^\alpha + \int_{-\alpha}^0 = \int_0^\alpha \left(\frac{(ts)^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)} + \frac{(ts)^{-\frac{1}{2}-iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}-iy)} \right) dy$$

$$= 2 \int_0^\alpha \Re \frac{(ts)^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)}\, dy$$

setzen.

Um die Formel für $\varphi(t)$ praktisch zu verwerten, müßte man eine Tabelle der Funktion

$$E(w, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{w^{-\frac{1}{2}+iy}}{\Gamma(\frac{1}{2}+iy)} dy$$

haben, die übrigens in Analogie zu den Abschnitten $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{w^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$ der Exponentialreihe steht. Bei $E(w, \alpha)$ wird $\frac{w^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$ nicht nach ν summiert, sondern integriert, und zwar längs der Geraden $\Re\, \nu = -\frac{1}{2}$. Vermutlich tritt diese Funktion auch sonst in der Analysis auf.

Wir wollen für die Abbildung der transzendenten Relation $G(x) = \Theta(x) * F(-x)$ auf die algebraische $g(y) = \vartheta(y) f(-y)$ noch ein nicht uninteressantes spezielles Beispiel anführen. Zu der der Klasse $L^2(0, \infty)$ angehörenden Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{t}}$$

gehört die Laplace-Transformierte[11])

$$\psi(s) = e^{-2\sqrt{s}}.$$

Die entsprechenden Funktionen F und G sind:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x} e^{-e^{-x}}, \quad G(x) = e^{x/2} e^{-2e^{x/2}};$$

ihre Fourier-Transformierten lauten:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1 + iy), \quad g(y) = 4^{iy}\, \Gamma(1 - 2iy).$$

Setzen wir diese in die Gleichung $g(y) = \vartheta(y) f(-y)$ ein, so steht da:

$$4^{iy}\, \Gamma(1 - 2iy) = \Gamma(\tfrac{1}{2} - iy)\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(1 - iy).$$

Diese algebraische Funktionalgleichung gilt wegen der Regularität der Γ-Funktion auch, wenn wir $-iy$ durch die komplexe Variable z ersetzen:

$$4^z\, \Gamma(1 + 2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1 + z)\, \Gamma(\tfrac{1}{2} + z)$$

oder auch:

$$\Gamma(2z) = \frac{4^{-z}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\, \Gamma(\tfrac{1}{2} + z).$$

Das ist die bekannte „Verdoppelungsformel" der Γ-Funktion, die demnach mit der Formel

$$e^{-2\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(st + \frac{1}{t}\right)} dt$$

„äquivalent" ist.

[11]) Einen einfachen Beweis siehe in Doetsch [3], S. 622, Fußnote 14.

Literaturverzeichnis.

S. Bernstein.

[1] Sur les fonctions absolument monotones. Acta Math. 52 (1929), S. 1—66.

G. Doetsch.

[1] Über die obere Grenze des absoluten Betrags einer analytischen Funktion auf Geraden. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 237—240.

[2] Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformation. Sitzungsber. Berl. Akad., phys.-math. Klasse, 1930, S. 144—157.

[3] Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 613—628.

[4] Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 283—318.

[5] Beitrag zu Watsons „General Transforms". Math. Ann. 113 (1936), S. 226—241.

[6] Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen. Math. Ann. 113.

E. Hille.

[1] On Laplace integrals. 8. Skand. Math. Kongr. Stockholm 1934, S. 216—227.

E. Hille und J. D. Tamarkin.

[1] On the theory of Fourier transforms. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), S. 768—774.

[2] On the absolute integrability of Fourier transforms. Fundamenta Math. 25 (1935), S. 329—352.

R. Paley und N. Wiener.

[1] Fourier transforms in the complex domain. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 19, 1934.

E. C. Titchmarsh.

[1] A contribution to the theory of Fourier transforms. Proc. Lond. Math. Soc. (2 23 (1925), S. 279—289.

[2] The theory of functions. Oxford, 1932.

F. Tricomi.

[1] Über Doetschs Umkehrformel der Gauß-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation. Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 720—726.

D. V. Widder.

[1] A classification of generating functions. Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), S. 244—298.

(Eingegangen am 12. August 1936.)

Über die partielle Differentialgleichung

$$f(x, y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y).$$

II.

Von

E. Kamke in Tübingen.

---

1. In der vorangehenden Arbeit[1]) mit dem gleichen Titel war ein Existenzsatz „im Großen" für die Integrale der im Titel genannten Differentialgleichung bewiesen. Hier soll fast der gleiche Satz auf eine andere Art bewiesen werden, bei welcher der „topologische" Teil des früheren Beweises ausgemerzt ist. Mit Rücksicht auf gewisse Anwendungen, die auf eine Frage der Differentialgeometrie und auf die Transformation von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gemacht werden sollen (Nr. 4 und 5), beweise ich gleich den folgenden Satz, der sich auf zwei Differentialgleichungen bezieht, die durch eine Ungleichung miteinander gekoppelt sind:

Satz 1. *Die Funktionen* $f_\nu(x, y)$, $g_\nu(x, y)$, $h_\nu(x, y)$ $(\nu = 1, 2)$ *mögen in dem einfach zusammenhängenden Gebiet* $\mathfrak{G}$ *der* x, y*-Ebene zur Klasse* D_k[2]) *gehören* $(k \geqq 1)$; *ferner sei ständig*

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 > 0. \tag{1}$$

a) *Dann gibt es für jedes beschränkte Gebiet* $\mathfrak{g}$, *das total in* $\mathfrak{G}$ *liegt, Funktionen* $z_\nu(x, y)$, *die der Klasse* D_k *angehören und in* $\mathfrak{g}$ *Integrale der beiden Differentialgleichungen*

$$f_\nu(x, y)\,\frac{\partial z_\nu}{\partial x} + g_\nu(x, y)\,\frac{\partial z_\nu}{\partial y} = h_\nu(x, y) \qquad (\nu = 1, 2) \tag{2}$$

sind.

b) *Sind diese Gleichungen homogen, d. h. ist* $h_1 \equiv h_2 \equiv 0$, *so gibt es in* $\mathfrak{g}$ *Integrale* $z_1 = U(x, y)$ *und* $z_2 = V(x, y)$, *die zu* D_k *gehören, für die*

$$U_x V_y - U_y V_x > 0 \tag{3}$$

ist und durch die das Gebiet $\mathfrak{g}$ *umkehrbar eindeutig auf ein Gebiet der* U, V*-Ebene abgebildet wird.*

---

[1]) Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 56—66.

[2]) Eine Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ gehört zur Klasse D_k $(k \geqq 1)$, wenn für F alle partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschl. vorhanden und stetig sind; zur Klasse D_0, wenn F stetig ist.

Ist eine einzige Differentialgleichung

$$f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y) \tag{4}$$

gegeben und erfüllen $f_1=f$, $g_1=g$, $h_1=h$ die obigen Voraussetzungen, wobei jedoch (1) durch

$$f^2+g^2>0 \tag{1a}$$

zu ersetzen ist, so ist, wenn $f_2=-g$, $g_2=f$, $h_2=0$ gesetzt wird, der Satz 1 anwendbar und liefert

a) die Existenz eines Integrals von (4) in $\mathfrak{g}$;

b) außerdem für den Fall einer homogenen Gleichung (4) die Existenz eines Hauptintegrals $U(x,y)$ mit $U_x^2+U_y^2>0$.

Das ist im wesentlichen[3]) der Hauptsatz der vorangehenden Arbeit[4]).

2. Zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Sind die Funktionen $a_\nu(x,y)$, $b_\nu(x,y)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig und hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{pmatrix}$$

an jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ den Rang 1, so gibt es in $\mathfrak{G}$ eine stetige Funktion $\alpha(x,y)$ derart, daß auch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_n, \cos\alpha \\ b_1, \ldots, b_n, \sin\alpha \end{pmatrix}$$

---

[3]) A. a. O.[1]) konnte $\mathfrak{G}$ beliebig sein; $\mathfrak{g}$ sollte einfach zusammenhängen, brauchte aber nicht beschränkt zu sein; für die Funktionen f und g war daher in $\mathfrak{g}$ ihre Beschränktheit besonders gefordert.

[4]) Erst nach Erscheinen von [1]) habe ich Kenntnis von zwei früher erschienenen Arbeiten erhalten, die sich mit demselben Gegenstand beschäftigen. Frl. Maria Cibrario [Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (6) **13** (1931), S. 26—31] läßt zu, daß h auch noch von z abhängt, muß dann aber das obige $\mathfrak{g}$ wesentlich einschränken. Herr Ważewski hat in einem 1932 in Turnu-Severin gehaltenen Vortrag (abgedruckt in Mathematica **9** (1935), S. 179—181) für den Fall $h\equiv 0$ darauf hingewiesen, daß der Satz sich mit der auch von mir in [1]) benutzten Methode beweisen läßt, daß aber ein entsprechender Existenzsatz für die Gleichung

$$f(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+h(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (f^2+g^2+h^2>0)$$

nicht gilt. Unabhängig von Herrn Ważewski hat das letztere auch Herr Digel durch das folgende, besonders einfache Beispiel gezeigt, das ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Digel verdanke:

$$\{(1-r^2)x-y\}\frac{\partial w}{\partial x}+\{(1-r^2)y+x\}\frac{\partial w}{\partial y}-2z\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{*}$$

mit $r^2=x^2+y^2$. Die Gleichung ist in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ zu betrachten, das aus dem x, y, z-Raum durch Herausnahme der Punkte $z\leqq 0$

an jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ den Rang 1 hat, d. h. daß für passend gewählte Funktionen $\lambda_\nu(x, y)$

$$a_\nu = \lambda_\nu \cos\alpha, \quad b_\nu = \lambda_\nu \sin\alpha \tag{5}$$

ist. Für α kann dabei noch vorgeschrieben werden, daß der Wert an einer gegebenen Stelle x_0, y_0 in einem gegebenen Intervall

$$\alpha_0 - \frac{\pi}{2} \leqq \alpha(x_0, y_0) < \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

liegt[5]).

Beweis: Es sei $c_\nu(x, y)$ die komplexe Zahl

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{a_\nu + i b_\nu}{\sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2}} & \text{für } a_\nu^2 + b_\nu^2 > 0, \\ 0 & \text{für } a_\nu = b_\nu = 0. \end{cases}$$

Ist an einer Stelle x, y sowohl $c_\mu \neq 0$ als auch $c_\nu \neq 0$, so ist an dieser Stelle $c_\mu = \pm c_\nu$.

Es sei nun x_0, y_0 ein fester Punkt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{w}$ ein einfacher Treppenzug, der von x_0, y_0 in $\mathfrak{G}$ nach dem Punkt ξ, η führt. Dann kann zunächst längs $\mathfrak{w}$ eine stetige Funktion $\alpha(x, y)$ so definiert werden, daß (5) längs $\mathfrak{w}$ gilt. Denn für jeden Punkt des Weges gibt es eine Umgebung, für deren sämtliche Punkte ein gewisses $c_\nu \neq 0$ ist. Mit dem Borelschen Überdeckungssatz ergibt sich eine Einteilung des Weges $\mathfrak{w}$ in endlich viele abgeschlossene Stücke $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_p$ derart, daß in jedem $\mathfrak{w}_\nu$ ein gewisses $c_{k_\nu} \neq 0$ ist und zugleich der Arcus dieses c bei passender Normierung in $\mathfrak{w}_\nu$ eine Schwankung $< \pi$ hat. Für den Punkt x_0, y_0 lege man nun einen Winkel $\alpha(x_0, y_0)$ so fest, daß bei passender Normierung des Arcus für ein $\varepsilon_1 = \pm 1$

$$\alpha(x_0, y_0) = \arc \varepsilon_1 c_{k_1}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \alpha_0 - \frac{\pi}{2} \leqq \alpha(x_0, y_0) < \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$$

ist, und ferner für die Punkte x, y von $\mathfrak{w}_1$, Winkel $\alpha(x, y)$ so, daß bei geeigneter Normierung des Arcus

$$\alpha(x, y) = \arc \varepsilon_1 c_{k_1}(x, y) \quad \text{und} \quad |\alpha(x, y) - \alpha(x_0, y_0)| < \pi$$

---

der z-Achse entsteht. Das System der charakteristischen Gleichungen läßt sich leicht integrieren; zu den Charakteristiken gehört u. a. der Kreis $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Jedes Gebiet $\mathfrak{g}$, das diesen Kreis enthält, hat ein Teilgebiet, in dem jedes Integral von (*) konstant ist.

Ich benutze die Gelegenheit zur Richtigstellung einiger Druckfehler in [1]): es muß heißen S. 59, Formel (15): $\varphi_3\,\psi_2$ statt $\varphi_3\,\psi_3$; S. 62, Zeile b), γ): $\mathfrak{s}_{n-1}$ statt $\mathfrak{s}_n$ in dem letzten Glied der Summe; S. 58, Zeile 7 von unten ist „partielle" zu streichen.

[5]) Der Hilfssatz ist eine Verschärfung eines für p-reihige Matrizen von Herrn Ważewski, Compositio Mathematica 2 (1935), S. 63—68, bewiesenen Satzes für den Fall $p = 2$.

ist. Nach dem Vorangehenden ist das möglich, und wegen der Stetigkeit von c_{k_1} ist bei dieser Normierung auch α längs $\mathfrak{w}_1$ stetig. Für den Endpunkt x_1, y_1 von $\mathfrak{w}_1$ ist $\varepsilon_1 c_{k_1}(x_1, y_1) = \varepsilon_2 c_{k_2}(x_1, y_1)$ mit $\varepsilon_2 = \pm 1$. Man kann nun für die Punkte x, y von $\mathfrak{w}_2$ eine Funktion $\alpha(x, y)$ so festlegen, daß in $\mathfrak{w}_2$

$$\alpha(x, y) = \text{arc } \varepsilon_2 c_{k_2}(x, y) \quad \text{und} \quad |\alpha(x, y) - \alpha(x_1, y_1)| < \pi$$

ist. Im Endpunkt x_2, y_2 von $\mathfrak{w}_2$ ist wieder $\varepsilon_2 c_{k_2} = \varepsilon_3 c_{k_3}$ mit $\varepsilon_3 = \pm 1$. Man kann daher in der geschilderten Weise fortfahren und erhält schließlich eine längs $\mathfrak{w}$ definierte stetige Funktion, für die (5) längs $\mathfrak{w}$ erfüllt ist.

Wie man leicht sieht, hängt diese Funktion bei gegebenem $\mathfrak{w}$ und bei gegebenem Anfangswert $\alpha(x_0, y_0)$ nicht von der zu ihrer Definition benutzten Einteilung des Weges ab und auch nicht von den verwendeten c_ν. Aber es kann auch gezeigt werden, daß $\alpha(x, y)$ eine bloße Ortsfunktion, d. h. unabhängig von dem Wege ist, der von x_0, y_0 nach x, y führt[6]). Dafür braucht nur gezeigt zu werden, daß sich bei unserer Konstruktion der Funktion $\alpha(x, y)$ längs irgend eines geschlossenen Treppenzuges in $\mathfrak{w}$ bei der Rückkehr zum Anfangspunkt wieder der anfängliche Wert für α ergibt. Wäre dieses für ein gewisses Treppenpolygon nicht der Fall, so müßte das, wie sich bei der Zerlegung des Polygons durch Parallelen zu den Koordinatenachsen ergibt (hier wird benutzt, daß $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängt), auch schon für gewisse beliebig kleine und ineinander geschachtelte Rechtecke nicht zutreffen. Diese Rechtecke haben einen gemeinsamen Punkt ξ_0, η_0 in $\mathfrak{G}$, und man kann eine Umgebung dieses Punktes so wählen, daß in ihr ein $c_\nu \neq 0$ ist und der Arcus dieses c_ν eine Schwankung $< \pi$ hat. In dieser Umgebung ist dann aber $\alpha(x, y)$ für jeden zulässigen Anfangswert $\alpha(\xi_0, \eta_0)$ so als stetige Funktion wählbar, daß $\alpha = \text{arc } \varepsilon c_\nu$ mit einem $\varepsilon = \pm 1$ gilt, und daraus folgt der gewünschte Widerspruch.

Für jede der zulässigen Wahlen des Anfangswertes $\alpha(x_0, y_0)$ gibt es somit in $\mathfrak{G}$ eine Ortsfunktion $\alpha(x, y)$, die längs jedes von x_0, y_0 ausgehenden Treppenzuges stetig ist und für die (5) in $\mathfrak{G}$ gilt. Dann ist aber diese Funktion $\alpha(x, y)$ schließlich auch eine stetige Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y. Denn ist x_1, y_1 irgend ein Punkt von $\mathfrak{G}$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von x_1, y_1, in der ein $c_\nu(x, y) \neq 0$ ist und für ein $\varepsilon = \pm 1$ bei geeigneter Normierung des Arcus $\alpha(x_1, y_1) = \text{arc } \varepsilon c_\nu(x_1, y_1)$ ist und arc εc_ν in $\mathfrak{U}$ eine Schwankung $< \pi$ hat. Daraus folgt $\alpha(x, y) = \text{arc } \varepsilon c_\nu(x, y)$ in $\mathfrak{U}$, also ist α stetig an der Stelle x_1, y_1.

---

[6]) Vgl. dazu etwa den Beweis des Monodromiesatzes oder des Cauchyschen Integralsatzes in der Funktionentheorie.

Zusatz: Gehören die Funktionen a_ν, b_ν überdies zur Klasse D_k, so gehört auch $\alpha(x,y)$ zu dieser Klasse. Denn für eine Umgebung einer beliebig gegebenen Stelle gibt es ein $\varepsilon=\pm 1$ und ein ν, so daß

$$\alpha(x,y)=\operatorname{arc}\varepsilon c_\nu(x,y)=\operatorname{arc}\varepsilon\frac{a_\nu+ib_\nu}{\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}}$$

ist. Da a_ν, b_ν zur Klasse D_k gehören, folgt hieraus, daß auch α zu dieser Klasse gehört.

Hilfssatz 2[7]: Ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine offene Punktmenge in der x,y-Ebene und $\mathfrak{g}$ eine beschränkte offene Punktmenge, die total in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt, so gibt es eine Funktion $\vartheta(x,y)$, die in der ganzen Ebene mit Ableitungen jeder Ordnung versehen ist, die Ungleichungen $0\leqq\vartheta\leqq 1$ erfüllt, in $\mathfrak{g}$ den Wert 1 und in den nicht zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehörigen Punkten den Wert 0 hat.

3. Beweis des Satzes 1: Nach dem Hilfssatz 1 nebst Zusatz[8]) gibt es in $\mathfrak{G}$ zu f_ν, g_ν Funktionen $\alpha(x,y)$ und $\beta(x,y)$ der Klasse D_k, so daß

$$f_1=\sqrt{f_1^2+g_1^2}\cos\alpha,\quad g_1=\sqrt{f_1^2+g_1^2}\sin\alpha,$$
$$f_2=\sqrt{f_2^2+g_2^2}\sin\beta,\quad g_2=\sqrt{f_2^2+g_2^2}\cos\beta$$

und an einer Stelle x_0, y_0

$$-\alpha(x_0,y_0)-\frac{\pi}{2}\leqq\beta(x_0,y_0)<-\alpha(x_0,y_0)+\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

ist. Wird noch

$$\gamma=\frac{h_1}{\sqrt{f_1^2+g_1^2}},\qquad\delta=\frac{h_2}{\sqrt{f_2^2+g_2^2}}$$

gesetzt, so sind die Gleichungen (2) gleichwertig mit

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{(a)} & \cos\alpha(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\alpha(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=\gamma(x,y),\\ \text{(b)} & \sin\beta(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\beta(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=\delta(x,y).\end{array}\right. \tag{7}$$

Die Bedingung (1) besagt jetzt

$$\cos(\alpha+\beta)>0$$

oder wegen (6).

$$|\alpha+\beta|<\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

---

[7]) A. Bielecki, Annales de la soc. polonaise de math. 10 (1932), S. 34—37. Mein etwa gleichzeitig gefundener Beweis ist nicht veröffentlicht; vgl. Jahresber. d. DMV 44 (1934), S. 160.

[8]) In dem hier vorliegenden Fall $n=1$ ändert die Funktion $\lambda(x,y)$ ihr Vorzeichen nicht und ist daher bei passender Wahl des Anfangswertes $\alpha(x_0,y_0)$ positiv.

Mit der Funktion $\vartheta(x, y)$ des Hilfssatzes 2 wird für eine beschränkte offene Punktmenge $\bar{\mathfrak{G}}$, die total in $\mathfrak{G}$ liegt und $\mathfrak{g}$ total enthält,

$$(9)\quad \begin{cases} f(x,y) = \begin{cases} \cos\alpha\vartheta \\ 1 \end{cases} & g(x,y) = \begin{cases} \sin\alpha\vartheta & \text{in } \mathfrak{G} \\ 0 & \text{außerhalb } \mathfrak{G} \end{cases} \\ F(x,y) = \begin{cases} \sin\beta\vartheta \\ 0 \end{cases} & G(x,y) = \begin{cases} \cos\beta\vartheta & \text{in } \mathfrak{G} \\ 1 & \text{außerhalb } \mathfrak{G} \end{cases} \\ h(x,y) = \begin{cases} \gamma\vartheta \\ 0 \end{cases} & H(x,y) = \begin{cases} \delta\vartheta & \text{in } \mathfrak{G} \\ 0 & \text{außerhalb } \mathfrak{G} \end{cases} \end{cases}$$

gesetzt. Dann gehören auch diese Funktionen $f, \ldots, H$ zu D_k, und zwar in der ganzen Ebene. Die Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \text{(a)} & f\frac{\partial z}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial y} = h, \\ \text{(b)} & F\frac{\partial z}{\partial x} + G\frac{\partial z}{\partial y} = H \end{cases}$$

stimmen in $\mathfrak{g}$ mit den Gleichungen (7) überein, und es ist in $\mathfrak{G}$

$$fG - gF = \cos(\alpha+\beta)\vartheta,$$

also wegen (8), $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und (9) in der ganzen Ebene

$$(11)\qquad fG - gF > 0.$$

Zu (10) gehören die homogenen Gleichungen

$$(12\,\text{a})\qquad f\frac{\partial z}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(12\,\text{b})\qquad F\frac{\partial z}{\partial x} + G\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

mit den charakteristischen Gleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y), \\ \text{(b)} & \frac{dx}{dt} = F(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y). \end{cases}$$

Wegen (11) haben je zwei Charakteristiken der beiden Gleichungen (12) höchstens einen Punkt gemeinsam. Aber jede Charakteristik von (12 a) hat mit jeder Charakteristik von (12 b) auch mindestens einen und daher genau einen Punkt gemeinsam. Denn außerhalb eines hinreichend großen Quadrats $\mathfrak{Q}$ ist wegen (9) und Hilfssatz 2 jede Charakteristik von (12 a) eine horizontale Gerade und jede Charakteristik von (12 b) eine vertikale Gerade. Jede Charakteristik der einen Gleichung (12) hat also Punkte auf beiden Seiten jeder Charakteristik der andern Gleichung (12) und hat daher mit dieser Punkte gemeinsam.

Es seien nun

$$(14)\qquad x = \varphi(t,\xi,\eta), \quad y = \psi(t,\xi,\eta), \quad z = \chi(t,\xi,\eta,\zeta)$$

die charakteristischen Funktionen der Gleichung (10a). Da f, g, h der Klasse D_k angehören, gilt dasselbe von den Funktionen (14). Wegen der speziellen Art der Gleichung (10a) ist

$$\chi = \zeta + \int_0^t h(\varphi, \psi)\, dt.$$

Weiter sei

$$x = \Phi(T), \quad y = \Psi(T) \qquad (-\infty < T < +\infty)$$

eine Charakteristik von (12b) und $\overline{X}(T)$ irgendeine für $-\infty < T < +\infty$ k-mal stetig differenzierbare Funktion mit $\overline{X}'(T) > 0$. Durch jeden Punkt der Kurve

$$x = \Phi(T), \quad y = \Psi(T), \quad z = \overline{X}(T)$$

geht eine Charakteristik (14), und zu jedem Punkt x, y gibt es genau ein $t = r$ und $T = s$, so daß

$$x = \varphi(r, \Phi(s), \Psi(s)), \quad y = \psi(r, \Phi(s), \Psi(s))$$

ist. Für dieses Zahlenpaar r, s wird nun

$$U(x, y) = \overline{X}(s) + \int_0^r h(\varphi(t, a, b), \psi(t, a, b))\, dt$$

mit $a = \Phi(s)$, $b = \Psi(s)$ gesetzt.

Diese Funktion $U(x, y)$ ist dann in der ganzen x, y-Ebene ein Integral der Gleichung (10a). Das ist bereits in [1]), Nr. 4 und 5 bewiesen. Zugleich ergibt sich aus den dortigen Gleichungen (14) und (18), daß U zur Klasse D_k gehört. Schließlich folgt für den Fall einer homogenen Gleichung aus der Definition von U, daß $U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2)$ genau dann gilt, wenn die Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 derselben Charakteristik von (12a) angehören.

Läßt man in (10) bis (13) die Gleichungen (a) und (b) ihre Rollen tauschen und wählt man statt $\overline{X}(T)$ eine Funktion $\overline{\chi}(t)$ der Klasse D_k mit $\overline{\chi}'(t) < 0$, so gelangt man zu einem Integral $V(x, y)$ der Gleichung (10b), das in der ganzen Ebene existiert, zur Klasse D_k gehört und bei dem im Fall einer homogenen Gleichung (10b) $V(x_1, y_1) = V(x_2, y_2)$ genau dann gilt, wenn x_1, y_1 und x_2, y_2 derselben Charakteristik von (12b) angehören.

Da die Gleichungen (10) für das Gebiet $\mathfrak{g}$ dasselbe besagen wie die Gleichungen (2), ist der Teil a) des Satzes 1 hiermit schon bewiesen.

Es bleibt also allein noch der Fall homogener Gleichungen übrig. In diesem Fall ist nach [1]) (14)

$$U_x = -\frac{1}{N} g(x, y)\, \overline{X}'(s), \qquad U_y = \frac{1}{N} f(x, y)\, \overline{X}'(s)$$

und entsprechend

$$V_x = -\frac{1}{n} G(x,y)\,\bar{\chi}'(S), \qquad V_y = \frac{1}{n} F(x,y)\,\bar{\chi}'(S);$$

dabei ist

$$N = [f(a,b)\,\Psi'(s) - g(a,b)\,\Phi'(s)]\,[\varphi_2\,\psi_3 - \varphi_3\,\psi_2]$$

$$= [f(a,b)\,G(a,b) - g(a,b)\,F(a,b)]\,e^{\int_0^T [f_x(\varphi,\psi) + g_y(\varphi,\psi)]\,dt} > 0$$

und entsprechend

$$n = [F(a,b)\,g(a,b) - G(a,b)\,f(a\,b)]e^{\int_0^R F_x(\Phi,\Psi) + G_y(\Phi,\Psi)]\,dT} < 0,$$

also

$$U_x V_y - U_y V_x = \frac{1}{Nn}\,\bar{X}'(s)\,\bar{\chi}'(S)\,[f(x,y)\,G(x,y) - F(x,y)\,g(x,y) > 0,$$

womit (3) bewiesen ist.

Hieraus folgt, daß g durch die Funktionen U, V jedenfalls auf eine offene Menge g' der U,V-Ebene abgebildet wird. Diese Menge hängt, da g ein Gebiet ist, zusammen und ist daher ein Gebiet. Die Abbildung ist aber auch eineindeutig. Denn nach dem Vorangehenden ist $U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2)$ und zugleich $V(x_1, y_1) = V(x_2, y_2)$ genau dann, wenn die Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 sowohl derselben Charakteristik von (12a) als auch derselben Charakteristik von (12b) angehören, und dieses tritt nur ein, wenn die beiden Punkte zusammenfallen. Damit ist auch der Teil b) des Satzes 1 bewiesen.

Anmerkung: Der Satz gilt auch, wenn die rechten Seiten $h_\nu(x,y)$ in (2) durch gewisse allgemeinere Funktionen $h_\nu(x,y,z)$ ersetzt werden; diese müssen nur so beschaffen sein, daß die Charakteristiken (14) von (10a) sowie die Charakteristiken von (10b) für alle t existieren[9]).

4. Erste Anwendung des Satzes 1. Bei differentialgeometrischen Untersuchungen werden häufig Parameterdarstellungen von Flächen benutzt, bei denen die Parameterlinien die Krümmungslinien sind. Ob und unter welchen Voraussetzungen man „im großen" von einer beliebig gegebenen Parameterdarstellung zu einer Darstellung dieser Art übergehen kann, diese Frage scheint bisher offen geblieben zu sein. Mit Satz 1 ergibt sich darüber der folgende

Satz 2: *Es sei*[10])

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2) \tag{15}$$

eine Fläche im dreidimensionalen Euklidischen Raum; die Parameter u^1, u^2 sind auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ der u^1, u^2-Ebene be-

[9]) Beispiele solcher Funktionen sind in [1]), S. 66 angegeben.

[10]) In den Bezeichnungen folge ich L. Bieberbach, Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1932.

schränkt, in diesem Gebiet habe $\mathfrak{x}$ *stetige partielle Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich; ferner möge die Fläche nur reguläre Punkte enthalten, d. h. stets* $\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2 \neq 0$ *ergeben und frei von Flach- und Nabelpunkten sein, d. h. die Matrix*

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$$

möge überall den Rang 2 haben; hieraus folgt, daß an jeder Stelle die beiden Hauptkrümmungsrichtungen existieren.

Dann gibt es für jedes beschränkte, total in $\mathfrak{G}$ *liegende Teilgebiet* $\mathfrak{g}$ *eine Parameterdarstellung der Fläche, derart daß die Parameterlinien die Krümmungslinien sind.*

Beweis: Die Behauptung besagt: In einem Gebiet $\mathfrak{h}$ der v^1, v^2-Ebene gibt es Funktionen

$$u^1 = u^1(v^1, v^2), \quad u^2 = u^2(v^1, v^2) \tag{16}$$

mit folgenden Eigenschaften: die Funktionen haben in $\mathfrak{h}$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung; es ist stets

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(v^1, v^2)} > 0;$$

$\mathfrak{h}$ wird durch (16) eineindeutig auf $\mathfrak{g}$ abgebildet, und wenn K_1, K_2 $(K_1 < K_2)$ die Hauptkrümmungen an der Stelle u^1, u^2 der Fläche (15) sind, bestehen die Gleichungen [11])

$$(K_\mu g_{\nu 1} - L_{\nu 1})\, u^1_\mu + (K_\mu g_{\nu 2} - L_{\nu 2})\, u^2_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2;\ \nu = 1, 2). \tag{17}$$

Diese Behauptung besagt dasselbe wie die folgende:

Es gibt Funktionen

$$v^1 = v^1(u^1, u^2), \quad v^2 = v^2(u^1, u^2) \qquad (u^1, u^2 \text{ in } \mathfrak{g}) \tag{18}$$

mit folgenden Eigenschaften: Die Funktionen haben in $\mathfrak{g}$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung; es ist stets

$$\frac{\partial(v^1, v^2)}{\partial(u^1, u^2)} > 0; \tag{19}$$

---

[11]) Die Gleichungen (17) ergeben sich aus den Gleichungen bei Bieberbach, a. a. O., S. 57 (4) oder V. und K. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I, 4. Aufl., Berlin und Leipzig (1931), S. 97 (5) nach Ausführung der Parametertransformation (16) unter Berücksichtigung der Forderung, daß die Parameterlinien die Krümmungslinien sein sollen. Die Gleichungen haben gegenüber denen, die sich aus der Forderung ergeben, daß die mittleren Koeffizienten in den beiden transformierten Fundamentalformen Null sein sollen, den Vorzug, linear zu sein. — Wie üblich ist

$$u^\nu_\mu = \frac{\partial u^\nu}{\partial v^\mu}$$

gesetzt.

die aus (18) sich ergebenden Punkte v^1, v^2 erfüllen ein Gebiet $\mathfrak{h}$ der v^1, v^2-Ebene; $\mathfrak{g}$ wird durch (18) eineindeutig auf $\mathfrak{h}$ abgebildet; sind K_1, K_2 maximale und minimale Hauptkrümmung[12]), so bestehen die Gleichungen

$$(20) \qquad (K_\mu g_{\nu 1} - L_{\nu 1})\, v_2^\mu - (K_\mu g_{\nu 2} - L_{\nu 2})\, v_1^\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2;\ \nu = 1, 2).$$

Das Gleichungssystem enthält zur Bestimmung jeder der beiden Funktionen $v^\mu(u^1, u^2)$ zwei Gleichungen, deren Koeffizienten in $\mathfrak{G}$ existieren, dort der Klasse D_2 angehören und die Matrix

$$\begin{pmatrix} K_\mu g_{11} - L_{11}, & -(K_\mu g_{12} - L_{12}) \\ K_\mu g_{21} - L_{21}, & -(K_\mu g_{22} - L_{22}) \end{pmatrix}$$

bilden, die an jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ den Rang 1 hat. Nach dem Hilfssatz 1[13]) gibt es daher in $\mathfrak{G}$ Funktionen $\alpha_\nu(x, y)$ der Klasse D_2 derart, daß mit geeigneten Funktionen $\lambda_{\mu,\nu}(x, y)$ für $\mu = 1, 2$ und $\nu = 1, 2$

$$K_\mu g_{\nu 1} - L_{\nu 1} = \lambda_{\mu\nu} \cos \alpha_\mu, \qquad -(K_\mu g_{\nu 2} - L_{\nu 2}) = \lambda_{\mu\nu} \sin \alpha_\mu$$

ist. Wird $f_\mu = \sin \alpha_\mu$, $g_\mu = \cos \alpha_\mu$ gesetzt, so sind die vier Gleichungen (20) sicher erfüllt, wenn die zwei Gleichungen

$$(21) \qquad f_\mu v_1^\mu + g_\mu v_2^\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2)$$

erfüllt sind. In diesen Gleichungen gehören die Koeffizienten f_μ, g_μ in dem Gebiet $\mathfrak{G}$ zur Klasse D_2. Ferner ist überall in $\mathfrak{G}$

$$(22) \qquad f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0;$$

denn da weder ein Flachpunkt noch ein Nabelpunkt vorhanden ist, gibt es wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ und $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$ für jeden Punkt u^1, u^2 von $\mathfrak{G}$ ein ν, so daß

$$g_{\nu 1} L_{\nu 2} - g_{\nu 2} L_{\nu 1} \neq 0$$

ist; für dieses ν ist

$$\lambda_{1\nu} \lambda_{2\nu} (f_1 g_2 - f_2 g_1) = \begin{vmatrix} \lambda_{1\nu} f_1, & \lambda_{1\nu} g_1 \\ \lambda_{2\nu} f_2, & \lambda_{2\nu} g_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -(K_1 g_{\nu 2} - L_{\nu 2}), & K_1 g_{\nu 1} - L_{\nu 1} \\ -(K_2 g_{\nu 2} - L_{\nu 2}), & K_2 g_{\nu 1} - L_{\nu 1} \end{vmatrix} = (K_2 - K_1)(g_{\nu 1} L_{\nu 2} - g_{\nu 2} L_{\nu 1}) \neq 0,$$

also in der Tat (22) erfüllt. Indem man, falls nötig, noch f_2, g_2 durch $-f_2, -g_2$ ersetzt, kann man erreichen, daß in $\mathfrak{G}$ sogar ständig

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 > 0$$

ist. Dann sind gerade die Voraussetzungen des Satzes 1 mit $k = 2$, $h_\nu = 0$ und mit u^1, u^2, v^1, v^2 statt x, y, z_1, z_2 erfüllt, und der Satz 1 liefert die Behauptung, die hier noch zu beweisen war.

---

[12]) Gegenüber (17) sind also K_1 und K_2 vertauscht.

[13]) Für die Anwendung des Hilfssatzes vertausche man in der obigen Matrix die Zeilen mit den Spalten.

5. Zweite Anwendung des Satzes 1. Bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Gestalt

$$a(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

wird die Untersuchung in manchen Fällen erleichtert, wenn man die Gleichungen auf gewisse Normalformen transformiert. Wie das bei hyperbolischen und parabolischen Gleichungen „im Kleinen" geschehen kann, ist bekannt[14]). Bei hyperbolischen Gleichungen kann das Verfahren auch leicht auf Gebiete ausgedehnt werden, die von vier Charakteristiken begrenzt werden[15]). Mit Hilfe des Satzes 1 kann man wesentlich weiter gehen und die Durchführbarkeit der Transformation sowohl bei hyperbolischen als auch bei parabolischen Gleichungen für Gebiete nachzuweisen, die kaum noch irgendwelchen Einschränkungen unterliegen.

Satz 3: *Die Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ mögen in dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ der x, y-Ebene zur Klasse D_{k+2} $(k \geqq 0)$ gehören und die Ungleichung*

$$b^2 - 4ac > 0 \tag{23}$$

erfüllen. Es sei $\mathfrak{g}$ ein beschränktes, total in $\mathfrak{G}$ liegendes Teilgebiet, $z(x, y)$ in $\mathfrak{g}$ zur Klasse D_{k+2}[16]) gehörig und $f(x, y, z, u, v)$ für

$$x, y \text{ in } \mathfrak{g}, \quad z = z(x, y), \quad u = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial z}{\partial y}$$

definiert.

Dann gibt es in $\mathfrak{g}$ Funktionen

$$\xi = U(x, y), \quad \eta = V(x, y) \tag{24}$$

der Klasse D_{k+2} derart, daß $\mathfrak{g}$ durch sie eineindeutig auf ein Gebiet $\mathfrak{h}$ der ξ, η-Ebene abgebildet wird,

$$U_x V_y - U_y V_x > 0 \tag{25}$$

ist und durch Eintragen der Umkehrfunktionen

$$x = X(\xi, \eta), \quad y = Y(\xi, \eta) \tag{26}$$

in $z(x, y)$ eine Funktion $\zeta(\xi, \eta)$ der Klasse D_{k+2} entsteht, für die

$$a(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = B(\xi, \eta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta} - f - D(\xi, \eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - E(\xi, \eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \tag{27}$$

mit $B \neq 0$ und Funktionen B, D, E der Klasse D_k gilt.

---

[14]) Vgl. z. B. J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, 2. Auflage, Berlin und Leipzig 1929, S. 1 ff.

[15]) Maria Cibrario, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (6) 2 (1931) 115 f.

[16]) Daß hier wieder D_{k+2} steht, ist unwesentlich, es muß nur ein D_r mit $r \geqq 2$ sein.

Vorbemerkung: Unabhängig von den sonstigen Voraussetzungen des Satzes gilt bekanntlich folgende leicht nachzurechnende Tatsache: Gehören die Funktionen (24) in einem Gebiet $\mathfrak{g}$ zu D_2 und wird für eine Funktion $\zeta(\xi, \eta)$, die für den aus (24) sich ergebenden Wertebereich ξ, η ebenfalls zu D_2 gehört,

$$z(x, y) = \zeta(U(x, y), V(x, y))$$

gesetzt, so ist

$$(28) \qquad a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta} + C\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + E\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

mit

$$(29) \qquad \begin{cases} A = a U_x^2 + b U_x U_y + c U_y^2 \\ B = 2a U_x V_x + b(U_x V_y + U_y V_x) + 2c U_y V_y \\ C = a V_x^2 + b V_x V_y + c V_y^2 \\ D = a U_{xx} + b U_{xy} + c U_{yy} \\ E = a V_{xx} + b V_{xy} + c V_{yy}. \end{cases}$$

Beweis des Satzes 3: Setzt man

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

so gehören $\lambda_1(x, y)$ und $\lambda_2(x, y)$ in $\mathfrak{G}$ zur Klasse D_{k+2}, und jede der beiden Matrizen

$$(30) \qquad \begin{pmatrix} a, & -\lambda_2 \\ -\lambda_1, & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a, & -\lambda_1 \\ -\lambda_2, & c \end{pmatrix}$$

hat an jeder Stelle von $\mathfrak{G}$ den Rang 1. Nach Hilfssatz 1 gibt es daher in $\mathfrak{G}$ Funktionen $\alpha_1(x, y)$ und $\alpha_2(x, y)$ der Klasse D_{k+2}, so daß für passend gewählte Funktionen $\varrho_\nu(x, y)$, $\sigma_\nu(x, y)$ und mit $f_\nu = \cos\alpha_\nu$, $g_\nu = \sin\alpha_\nu$

$$(31) \qquad \begin{cases} a = \varrho_1 f_1, & -\lambda_1 = \varrho_1 g_1, \\ -\lambda_2 = \sigma_1 f_1, & c = \sigma_1 g_1 \end{cases}$$

und

$$(32) \qquad \begin{cases} a = \varrho_2 f_2, & -\lambda_2 = \varrho_2 g_2, \\ -\lambda_1 = \sigma_2 f_2, & c = \sigma_2 g_2, \end{cases}$$

ist. Dabei ist

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0;$$

denn es ist

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 \varrho_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1 g_1 \\ f_2 g_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho_1 f_1 + \varrho_2 f_2, & \varrho_1 g_1 + \varrho_2 g_2 \\ \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2, & \sigma_1 g_1 + \sigma_2 g_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & -(\lambda_1 + \lambda_2) \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} < 0.$$

Indem man nötigenfalls $f_2, g_2, \varrho_2, \sigma_2$ durch $-f_2, -g_2, -\varrho_2, -\sigma_2$ ersetzt, kann man erreichen, daß in dem ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$

(33) $$f_1 g_2 - f_2 g_1 > 0$$

ist. Dann ist auf die Gleichungen

(34) $$f_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial x} + g_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial y} = 0 \qquad (\nu = 1, 2)$$

der Satz 1 anwendbar. Er liefert in $\mathfrak{g}$ Funktionen $z_1 = U(x,y)$, $z_2 = V(x,y)$, die zur Klasse D_{k+2} gehören und die weiteren in Satz 1 unter b) angegebenen Eigenschaften haben. Insbesondere existieren also die Umkehrfunktionen (26) von (24) und gehören zur Klasse D_{k+2}. Ferner folgt aus (31) und (32) für die Integrale U, V der Gleichungen (34)

(35) $$\begin{aligned} a U_x - \lambda_1 U_y &= -\lambda_2 U_x + c U_y = 0, \\ a V_x - \lambda_2 V_y &= -\lambda_1 V_x + c V_y = 0. \end{aligned}$$

Damit wird in (29)

$$\begin{aligned} A &= C = 0, \\ B &= (\lambda_2 - \lambda_1)(U_x V_y - U_y V_x) \neq 0. \end{aligned}$$

Ferner gehören B, D, E zur Klasse D_k.

Satz 4: *Ersetzt man in Satz 3 die Ungleichung* (23) *durch*

(23 a) $$b^2 - 4ac = 0, \quad |a| + |c| > 0 \text{ in } \mathfrak{G},$$

so gilt der Satz 3 mit

(27 a) $$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f = C(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - f - D(\xi,\eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - E(\xi,\eta)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

statt (27), *wobei* $C \neq 0$ *ist und* C, D, E *der Klasse* D_k *angehören.*

Beweis: Die Funktionen λ_1, λ_2 des vorigen Beweises werden jetzt beide $-\frac{1}{2}b$. Aus den beiden Matrizen (30) wird die eine Matrix

(30 a) $$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

vom Rang 1. Es gibt daher in $\mathfrak{G}$ Funktionen f_1, g_1 der Klasse D_{k+2} und mit $f_1^2 + g_1^2 > 0$, so daß für gewisse Funktionen ϱ, σ

(31 a) $$\begin{cases} a = \varrho f_1, & \frac{1}{2}b = \varrho g_1, \\ \frac{1}{2}b = \sigma f_1, & c = \sigma g_1 \end{cases}$$

ist. Wird weiter

(32 a) $$f_2 = -g_1, \quad g_2 = f_1$$

gesetzt, so ist

(33) $$f_1 g_2 - f_2 g_1 > 0.$$

Nun werden wieder die Gleichungen (34) gebildet. Der Satz 1 führt dann wieder zu Funktionen $U(x,y)$, $V(x,y)$ in g. Dabei folgt mit (31a) und (32a) für die Integrale U, V von (34)

$$a U_x + \tfrac{1}{2} b U_y = \tfrac{1}{2} b U_x + c U_y = 0,$$
$$-\tfrac{1}{2} b V_x + a V_y = -c V_x + \tfrac{1}{2} b V_y = 0.$$

Hiermit wird in (29)

$$A = 0,$$
$$B = V_x (2 a U_x + b U_y) + V_y (b U_x + 2 c U_y) = 0,$$
$$C = (a + c)(V_x^2 + V_y^2) \neq 0,$$

da $V_x^2 + V_y^2 > 0$ ist, wegen $b^2 = 4 a c$ stets $a c \geqq 0$ ist und

$$|a| + |c| > 0$$

vorausgesetzt ist.

(Eingegangen am 15. August 1936.)

Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II.

Von

Willy Feller in Stockholm.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) wurde u. a. der Gültigkeitsbereich des klassischen Laplace-Ljapounoffschen Grenzwertsatzes genau abgegrenzt und es wurde ein Kriterium angegeben zur Feststellung, ob für eine vorgelegte Folge von Verteilungsfunktionen Konvergenz gegen die Gaußsche Normalfunktion $\Phi(x)$ statthat (in welchem Falle auch die Berechnung der beiden Folgen von zugehörigen Normierungsfaktoren möglich ist). Das erste Ziel der folgenden Ausführungen ist es, einer Anregung von Herrn Marcel Riesz folgend dieses Kriterium in eine wesentlich handlichere Form zu bringen, die zudem den Vorteil hat, den Zusammenhang mit den bekannten hinreichenden Bedingungen von Ljapounoff und von Lindeberg klarer hervortreten zu lassen. Das zweite Ziel dieser Arbeit ist die Beantwortung einer Frage, die bei der Behandlung des Spezialfalles von Folgen mit lauter gleichen Komponenten noch offen geblieben ist.

[1]) Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 40 (1935), im folgenden zur Abkürzung mit I zitiert. Ich benutze diese Gelegenheit zu folgenden beiden *Berichtigungen*:

a) Für den Satz über den Zusammenhang der Konvergenz einer Folge von Verteilungsfunktionen mit derjenigen der zugehörigen charakteristischen Funktionen, auf dem meine Beweise wesentlich beruhen, habe ich in Fußnote [10]), S. 529, Bochner zitiert und bemerkt, P. Lévy habe „einen etwas spezielleren Satz" bewiesen. Dieses war ein bedauerlicher Irrtum meinerseits: In Wirklichkeit stammt der genannte Satz *genau* in der von mir benutzten Form von Herrn P. Lévy.

b) Auf S. 548, Zeile 4 v. u. bitte ich

$$\int_{|x|>\frac{\varepsilon a_n}{4T}} dV_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{statt} \quad \int_{|x|<\eta a_n} dV_\nu(x) < \varepsilon$$

zu lesen.

Schließlich ist noch folgender Nachtrag von Interesse. Auf S. 524 und 531 wurde der hypothetische Fall beschränkter Normierungsfaktoren a_n ausdrücklich aus der Betrachtung ausgeschlossen, weil „man es hierbei nicht mit einem asymptotischen Gesetz zu tun hat, sondern mit der Frage, wie man $\Phi(x)$ in Komponenten aufspalten kann". Diese Frage hat nun nach Erscheinen von I eine befriedigende Antwort erhalten. Cramér bewies nämlich [„Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion", Math. Zeitschr. 41 (1936), und auch C. R. Acad. Sci., Paris 202

Es sei $\{V_k(x)\}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, also von Funktionen, die für alle reellen x definiert sind, nicht abnehmen und für $x \to \pm \infty$ die Grenzwerte 0 bzw. 1 haben, und es werde für das folgende

$$(1) \qquad W_1(x) = V_1(x), \quad W_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(x-y)\, d\, V_{n+1}(y)$$

gesetzt. Wir sagen dann zur Abkürzung[2]), *die Folge* $\{V_k(x)\}$ *gehöre zur Gaußschen Normalfunktion* $\Phi(x)$, *und zwar mit den Normierungsfaktoren* $\{a_n\}$, *wenn*

$$(2) \qquad W_n(a_n x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

und

$$(3) \qquad V_n(a_n x) \to E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

strebt. Die letzte Bedingung besagt wahrscheinlichkeitstheoretisch nur, daß der Einfluß der einzelnen Komponenten mit wachsendem n gegen Null abnimmt, d. h. daß die Konvergenz von $W_n(a_n x)$ nicht durch den überwiegenden Einfluß der Funktion $V_n(x)$ zustande kommt, die selbst nach passender Normierung gegen $\Phi(x)$ strebt[3]). Sie ist äquivalent mit der Forderung, daß $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ und $a_n \to \infty$ strebt. — Die allgemeinste Fragestellung in bezug auf den zentralen Grenzwertsatz lautet nun: *Wann gibt es zu einer vorgelegten Folge von Verteilungsfunktionen* $\{V_k(x)\}$ *zwei Folgen von Normierungskonstanten* $\{a_n\}$ *und* $\{b_n\}$ *derart, daß die Folge* $\{V_k(x + b_k)\}$ *mit den Normierungsfaktoren* $\{a_n\}$ *zu* $\Phi(x)$ *gehört, und wie kann man diese Normierungskonstanten gegebenenfalls berechnen?* Das Hauptergebnis von I war eine abschließende Antwort auf diese Frage, die nun hier folgendermaßen umgestaltet werden soll.

(1936)] folgenden, von P. Lévy wiederholt als Vermutung geäußerten Satz: Die Integralgleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x-y)\, d\, V_2(y) = \Phi(x)$, wo $V_k(x)$ Verteilungsfunktionen sind, hat nur die Lösung $V_k(x) = \Phi\left(\frac{x - m_k}{\sigma_k}\right)$ mit $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$, $m_1 + m_2 = 0$. Danach gehört zum ausgeschlossenen Fall nur die triviale Folge

$$V_\nu(x) = \Phi\left(\frac{x + b_\nu}{c_\nu}\right) \quad \text{mit} \quad \Sigma\, b_\nu = 0, \quad \Sigma\, c_\nu^2 = 1.$$

[2]) I., S. 524.

[3]) I., S. 532. Dort wurde noch ein anderer denkbarer Fall ausgeschlossen, von dem aber Cramér [vgl. [1]), letzten Absatz] inzwischen gezeigt hat, daß er praktisch nicht vorkommen kann.

Es ist zunächst klar, daß unsere Frage gegenüber Verschiebungen des Koordinatenursprungs invariant ist, d. h. daß sie für die Gesamtheit der Folgen $\{V_k(x + c_k)\}$ mit gegebenen Verteilungsfunktionen $V_k(x)$ und beliebigen Konstanten c_k gleichzeitig beantwortet wird. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Koordinatenursprünge nicht völlig exzentrisch gegen die eigentlichen Variationsbereiche der $V_k(x)$ liegen, etwa daß sie so gewählt wurden, daß mit einem festen $0 < \lambda < 1$

$$V_k(0-) < 1 - \lambda \quad \text{und} \quad V_k(0+) > \lambda \tag{4}$$

wird. (Für $\lambda = \frac{1}{2}$ bedeutet das, daß der Koordinatenursprung in der „Mediane" von $V_k(x)$ liegt.) Dann gilt das

Kriterium A. *Damit es zu einer vorgelegten Folge von Verteilungsfunktionen $\{V_k(x)\}$ (mit der Normierung (4) des Koordinatensystems) zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gibt derart, daß die Folge $\{V_k(x + b_k)\}$ mit den Normierungskonstanten a_n zu $\Phi(x)$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{\substack{X \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{X^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>X} d V_k(x)}{\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X} x^2 d V_k(x)} = 0 \tag{5}$$

und gleichzeitig

$$\lim_{X \to \infty} \lim_{n \to \infty} \frac{X^2}{\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X} x^2 d V_k(x)} = 0 \tag{6}$$

ist. Es gibt dann (und auch nur dann) eine Zahlenfolge $X_n \to \infty$ mit welcher

$$\frac{X_n^2}{\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X_n} x^2 d V_k(x)} \to 0 \tag{7}$$

und zugleich

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>X_n} d V_k(x) \to 0 \tag{8}$$

strebt. Man kann dann etwa

$$a_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<X_n} x^2 d V_k(x) - \left(\int_{|x|<X_n} x d V_k(x)^2 \right) \right\} \tag{9}$$

setzen und die b_n durch

$$\int_{|x|<a_n} (x - b_n) d V_n(x) = 0 \tag{10}$$

definieren.

Nach I, S. 530 bzw. 533 können die so definierten Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ dann und nur dann durch zwei andere Folgen $\{a'_n\}$ bzw. $\{b'_n\}$ ersetzt werden, wenn

$$\frac{a_n}{a'_n} \to 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (b'_k - b_k) \to 0 \tag{11}$$

strebt. Dies ist übrigens eine unmittelbare Folge aus dem P. Lévyschen Satz über die Konvergenz der charakteristischen Funktionen. -- Eine Art, die Zahlen X_n explizit zu berechnen, wird unter Nr. 2, S. 306 angegeben werden.

Die Hauptbedingung (5) kann in eine andere Form gebracht werden, die an die Ljapounoffsche Bedingung erinnert:

Kriterium B. *Im Wortlaut des Kriteriums* A *darf* (5) *durch*

$$\lim_{\substack{X \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X} |x|^p d V_k(x)}{X^{p-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X} x^2 d V_k(x)} = 0, \tag{12}$$

ersetzt werden, wobei p eine beliebige feste Zahl > 2 bedeutet.

Den Hinweis auf die Äquivalenz der beiden Kriterien (die mit bekannten Methoden leicht bewiesen wird) verdanke ich Herrn Marcel Riesz, dem für wertvolle Ratschläge bestens gedankt sei.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem wichtigen Spezialfall, wo alle Komponenten gleich sind: $V_k(x) = V(x)$. Die Bedingung (6) ist dann (sofern $V(x)$ nicht in eine Treppenfunktion mit einer einzigen Sprungstelle im Ursprung ausartet) stets von selbst erfüllt, während (5) und (12) in die beiden äquivalenten Relationen

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\int_{|x|<X} |x|^p d V(x)}{X^{p-2} \int_{|x|<X} x^2 d V(x)} = \lim_{X \to \infty} \frac{X^2 \int_{|x|>X} d V(x)}{\int_{|x|<X} x^2 d V(x)} = 0 \tag{13}$$

übergehen. In der letzten Form wurde die Bedingung bereits in I (§ 8, Beispiel a, S. 554) angegeben und fast gleichzeitig und unabhängig auf verschiedenen Wegen auch von A. Khintchine und P. Lévy gefunden[4]). Man hat so eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Zahlenfolge $\{b_n\}$ derart, daß die Folge $\{V(x + b_n)\}$ zu $\Phi(x)$ gehört.

---

[4]) A. Khintchine: „Sul dominio di attrazione della legge di Gauss", Giorn. Ist. Ital. Attuari 6 (1935). — P. Lévy: „Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînées", J. Math. pures appl., IX. s. 14 (1935). Es sei gerne festgestellt, daß nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn P. Lévy seine Arbeit trotz späteren Erscheinens wesentlich vor meiner eingereicht (Oktober 1934 gegen Mai 1935) und in der Société Math. de France vorgetragen wurde.

Ich verdanke Herrn P. Lévy den Hinweis auf die interessante Frage, ob und wann man die b_n unabhängig von n wählen kann: nur in diesem Falle hat man es im eigentlichen Sinne mit einer Folge mit lauter gleichen Komponenten zu tun, die zu $\Phi(x)$ gehört. Es soll nun im folgenden (Nr. 5, S. 310) gezeigt werden, daß dies stets der Fall ist: *Gehört die Folge* $\{V(x+b_n)\}$ *mit irgendwelchen* b_n *zu* $\Phi(x)$, *d. h. wenn* (13) *besteht, so hat* $V(x)$ *ein endliches erstes absolutes Moment*[5]*; man kann dann die Zahl* b *so wählen, daß das erste Moment von* $V(x+b)$ *verschwindet, und die Folge mit lauter gleichen Komponenten* $V(x+b)$ *gehört zu* $\Phi(x)$. Die zugehörigen Normierungsfaktoren a_n können nach der unter Nr. 2 angegebenen Art berechnet werden.

1. Hilfssätze.

Unser Beweis wird sich wesentlich auf folgende, in I bewiesenen Tatsachen stützen.

a) Damit die Folge von Verteilungsfunktionen $\{V_k(x)\}$ mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$ zu $\Phi(x)$ gehört, ist notwendig und hinreichend[6], daß für jedes feste $\eta > 0$ gleichzeitig

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} d V_k(x) \to 0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{|x| < a_n} x^2 d V_k(x) - \left(\int_{|x| < a_n} x \, d V_k(x) \right)^2 \right\} \to 1, \tag{15}$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| < a_n} x \, d V_k(x) \to 0 \tag{16}$$

strebt.

b) Es sei $\{b_n\}$ irgendeine Zahlenfolge mit

$$\frac{b_n}{a_n} \to 0, \tag{17}$$

und es gelte (14); dann ist[7] auch

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \eta a_n} d V_k(x + b_k) = 0 \tag{18}$$

---

[5]) Diese Tatsache wurde von P. Lévy (a. a. O.) bemerkt und wird übrigens im folgenden mitbewiesen werden.

[6]) I, § 1, S. 524 f.

[7]) Der Beweis liegt unmittelbar auf der Hand, vgl. im übrigen I, § 3, S. 537.

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x)-\int_{|x|<a_n}x^2\,dV_k(x+b_k)\right|=0. \tag{19}$$

c) Bestehen die Relationen (14) und (15), und definiert man b_n durch (10), so gehört die Folge $\{V_k(x+b_k)\}$ mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$. Die Konvergenz ist dann sogar eine absolute[8]), und man hat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{|x|<a_n}x\,dV_k(x+b_k)\right|=0, \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{|x|<a_n}x\,dV_k(x+b_k)\right)^2=0.$$

2. Das Kriterium A ist hinreichend.

Wir zeigen zunächst: Aus dem Bestehen der Beziehungen (5) bis (6) folgt die Existenz einer Zahlenfolge $X_n\to\infty$ mit welcher (7) und (8) gelten.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden. *Erstens*, wenn

$$\lim_{X\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>X}dV_k(x)=0 \tag{21}$$

ist, so gilt (8) für jede Folge $X_n\to\infty$, während (7) wegen (6) stets für jede hinreichend langsam wachsende Folge $\{X_n\}$ erfüllt ist. *Zweitens* kann

$$\lim_{X\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>X}dV_k(x)=\alpha>0 \tag{22}$$

sein (die Existenz eines iterierten Limes folgt aus der Monotonie). Dann gibt es offenbar zu jedem $0<\varepsilon<\alpha$ eine Folge $\bar{X}_n(\varepsilon)\to\infty$ derart, daß

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\bar{X}_n(\varepsilon)}dV_k(x)>0,\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>2\bar{X}_n(\varepsilon)}dV_k(x)<\varepsilon \tag{23}$$

wird. Wegen (5) hat man dann

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{X}_n^2(\varepsilon)}{\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\bar{X}_n(\varepsilon)}x^2\,dV_k(x)}=0. \tag{24}$$

---

[8]) I, § 1, S. 526.

Die zweite Relation in (23) zusammen mit (24) zeigt, daß es um (7) und (8) zu erfüllen, genügt, eine hinreichend langsam abnehmende Folge $\varepsilon_n \to 0$ zu wählen und $X_n = \overline{X}_n(\varepsilon_n)$ zu setzen.

Man wähle nun in beliebiger Weise eine Folge $X_n \to \infty$, mit welcher (7) und (8) bestehen, und man definiere die Zahlen a_n durch (9). Nach der Schwarzschen Ungleichung hat man dann

$$\Big(\int_0^{X_n} x\, d\, V_k(x)\Big)^2 \leqq \{V_k(X_n) - V_k(0)\} \int_0^{X_n} x^2\, d\, V_k(x);$$

eine entsprechende Ungleichung gilt für $x < 0$, und daher hat man vermöge (4) offenbar

$$\Big(\int_{|x|<X_n} x\, d\, V_k(x)\Big)^2 \leqq (1-\lambda) \int_{|x|<X_n} x^2\, d\, V_k(x).$$

Es ist also nach (7) und (9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{X_n^2} \geqq \lambda \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<X_n} x^2\, d\, V_k(x) = \infty.$$

Dies zusammen mit (8) ergibt die Richtigkeit von (14) für jedes $\eta > 0$.

Weiter hat man, sobald n so groß gewählt wird, daß $a_n > X_n$ ausfällt, vermöge (8) und (9)

$$\Big|\frac{1}{a_n^3} \sum_{k=1}^{n} \Big\{\int_{|x|<a_n} x^2\, d\, V_k(x) - \Big(\int_{|x|<a_n} x\, d\, V_k(x)\Big)^2\Big\} - 1$$

$$= \frac{1}{a_n^3}\Big|\sum_{k=1}^{n} \Big\{\int_{|x|<a_n} x^2\, d\, V_k(x) - \int_{|x|<X_n} x^2\, d\, V_k(x) - \Big(\int_{|x|<a_n} x\, d\, V_k(x)\Big)^2$$

$$+ \Big(\int_{|x|<X_n} x\, d\, V_k(x)\Big)^2\Big\}\Big| \leqq 3 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>X_n} d\, V_k(x) \to 0.$$

Es besteht somit auch die Beziehung (15), und der unter Nr. 1 erwähnte Satz c) zeigt, daß die Bedingung des Kriteriums in der Tat hinreichend ist.

3. Das Kriterium *A* ist notwendig.

Die Koordinatenursprünge mögen wieder durch (4) normiert sein, und die Folge $\{V_k(x + b_k)\}$ möge mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$ gehören. Nach Satz a) aus Nr. 1, hat man dann für jedes feste $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} d\, V_k(x + b_k) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<a_n} x^2\, d\, V_k(x + b_k) \geqq 1.$$

Aus der ersten dieser Relationen schließt man, daß für $n \to \infty$ gleichmäßig in $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\int\limits_{|x| > \eta a_n} dV_k(x + b_k) \to 0$$

strebt. Da η beliebig klein gewählt werden darf, folgt hieraus vermöge (4) unmittelbar, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \max \{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|\} = 0 \tag{25}$$

ist. Nach Satz b) ist demnach auch

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > \eta a_n} dV_k(x) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < a_n} x^2 \, dV_k(x) \geqq 1. \tag{26}$$

Hieraus ergibt sich durch Division

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > \eta a_n} dV_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < a_n} x^2 \, dV_k(x)} \tag{27}$$

für jedes feste $\eta > 0$.

Es sei nun Y_n eine beliebige über alle Grenzen wachsende Folge positiver Zahlen. Da $a_n \to \infty$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ strebt (vgl. Einleitung, S. 302 und I, S. 523 bzw. 531), kann man für hinreichend große n die Zahl k_n so bestimmen, daß

$$a_{k_n} < Y_n \leqq 2 a_{k_n}$$

wird. Dann hat man aber nach (27)

$$\frac{Y_n^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > Y_n} dV_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < Y_n} x^2 \, dV_k(x)} \leqq \frac{4 a_{k_n}^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > a_{k_n}} dV_k(x)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < a_{k_n}} x^2 \, dV_k(x)} \to 0;$$

da die Folge $Y_n \to \infty$ beliebig gewählt werden konnte, folgt hieraus die Notwendigkeit von (5).

Wir haben noch das Bestehen von (6) nachzuweisen. Wiederum sind zwei Fälle zu unterscheiden. *Erstens*, wenn (21) gilt, so existiert eine Zahl X_0 derart, daß für $X > X_0$ etwa

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geq X} dV_k(x) < \frac{1}{2}$$

wird. Sobald $X > X_0$ und n so groß gewählt wird, daß $a_n > X$ ausfällt, hat man daher

$$\frac{1}{a_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n} x^2\,dV_k(x) \leqq \frac{1}{a_n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X} x^2\,dV_k(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq X} dV_k(x) < \frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X} x^2\,dV_k(x) + \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt vermöge (26) unmittelbar

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X} x^2\,dV_k(x) \geqq \frac{1}{2},$$

und wegen $a_n \to \infty$ ist daher

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X} x^2\,dV_k(x) = \infty;$$

damit ist die Richtigkeit von (6) bewiesen. Die *andere Möglichkeit* ist, daß (22) gilt. Dann ist aber die Relation (6) eine unmittelbare Folge von (5) und (22), wie man etwa durch Einsetzen einer hinreichend langsam wachsenden Folge $X_n \to \infty$ einsehen kann.

4. Äquivalenz der beiden Kriterien.

Wir setzen zur Abkürzung für $X > 0$ und $p \geqq 2$

$$F_n(X) = \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>X} dV_k(x), \qquad F_n^{(p)}(X) = \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X} |x|^p\,dV_k(x).$$

Als Funktion von X ist dann $F_n(X)$ nicht zunehmend und $F_n^{(p)}(X)$ nicht abnehmend, und man hat

$$F_n^{(p)}(X) = -\int_0^X x^p\,dF_n(x).$$

Es ist zu zeigen, daß aus der Richtigkeit von (5) diejenige von (12) folgt, und umgekehrt. Dies kann (vgl. S. 304) etwa so geschehen.

Zunächst werde (5) vorausgesetzt. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ bestimme man dann ein $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ und $\bar{X} = \bar{X}(\varepsilon)$ derart, daß für $n > \bar{n}$ und $X > \bar{X}$

$$\frac{X^2 F_n(X)}{F_n^{(2)}(X)} < \varepsilon$$

wird. Man erhält dann für $p > 2$, $n > \bar{n}$ und $X > \bar{X}$ durch Produktintegrationen leicht

$$F_n^{(p)}(X) = -\int_0^X x^p \, dF_n(x) = C - \int_{\bar{X}}^X x^p \, dF_n(x)$$

$$= C' + p \int_{\bar{X}}^X x^{p-1} F_n(x) \, dx < C' + \varepsilon p \int_{\bar{X}}^X x^{p-3} F_n^{(2)}(x) \, dx$$

$$< C' + \frac{\varepsilon p}{p-2} X^{p-2} F_n^{(2)}(X);$$

hierbei bezeichnen C und C' zwei von ε abhängige, aber von n und X unabhängige nichtnegative Zahlen. Da $F_n^{(2)}(X)$ für hinreichend große X sicher positiv ist, folgt aus der letzten Ungleichung, daß

$$\frac{F_n^{(p)}(X)}{X^{p-2} F_n^{(2)}(X)}$$

für große n und X gleichmäßig klein ist, w. z. b. w.

Der Beweis, daß auch umgekehrt aus (12) das Bestehen von (5) folgt, ist noch leichter. Aus (12) folgt für hinreichend große n und X

$$F_n^{(p)}(X) < \varepsilon X^{p-2} F_n^{(2)}(X). \tag{28}$$

Nun strebt $\frac{1}{X^p} F_n^{(p)}(X)$ für jedes feste n und $p > 2$ trivialerweise gegen 0, und daher hat man vermöge (28) für hinreichend große n und X

$$F_n(X) = \int_X^\infty \frac{1}{x^p} \, dF_n^{(p)}(x) \leqq p \int_X^\infty \frac{1}{x^{p+1}} F_n^{(p)}(x) \, dx$$

$$< \varepsilon p \int_X^\infty \frac{1}{x^3} F_n^{(2)}(x) \, dx < \frac{\varepsilon p}{2} \frac{1}{X^2} F_n^{(2)}(X) + \frac{\varepsilon p}{2} \int_X^\infty \frac{1}{x^2} \, dF_n^{(2)}(x)$$

$$= \frac{\varepsilon p}{2} \left(\frac{1}{X^2} F_n^{(2)}(X) + F_n(X) \right)$$

oder für $0 < \varepsilon < 2/p$

$$\frac{X^2 F_n(X)}{F_n^{(2)}(X)} < \frac{\varepsilon p}{2 - \varepsilon p},$$

w. z. b. w.

5. Der Fall gleicher Komponenten.

Es möge die Folge $\{V_k(x) = V(x + b_k)\}$, wo $V(x)$ eine feste Verteilungsfunktion ist, mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$ gehören. Nach Satz a) von Nr. 1, S. 305, hat man dann für jedes $\eta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \eta a_n} dV(x + b_k) = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n} x\,dV(x+b_k)=0, \tag{30}$$

und außerdem noch eine Relation, die (15) entspricht, die wir aber im folgenden explizit nicht brauchen werden.

Es werde nun

$$b=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dV(x)$$

gesetzt; daß dies einen Sinn hat, folgt aus einer Bemerkung von P. Lévy (vgl. S. 305, Fußnote [5])) und wird sofort mitbewiesen werden. Der zu beweisende Satz lautet dann: Die Folge mit lauter gleichen Komponenten $V(x+b)$ gehört ebenfalls zu $\Phi(x)$. Das ist nach einem in der Einleitung S. 304 erwähnten Satz dann und nur dann der Fall, wenn

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(b-b_k)\to 0$$

strebt, und diese Relation ist vermöge (30) gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqq a_n} x\,dV(x+b_k)=0. \tag{31}$$

Nun folgt aus (29) wie zu Beginn von Nr. 3 leicht, daß (25) wiederum statthat. Für hinreichend große n und $k=1,\ldots,n$ ist daher sicher

$$\left|\int_{|x|\geqq a_n} x\,dV(x+b_k)\right|\leqq\int_{|x|>\frac{1}{2}a_n}(|x|+|b_k|)\,dV(x).$$

Wenn es uns also gelingt zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n}\int_{|x|>\frac{1}{2}a_n}|x|\,dV(x)=0 \tag{32}$$

ist, so ist damit (31) und also auch unsere Behauptung bewiesen. Außerdem ist in (32) die Endlichkeit des ersten Moments von $V(x)$ enthalten.

Nach Satz c) aus Nr. 1 kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß die Konstanten b_n bereits so gewählt wurden, daß für die Folge $V_k(x)=V(x+b_k)$ die Relationen (20) bestehen; dann geht (15) über in

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n} x^2\,dV(x+b_k)=1,$$

und man hat daher nach Satz b) auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n^2}\int_{|x|<a_n} x^2\,dV(x)=1.$$

Vermöge dieser Relation ist (32) gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int\limits_{|x|>a_n} |x| \, d\,V(x)}{\int\limits_{|x|<a_n} x^2 \, d\,V(x)} = 0. \tag{33}$$

Es werde nun für $X > 0$

$$F(X) = \int\limits_{|x|>X} d\,V(x), \quad F^{(2)}(X) = \int\limits_{|x|<X} x^2 \, d\,V(x), \quad G(X) = \int\limits_{|x|>X} |x| \, d\,V(x)$$

gesetzt. Dann ist (33) enthalten in

$$\lim_{X \to \infty} \frac{X\,G(X)}{F^{(2)}(X)} = 0,$$

und es genügt daher, diese Relation zu beweisen. Nun strebt aber nach unserem Kriterium $\frac{X^2 F(X)}{F^{(2)}(X)}$ gegen Null, so daß für hinreichend große X

$$F(X) < \tfrac{\varepsilon}{X^2} F^{(2)}(X)$$

und also auch

$$\begin{aligned} G(X) &= -\int_X^\infty x \, d\,F(x) = X\,F(X) + \int_X^\infty F(x)\,dx \\ &< \tfrac{\varepsilon}{X} F^{(2)}(X) + \varepsilon \int_X^\infty \tfrac{1}{x^2} F^{(2)}(x)\,dx \\ &= \tfrac{2\varepsilon}{X} F^{(2)}(X) + \varepsilon\,G(X) \end{aligned}$$

wird. Es ist somit für $0 < \varepsilon < 1$

$$\overline{\lim_{X \to \infty}} \frac{X\,G(X)}{F^{(2)}(X)} \leqq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 24. August 1936.)

Zur Addition beweglicher ebener Eibereiche.

Von

H. Görtler in Gießen.

Man erhält den Brunn-Minkowskischen Summenbereich zweier ebener Eibereiche K_1, K_2, indem man die von einem Bezugspunkt O aus nach den Punkten von K_1 aufgetragenen Vektoren mit allen von O nach den Punkten von K_2 aufgetragenen Vektoren addiert. Sind den Eibereichen K_1, K_2 die Stützfunktionen h_1, h_2 zugeordnet, so besitzt der Summenbereich, der wieder ein Eibereich ist, die Stützfunktion $h_1 + h_2$. Der Summenbereich erfährt bei einer Verrückung von O lediglich eine Translation, jedoch bleiben die Eigenschaften des Summenbereiches, auf die es im allgemeinen ankommt, bei Translationen erhalten. Geometrisch anschaulich erhält man den Summenbereich $K_1 + K_2$ als den von K_2 bestrichenen Bereich, wenn ein Punkt von K_2 durch Translationen dieses Bereiches nacheinander mit allen Punkten von K_1 zur Deckung gebracht wird.

Während Translationen von K_1 und K_2 lediglich eine Translation des Summenbereiches zur Folge haben, ändert sich der Summenbereich in wesentlichen gestaltlichen Eigenschaften, wenn man die Summanden in der Ebene dreht. Zwar bleibt der Umfang des Summenbereiches auch bei beliebigen Bewegungen der Bereiche K_1, K_2 unverändert, jedoch ändert sich im allgemeinen der Flächeninhalt und damit das isoperimetrische Defizit. In der vorliegenden Arbeit sollen diese Abhängigkeiten untersucht werden und insbesondere jene Beziehungen zwischen K_1 und K_2 festgestellt werden, die dafür notwendig und hinreichend sind, daß auch Flächeninhalt und isoperimetrisches Defizit des Summenbereiches bei beliebigen Bewegungen von K_1, K_2 unverändert bleiben. Für diese Betrachtungen erweist es sich als besonders zweckmäßig, sich die Stützfunktion $h(\varphi)$ als Fourierreihe entwickelt zu denken.

Es sei noch bemerkt, daß wir die behandelten Bereiche nur durch die Forderung der Darstellbarkeit durch eine Stützfunktion einschränken, daß sich also unsere Betrachtungen in geeigneter Weise auch auf nicht konvexe stützbare Bereiche in ihrer Gültigkeit ausdehnen lassen[1]).

Die Übertragung auf Eigebilde im R_3 soll in einer weiteren Arbeit folgen.

[1]) Siehe hierzu H. Geppert, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 238—254.

§ 1.

K_1 bezeichne einen ebenen Eibereich, $h_1(\varphi)$ seine Stützfunktion bezogen auf einen willkürlichen Punkt O und eine Anfangsrichtung $\varphi = 0$. Die Fourierentwicklung der in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ periodischen Funktion $h_1(\varphi)$ laute:

$$h_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi\}. \tag{1.1}$$

Dann lassen sich der Umfang L_1 und der Flächeninhalt F_{11} von K_1 wie folgt durch die Koeffizienten der Fourierreihe darstellen:

$$L_1 = \int_0^{2\pi} h_1(\varphi)\, d\varphi = \pi a_0; \tag{1.2}$$

$$F_{11} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{h_1^2(\varphi) - \left(\frac{d h_1(\varphi)}{d\varphi}\right)^2\right\} d\varphi \tag{1.3}$$

$$= \frac{\pi}{4} a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

Aus dieser Darstellung liest man unmittelbar die isoperimetrische Ungleichung ab.

Liegt ein Bereich konstanter Breite b^1 vor, so ist wegen $b^1 = h_1(\varphi) + h_1(\varphi + \pi)$:

$$\begin{aligned} &a_{2\nu} = b_{2\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots; \\ &b^1 = a_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Für Mittelpunktseikurven, deren Mittelpunkt in (a_1, b_1) liegt, ergeben sich folgende Koeffizientenbedingungen:

$$a_{2\nu+1} = b_{2\nu+1} = 0, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.5}$$

Ist der Eibereich K_1 insbesondere ein Kreis, so lautet seine Stützfunktion:

$$h_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi. \tag{1.6}$$

Er hat den Radius $\frac{a_0}{2}$, und für $a_0 = 0$ stellt also (1.6) einen Punkt dar. Ein zu K_1 im Verhältnis $C:1$ ähnlicher Bereich $C \cdot K_1$ besitzt die Stützfunktion $C \cdot h_1(\varphi)$.

Es sei nun K_2 ein zweiter Eibereich, dessen Stützfunktion $h_2(\bar{\varphi})$, bezogen auf das Zentrum O und eine Anfangsrichtung $\bar{\varphi} = 0$, durch ihre Fourierentwicklung

$$h_2(\bar{\varphi}) = \frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \{c_\nu \cos \nu\bar{\varphi} + d_\nu \sin \nu\bar{\varphi}\} \tag{1.7}$$

gegeben sei. Dabei möge die Anfangsrichtung $\overline{\varphi} = 0$ mit der Anfangsrichtung $\varphi = 0$ den Winkel φ_0 einschließen: $\overline{\varphi} = \varphi - \varphi_0$.

Der Umfang L des Summenbereiches $K = K_1 + K_2$ ergibt sich als Summe der Randlängen von K_1 und K_2:

$$L = L_1 + L_2 = \pi (a_0 + c_0); \tag{1.8}$$

sein Flächeninhalt wird $F = F_{11} + 2F_{12} + F_{22}$ mit dem Mischinhalt

$$F_{12} = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{h_1 h_2 - h_1' h_2'\}\, d\varphi \tag{1.9}$$

$$= \frac{\pi}{4} a_0 c_0 - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu c_\nu + b_\nu d_\nu) \cos \nu \varphi_0$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) \sin \nu \varphi_0.$$

Ist $F(\lambda)$ der Flächeninhalt eines Bereiches in der K_1 und K_2 verbindenden Linearschar $K(\lambda) = \lambda K_1 + (1 - \lambda) K_2$, $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$,

$$F(\lambda) = \lambda^2 F_{11} + 2\lambda(1 - \lambda) F_{12} + (1 - \lambda)^2 F_{22}, \tag{1.10}$$

so ist $\sqrt{F(\lambda)}$ eine in $0 \leqq \lambda \leqq 1$ konkave Funktion von λ (Brunn-Minkowskischer Satz). $F(\lambda)$ selbst ist dann und nur dann eine konkave Funktion von λ, wenn die Ungleichung

$$2F_{12} - F_{11} - F_{22} \geqq 0 \tag{1.11}$$

befriedigt wird.

§ 2.

Umfang und Flächeninhalt eines Summenbereiches sind invariant gegenüber Translationen der einzelnen Eibereiche. Diese Tatsache kommt darin zum Ausdruck, daß in (1.3), (1.8), (1.9) Koeffizienten mit dem Index $\nu = 1$ nicht auftreten, d. h. daß die Addition eines Punktes ohne Einfluß auf die dargestellten Größen bleibt. Für den Umfang eines Summenbereiches gilt darüber hinaus die Invarianz gegenüber Drehungen der Summanden, da der Ausdruck (1.8) von dem Parameter φ_0 der Drehung unabhängig ist. Dagegen ergibt sich aus dem Ausdruck für den gemischten Flächeninhalt zweier Eibereiche (1.9), daß sich der Flächeninhalt des Summenbereichs ändert, wenn einer der Eibereiche um O und damit — da der Summenbereich $K_1 + K_2$ bis auf Translationen von der Wahl des Bezugszentrums O unabhängig ist — um einen beliebigen Punkt der Ebene gedreht wird.

Es entsteht damit die Frage, wann der Flächeninhalt eines Summenbereiches zweier oder mehrerer Eibereiche gegenüber Drehungen einzelner

Summanden und damit gegenüber beliebigen starren Bewegungen derselben invariant ist. Wir werden im folgenden solche Fälle als *„bewegungsinvariante"* Flächenadditionen gegenüber den *„bewegungsabhängigen"* Flächenadditionen von Eibereichen abgrenzend bezeichnen. In diesem Sinne können wir sagen: Der Umfang eines Summenbereiches mehrerer Eibereiche ist stets bewegungsinvariant.

Der Flächeninhalt eines Summenbereiches zweier Eibereiche ist dann und nur dann bewegungsinvariant im bezeichneten Sinne, wenn in dem Ausdruck (1. 9) für den gemischten Flächeninhalt die Koeffizienten von $\cos \nu \varphi_0$ und $\sin \nu \varphi_0$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ einzeln verschwinden, wenn also

$$\begin{aligned} a_\nu c_\nu &= -b_\nu d_\nu, \\ a_\nu d_\nu &= b_\nu c_\nu. \end{aligned} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{2. 1}$$

Daraus folgt aber:

Der Flächeninhalt eines Summenbereiches $K = K_1 + K_2$ *zweier Eibereiche* K_1, K_2 *ist dann und nur dann invariant gegenüber beliebigen starren Bewegungen der Summanden, wenn entweder* $a_\nu = b_\nu = 0$ $(c_\nu, d_\nu$ *beliebig) oder* $c_\nu = d_\nu = 0$ *ist* $(a_\nu, b_\nu$ *beliebig) für jedes einzelne* $\nu \geqq 2$.

Trivial ist das Beispiel der Addition eines Kreises zu einem beliebigen Eibereich (= Übergang zu einer Parallelkurve im Abstand des Kreisradius und Translation). Als nicht triviales Beispiel ergibt sich aus (1. 4), (1. 5): Die Flächenaddition eines Mittelpunktseibereiches und eines Bereiches konstanter Breite ist stets bewegungsinvariant. Ferner erkennt man: Nur dann ist die Flächenaddition eines Eibereiches mit jedem Mittelpunktseibereich (Bereich konstanter Breite) bewegungsinvariant, wenn der betreffende Eibereich ein Bereich konstanter Breite (Mittelpunktseibereich) ist. Weitere Beispiele kann sich der Leser leicht selbst bilden.

Ist die Flächenaddition eines Eibereiches K_1 mit jedem der Eibereiche $K_2, K_3, \ldots, K_n$ bewegungsinvariant, so gilt dies auch für die Flächenaddition eines jeden Eibereiches der Gestalt $C_1 + a_1 \cdot K_1$ mit jedem Eibereich $C_2 + a_2 \cdot K_2 + a_3 \cdot K_3 + \ldots + a_n \cdot K_n$ $(a_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$ bezeichnen nichtnegative Zahlen, C_1, C_2 Kreise).

Die Bewegungsinvarianz der Flächenaddition von K_1 und K_2 bleibt immer dann unangetastet, wenn man für solche $\nu \geqq 2$, für die $a_\nu = b_\nu = 0$ ist, die c_ν, d_ν abändert. (Beispiele: Spiegelung eines Bereiches an einem beliebigen Punkt (trivial) oder an einer beliebigen Geraden).

Wir können die Gesamtheit der in dieser Arbeit betrachteten Bereiche auf alle in der bereits angeführten Geppertschen Arbeit behandelten stützbaren Bereiche erweitern und dann lehren obige Ausführungen: Ist die Flächenaddition der stützbaren Bereiche K_1 und K_2 bewegungs-

invariant, so kann man durch stetigen Übergang (stetige Änderung der Fourierkoeffizienten der Stützfunktion) von K_1 aus zu der Gesamtheit aller stützbaren Bereiche gelangen, die durch die Bewegungsinvarianz ihrer Flächenaddition mit K_2 ausgezeichnet sind.

Es ist auf Grund unserer Betrachtungen nun leicht, bei der Flächenaddition von mehr als zwei Bereichen die Bedingungen für Invarianz gegenüber beliebigen Bewegungen der einzelnen Bereiche auszusprechen.

§ 3.

Sind K_1, K_2 zwei Eibereiche, deren Flächenaddition bewegungsinvariant ist, so ist der gemischte Flächeninhalt nach (1. 9) gegeben durch

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi} L_1 L_2. \tag{3.1}$$

Alle Eibereiche *gleichen Umfangs* K_2, deren Flächenaddition mit einem gegebenen Eibereich K_1 bewegungsinvariant ist, haben mit diesem denselben gemischten Flächeninhalt.

Man kann demnach leicht eine Konstruktion des bewegungsinvarianten Teils des gemischten Flächeninhalts dieser Eibereiche als Flächeninhalt angeben. An Stelle eines jener K_2 addieren wir einen Kreis mit dem Umfang $\frac{1}{2} \cdot L_2$ zu K_1, d. h. wir zeichnen eine Parallelkurve zu K_1 im Abstande $\frac{L_2}{4\pi}$. Stanzen wir aus dem Summenbereich den Eibereich K_1 und den Kreis aus (siehe Fig. 1), so ist der Flächeninhalt des verbleibenden Bereiches gleich dem bewegungsinvarianten Teil von F_{12}. (Will man diesen durch den Inhalt eines zu K_1 parallelen Bereiches darstellen, so kann man, wie man sich leicht überlegt, zu K_1 einen Kreis mit dem Radius $r = \frac{1}{2\pi}\{\sqrt{L_1^2 - 4\pi F_{11} + L_1 L_2} - L_1\}$ addieren; dann hat der Summenbereich aus K_1 und Kreis gerade den gewünschten Flächeninhalt $\frac{1}{4\pi} L_1 L_2$).

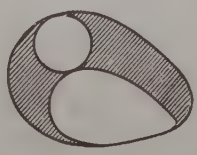


Fig. 1.

Aus (1. 11) folgt: In einer Linearschar $K(\lambda) = \lambda \cdot K_1 + (1 - \lambda) \cdot K_2$ ist im Falle bewegungsinvarianter Flächenaddition der erzeugenden Bereiche K_1, K_2 der Flächeninhalt $F(\lambda)$ dann und nur dann eine konkave Funktion des Scharparameters λ in $0 \leqq \lambda \leqq 1$, wenn die Ungleichung

$$L_1 L_2 \geqq 2\pi (F_{11} + F_{22}) \tag{3.2}$$

erfüllt ist. Die Konkavität von $F(\lambda)$ läßt sich also *unmittelbar aus den Größen der Umfänge und Flächeninhalte* der erzeugenden Bereiche selbst ablesen, ohne Heranziehung des gemischten Flächeninhalts. Die Brunn-Minkowskische Ungleichung $F_{12}^2 - F_{11} F_{22} \geqq 0$ lautet im Falle bewegungsinvarianter Flächenaddition: $L_1 L_2 \geqq 4\pi \sqrt{F_{11} F_{22}}$ (auf Grund der isoperi-

metrischen Ungleichung für beliebige Eibereiche gültig) und ist Ausdruck für die Konkavität von $\sqrt{F(\lambda)}$ in $0 \leqq \lambda \leqq 1$. In (3.2) kommt also die Verschärfung der an $F(\lambda)$ gestellten Forderung darin zum Ausdruck, daß an Stelle des geometrischen das arithmetische Mittel der Flächeninhalte der erzeugenden Bereiche getreten ist.

§ 4.

Im Rahmen der hier aufgeworfenen Fragestellung soll nun das Verhalten des isoperimetrischen Defizits, d. h. der Größe $D = \frac{1}{4\pi} L^2 - F \geqq 0$, bei der Addition zweier Eibereiche untersucht werden. Nach (1.2), (1.3) ist

$$D_{11} = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(a_\nu^2 + b_\nu^2), \tag{4.1}$$

und entsprechend D_{22}. Das isoperimetrische Defizit des Summenbereiches $K = K_1 + K_2$ ergibt sich zu

$$D = D_{11} + 2D_{12} + D_{22}, \tag{4.2}$$

wobei

$$D_{12} = \frac{1}{4\pi} L_1 L_2 - F_{12} \tag{4.3}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1) \{(a_\nu c_\nu + b_\nu d_\nu) \cos \nu \varphi_0 - (a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu) \sin \nu \varphi_0\},$$

das *„Mischdefizit", bis auf das Vorzeichen nichts anderes als der bewegungsabhängige Bestandteil des gemischten Flächeninhaltes F_{12} ist.*

D wird nur dann Null, wenn der Summenbereich ein Kreis ist. Setzen wir für diese und die hier folgenden Betrachtungen ohne Einschränkung $\varphi_0 = 0$, so also nur dann, wenn $a_\nu = -c_\nu$, $b_\nu = -d_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ ist. Beispiele lassen sich leicht bilden. Auf Grund der isoperimetrischen Ungleichung ist das isoperimetrische Defizit $D(\lambda) = \lambda^2 D_{11} + 2\lambda(1-\lambda) D_{12} + (1-\lambda)^2 D_{22}$ in einer Linearschar $K(\lambda) = \lambda K_1 + (1-\lambda) K_2$ eine konvexe Funktion von λ, die nur dann linear wird, wenn sie konstant ist: $D(\lambda) \equiv D_{11} = D_{12} = D_{22}$, wenn also die erzeugenden Bereiche Parallelbereiche sind. Sogar die Funktion $\sqrt{D(\lambda)}$ ist eine konvexe Funktion von λ[2]), denn aus (4.1), (4.3) folgt mit $\varphi_0 = 0$:

$$D_{11} D_{22} - D_{12}^2 = \frac{\pi^2}{8} \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{\infty} (\nu^2 - 1)(\mu^2 - 1) [(a_\nu c_\mu - a_\mu c_\nu)^2 + 2(a_\nu d_\mu - b_\mu c_\nu)^2 + (b_\nu d_\mu - b_\mu d_\nu)^2] \geqq 0. \tag{4.4}$$

[2]) Auf anderem Wege zeigte dies J. Favard, Sur les inégalités de Minkowski. Mat. Tidsskrift B 1930, S. 33.

Die Ungleichung $-D_{11}-D_{22} \leqq 2D_{12} \leqq D_{11}+D_{22}$ läßt sich somit durch

$$-\sqrt{D_{11}D_{22}} \leqq D_{12} \leqq \sqrt{D_{11}D_{22}} \tag{4.5}$$

verschärfen und (4.4) gestattet leicht, das Eintreten der Gleichheit festzustellen: Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn zwischen den erzeugenden Bereichen eine Beziehung der Form $C_1 + a_1 \cdot K_1 = C_2 + a_2 \cdot K_2$ besteht (C_1, C_2 Kreise, a_1, a_2 reelle Zahlen; sinngemäß für alle stützbaren Bereiche gültig), d. h. wenn K_1, K_2 ähnliche Bereiche oder zu solchen parallele Bereiche sind.

(1.11) läßt sich mit Hilfe des Mischdefizits wie folgt schreiben:

$$4\pi D_{12} \leqq L_1 L_2 - 2\pi(F_{11}+F_{22}). \tag{4.6}$$

Die Ungleichung (3.2) kennzeichnet also dann und nur dann als Äquivalent von (1.11) die Konkavität von $F(\lambda)$ in $0 \leqq \lambda \leqq 1$, wenn das isoperimetrische Defizit des Summenbereiches gleich der algebraischen Summe der isoperimetrischen Defizite der Summanden ist: $D = D_{11}+D_{22}$. Zu dieser Gesamtheit $D_{12} = 0$ gehören inbesondere alle Eibereichsummen, die sich durch Bewegungsinvarianz der Flächenaddition auszeichnen, aber auch andere; denn wenn D_{12} für zwei vorgegebene festliegende Eibereiche verschwindet, braucht damit noch nicht Bewegungsinvarianz vorzuliegen. Es gibt vielmehr für zwei ganz beliebige Eibereiche bis auf Translationen mindestens vier Lagen derart, daß für diese das Mischdefizit verschwindet; siehe hierzu den Schluß des folgenden Paragraphen.

§ 5.

Läßt man den starr beweglichen Eibereich K_2 durch Translationen aus einer vorgegebenen Anfangslage alle Lagen einnehmen, in denen er den festen Eibereich K_1 trifft, so beschreibt ein innerer Punkt von K_2, als Bezugszentrum von $h_2(\overline{\varphi})$ aufgefaßt, einen Eibereich mit der Stützfunktion $h(\varphi) = h_1(\varphi) + h_2(\varphi - \varphi_0 + \pi)$. Er bestreicht also den Summenbereich aus K_1 und den aus K_2 durch Drehung um π hervorgehenden Bereich. Läßt man nun Drehungen von K_2 zu, so durchwandert der betreffende Punkt einen durch Verschmierung aus diesem Bereich entstehenden Bereich. Als Maß für die „*Anzahl*" A der Lagen des starr beweglichen K_2, die bei Zulassung beliebiger Bewegungen in der Ebene *Trefflagen* von K_2 mit K_1 sind, hat man in der Integralgeometrie das Integral über die kinematische Dichte des beweglichen Eibereiches K_2 eingeführt [3]), d. h.

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \{h^2(\varphi) - h'^2(\varphi)\}\, d\varphi\, d\varphi_0. \tag{5.1}$$

[3]) Siehe W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, 1. Heft, Leipzig und Berlin 1935, B. G. Teubner, S. 28.

Dieser Ausdruck stellt aber nichts anderes dar als

$$A = 2\pi \overline{F}, \tag{5.2}$$

wobei

$$\overline{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi_0)\, d\varphi_0 \tag{5.3}$$

der Mittelwert der Flächeninhalte aller aus dem festen K_1 und dem beweglichen K_2 entstehenden Summenbereiche bei einer vollen Umdrehung von K_2 bedeutet.

Die sich aus (5.1) wegen

$$\int_0^{2\pi} D_{12}(\varphi_0)\, d\varphi_0 = 0 \tag{5.4}$$

ergebende Formel von Santaló [4])

$$A = 2\pi (F_{11} + F_{22}) + L_1 L_2 \tag{5.5}$$

sagt aus, *daß* $\frac{1}{2\pi} A$ *gerade der bewegungsinvariante Teil des Flächeninhalts von* $K_1 + K_2$ *ist.* Wir bemerken noch, daß sich aus der geometrischen Darstellungsmöglichkeit des bewegungsinvarianten Teils von F_{12} (siehe § 3) zugleich die verschiedensten Möglichkeiten ergeben, die Anzahl A der Trefflagen eines festen und eines beweglichen Eibereiches *als Flächeninhalt darzustellen.*

Wegen

$$F = \frac{1}{2\pi} A - 2 D_{12} \text{ [5])}, \tag{5.6}$$

worin F der Flächeninhalt, D_{12} das Mischdefizit für irgendeine beliebige Lage der Eibereiche K_1, K_2 bedeutet, folgt: Ist der Flächeninhalt des Summenbereiches $K_1 + K_2$ invariant gegenüber beliebigen starren Bewegungen der Eibereiche, so ist er bis auf den Faktor 2π gleich der Anzahl der möglichen Trefflagen dieser Bereiche: $A = 2\pi \cdot F$.

Auf Grund eines Hurwitzschen Satzes [6]) über trigonometrische Reihen folgt aus (4.3) für eine volle Umdrehung des Bereiches K_2: Das Mischdefizit $D_{12}(\varphi_0)$ hat in $0 \leqq \varphi_0 < 2\pi$ eine gerade Anzahl von mindestens vier Nullstellen. Man kann somit stets durch Drehung eines der Ei-

---

[4]) W. Blaschke, l. c. S. 30.

[5]) = Zerlegung von F in seinen bewegungsinvarianten und seinen bewegungsabhängigen Bestandteil.

[6]) A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 57 (1903), S. 444. Der von uns benötigte Spezialfall wurde auch von T. Hayashi [Some geometrical applications of Fourier series, Rend. Circ. Mat. di Palerma 50 (1926), S. 99] bewiesen.

bereiche K_1, K_2 *mindestens vier* Lagen erzielen derart, daß für diese Lagen das isoperimetrische Defizit des Summenbereiches sich als die algebraische Summe der isoperimetrischen Defizite der Summanden K_1, K_2 ergibt. In solchen ausgezeichneten Lagen und *nur in diesen* ist der Flächeninhalt des Summenbereiches bis auf den Faktor 2π gleich der Anzahl der Trefflagen des beweglichen mit dem festliegenden Bereiche.

Ferner folgt aus dem genannten Hurwitzschen Satze: Der gemischte Inhalt $F_{12}(\varphi_0)$ zweier Eibereiche K_1, K_2 hat in $0 \leqq \varphi_0 < 2\pi$ eine gerade Anzahl von mindestens vier Extrema. *Dreht man also einen der Eibereiche, so kann man stets bis auf Translationen mindestens je zwei Lagen erzielen, in denen der Flächeninhalt des Summenbereiches $K_1 + K_2$ ein Maximum bzw. ein Minimum wird.* Dasselbe gilt dann auch für das isoperimetrische Defizit des Summenbereiches, das dort ein Maximum wird, wo der Flächeninhalt des Summenbereiches ein Minimum ist.

Für spezielle Eibereiche lassen sich diese Sätze nach dem Hurwitzschen Satz gegebenenfalls verschärfen, wenn in (4.3) die ersten Glieder bis $\nu = k > 2$ verschwinden.

(Eingegangen am 31. Juli 1936.)

Über die gegenseitigen Beziehungen einiger „trigonometrischer" Integrationen.

Von

J. Ridder in Groningen.

§ 1.

Im Jahre 1921 veröffentlichte A. Denjoy in einer Reihe von kurzen Mitteilungen in den Compt. Rend. **172, 173** [1]) seine Untersuchungen über die Integraldarstellung der Koeffizienten konvergenter trigonometrischer Reihen. Da derartige Reihen im allgemeinen nicht integrierbar sind, sogar nicht nach der allgemeinen Denjoyschen Definition, war es notwendig, ein neues Integrationsverfahren einzuführen, das gestattete, jede konvergente trigonometrische Reihe als Fourier-Reihe ihrer Summe zu betrachten. Die Denjoyschen Veröffentlichungen geben in der Hauptsache Resultate, und die Beweisverfahren werden nur skizziert. Einige Autoren sahen sich dadurch veranlaßt, die Sache aufs neue zu behandeln. So führte S. Verblunsky 1934 ein Integrationsverfahren [2]) ein, das u. a. bei konvergenten *Potenz*reihen: $G(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, wobei c_n im allgemeinen komplex, die Euler-Fouriersche Darstellung der Koeffizienten: $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(x) e^{-inx} dx$ gestattet. Auch die Anwendung einer schon im Jahre 1932 von J. C. Burkill betrachteten Integraldefinition [3]) läßt, wie er in dem Journal of the London Math. Soc. **11** (1936), S. 43—48 zeigte, die Darstellung der Koeffizienten einer konvergenten *Potenz*reihe in der Euler-Fourierschen Form zu. Schließlich führten J. Marcinkiewicz und A. Zygmund [4]) ein drittes „trigonometrisches" Integrationsverfahren ein, das, ebenso wie die Denjoysche Integration, die Euler-Fouriersche Darstellung der Koeffizienten bei *allgemeinen* konvergenten trigonometrischen Reihen: $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ (mit reellen Koeffizienten) ermöglicht.

Es ist das Ziel der folgenden Seiten, die gegenseitigen Verhältnisse der drei neu eingeführten „trigonometrischen" Integrationen näher zu untersuchen.

[1]) Diese Mitteilungen sind seperat erschienen unter dem gemeinsamen Titel: Calcul des coefficients de la série trigonométrique convergente la plus générale (Paris 1921).

[2]) Siehe Fundamenta Mathematicae **28** (1934), S. 193 — 236.

[3]) Siehe Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1932), S. 314 — 322.

[4]) Siehe Fundamenta Mathematicae **26** (1936), S. 1 — 43.

§ 2.

Die Burkillsche Integraldefinition erhält man folgendermaßen:

Definition 1. $f(x)$ sei definiert im abgeschlossenen Intervall (a, b). Dann soll die in (a, b) endliche Funktion $\psi_1(x)$ eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte C(esàro)-Majorante heissen, wenn sie über (a, b) nach der speziellen Denjoyschen Integraldefinition integrierbar ist und daneben den folgenden Bedingungen genügt: $\alpha)$ sie ist in jedem Punkte x von (a, b) C(esàro)-stetig, d. h. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi_1(t)\, dt = \psi_1(x)$; $\beta)$ $\psi_1(a) = 0$; $\gamma)$ mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge ist in jedem Punkte x von (a, b) die untere C(esàro)-Derivierte von $\psi_1(x)$,

$$\underline{C\,D}\,\psi_1(x) \equiv \lim_{h \to 0} \inf \frac{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi_1(t)\, dt - \psi_1(x)}{\frac{1}{2} h}$$

von $-\infty$ verschieden; $\delta)$ fast überall in (a, b) gilt $\underline{C\,D}\,\psi_1(x) \geqq f(x)$.

Definition 2. Es soll $\varphi_1(x)$ eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte C(esàro)-Minorante heißen, falls sie in (a, b) endlich ist, über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral besitzt und außerdem den folgenden Bedingungen genügt: $\alpha)$ sie ist in jedem Punkte von (a, b) C-stetig; $\beta)$ $\varphi_1(a) = 0$; $\gamma)$ mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge ist in jedem Punkte x von (a, b) die obere C(esàro)-Derivierte $\overline{C\,D}\,\varphi_1(x) \neq \infty$; $\delta)$ fast überall in (a, b) ist $\overline{C\,D}\,\varphi_1(x) \leqq f(x)$.

Da die Differenz $\psi_1(x) - \varphi_1(x)$ immer eine in (a, b) nicht abnehmende Funktion ist[5]), läßt sich das Burkillsche Integral von $f(x)$ über (a, b), $\int_a^b (C\,P) f(x)\, dx$, nach der Perronschen Methode definieren als der gemeinsame Wert (falls dieser existiert) der oberen Schranke aller möglichen $\varphi_1(b)$-Werte und der unteren Schranke aller möglichen $\psi_1(b)$-Werte.

Die Verblunskysche Integration bringen wir hier in der folgenden, von der ursprünglichen abweichenden Form[6]).

Definition 3. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte Verblunsky-Majorante $\psi_2(x)$ genügt den Bedingungen: $\alpha)$ sie ist in jedem Punkte von (a, b) endliche Ableitung einer (stetigen) Funktion; $\beta)$ $\psi_2(a) = 0$;

---

[5]) Der Beweis folgt leicht mit Hilfe von Th. 2 bei W. L. C. Sargent, Proc. London Math. Soc. (2) 40 (1935), S. 239.

[6]) Siehe Ridder, Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 184—199, insbesondere S. 190, 191 und 198.

γ) es läßt sich (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten durch abzählbar viele perfekte Mengen $\{P_k\}$ derartig überdecken, daß $\psi_2(x)$ auf jeder Menge P_k unterhalb totalstetig[7]) ist; δ) in fast allen Punkten ihrer Existenzmenge ist die approximative Ableitung von $\psi_2(x)$, $AD\,\psi_2(x)$, größer als oder gleich $f(x)$.

Definition 4. Eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte Verblunsky-Minorante $\varphi_2(x)$ genügt den Bedingungen: α) sie ist in jedem Punkte von (a, b) endliche Ableitung einer Funktion; β) $\varphi_2(a) = 0$; γ) es läßt sich (a, b) mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten durch abzählbar viele perfekte Mengen $\{Q_k\}$ derartig überdecken, daß $\varphi_2(x)$ auf jeder Menge Q_k oberhalb totalstetig[8]) ist; δ) in fast allen Punkten ihrer Exiztenzmenge ist die approximative Ableitung von $\varphi_2(x)$, $AD\,\varphi_2(x)$, kleiner als oder gleich $f(x)$.

Jede Differenz $\psi_2(x) - \varphi_2(x)$ ist wieder nicht-abnehmend in (a, b), und es wird deutlich sein, wann das Perronsche Verfahren ein Verblunskysches Integral von $f(x)$ über (a, b), $\int_a^b (V)\, f(x)\, dx$, liefern wird.

Satz 1. *Jede über (a, b) nach der Burkillschen Definition integrierbare Funktion $f(x)$ ist über (a, b) auch im Verblunskyschen Sinne*[9]) *integrierbar; das Umgekehrte gilt jedoch nicht. Sind beide Integrationen anwendbar, so führen sie zu demselben Integralwert.*

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß die zu $f(x)$ gehörenden Cesàro-Majoranten und -Minoranten Teilklassen der Klassen der zu $f(x)$ adjungierten Verblunsky Majoranten bzw. -Minoranten bilden. Wir können uns darauf beschränken, dies für die Majoranten zu beweisen.

Wenn E_n die Teilmenge von (a, b) ist, in deren Punkten (x) die C-Majorante $\psi_1(x)$ von $f(x)$ der Bedingung

$$\frac{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)}{\frac{1}{2}h} > -n \quad \text{oder} \quad \frac{2}{h^2}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt > -n$$

---

[7]) D. h. die Summe der Funktionsdifferenzen: $\sum_{(j)} \{\psi_2(b_j) - \psi_2(a_j)\}$ in den zu P_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen hat immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Längensumme dieser Intervalle gegen Null konvergiert.

[8]) Definition wie in Fußnote 7, jedoch mit „einen oberen Limes $\leqq 0$“ statt „einen unteren Limes $\geqq 0$“.

[9]) Daraus folgt, daß auch das Burkillsche Integrationsverfahren unter die loc. cit. 6) behandelte, abstrakte Denjoy-Integration fällt (vgl. insbesondere l. c. S. 185 und 196).

für jeden Punkt $x+h$ in (a,b) mit $|h| \leqq \frac{1}{n}$ genügt, so wird

$$(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n + A$$

sein, wobei A eine höchstens abzählbare Teilmenge von (a,b) ist. Zu jedem n gehören endlich viele, abgeschlossene Intervalle $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ (wobei i eine ganze Zahl), welche Punkte von E_n enthalten; es gibt somit auch endlich viele, nicht leere Durchschnittsmengen $(E_{n,i})$ von E_n mit derartigen Intervallen. Nun wird $\psi_1(x)$ auf der abgeschlossenen Hülle $H_{n,i}$ eines jeden $E_{n,i}$ unterhalb totalstetig sein.

Seien nämlich x_1 und x_2 $(> x_1)$ zwei Punkte einer Menge $E_{n,i}$. Dann wird

$$\frac{2}{x_2-x_1} f(x_2) + n > \frac{2}{(x_2-x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt > \frac{2}{x_2-x_1} f(x_1) - n,$$

somit auch

$$f(x_2) - f(x_1) > -n(x_2-x_1)$$

sein. Die Funktion $g(x) \equiv f(x) + nx$ ist somit auf $E_{n,i}$ (monoton) nicht-abnehmend. Sie wird es auch auf $H_{n,i}$ sein.

Denn zu jedem linksseitigen Verdichtungspunkt ξ von $E_{n,i}$ gibt es eine nach ξ konvergierende Folge von Punkten (x_j), welche zu $E_{n,i}$ gehören, mit $x_1 < x_2 \ldots < x_j < \ldots < \xi$. Zu jedem x_j ist

$$\frac{2}{(\xi-x_j)^2} \int_{x_j}^{\xi} [f(t) - f(x_j)]\,dt > -n,$$

und dadurch

$$\frac{1}{\xi-x_j} \int_{x_j}^{\xi} g(t)\,dt > g(x_j). \tag{1}$$

Da nach Definition 1 $f(x)$, und somit auch $g(x)$, C-stetig in (a,b) ist und die $g(x_j)$-Werte eine nicht-abnehmende Folge bilden, folgt aus (1):

$$g(\xi) \geqq \lim_{j \to \infty} g(x_j). \tag{2}$$

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß für jede abnehmende Folge von zu $E_{n,i}$ gehörenden Punkten (x_j'), welche nach einem rechtsseitigen Verdichtungspunkt ξ' von $E_{n,i}$ konvergieren,

$$g(\xi') \leqq \lim_{j \to \infty} g(x_j') \tag{3}$$

ist. Aus (2) und (3) und der Monotonie von $g(x)$ auf $E_{n,i}$ folgt nun sofort, daß auch auf $H_{n,i}$ die Funktion $g(x)$ nicht-abnehmend, dadurch $f(x)$ auf $H_{n,i}$ unterhalb totalstetig ist. Da außerdem, nach einem Satze von Sargent[10]), aus der Bedingung γ) in Definition 1 folgt, daß in fast

[10]) Siehe Sargent, l. c.[5]), S. 244 (Th. 4).

allen Punkten von (a, b) $\psi_1(x)$ eine approximative Ableitung gleich $\underline{CD}\,\psi_1(x)$ hat, wodurch nach Bedingung δ) fast überall in (a,b) $AD\psi_1(x) \geqq f(x)$ ist, genügt $\psi_1(x)$ auch allen Bedingungen der Definition 3; die C-Majoranten bilden eine Teilklasse der Klasse von Verblunskyschen Majoranten.

Da auch jede C-Minorante eine Verblunsky-Minorante ist, wird jede nach Burkill integrierbare Funktion es auch im Verblunskyschen Sinne sein, während die Integralwerte einander gleich sind.

Daß nicht umgekehrt aus der V-Integration einer Funktion die Möglichkeit der Burkillschen CP-Integration folgt, ergibt sich aus einem für andere Zwecke konstruierten Beispiel von Sargent [11]) [12]).

---

[11]) Der Vollständigkeit halber lassen wir hier das Beispiel [siehe auch l. c. [5]), S. 247—249] folgen. Aus dem Intervall (0, 1) denke man sich das Teilintervall mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und von der Länge $\frac{1}{2^2 \cdot 2!}$ als einziges Intervall erster Ordnung entfernt. Nach Entfernung der Teilintervalle von erster, zweiter, ..., $(n-1)$-ter Ordnung erhält man diejenigen n-ter Ordnung folgendermaßen. Wenn (c, d) eines der übriggebliebenen Intervalle ist, so teile man (c, d) in $(n+1)$ gleiche Teile und beschreibe mit jedem der n Teilungspunkte zum Mittelpunkt ein Intervall von der Länge $\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$. So erhält man die $n \cdot n!$ Intervalle n-ter Ordnung, die wieder entfernt werden. Setzt man das Verfahren unbegrenzt fort, so bleibt schließlich eine perfekte Menge P mit $m(P) > \frac{1}{2}$ übrig. Wenn $(a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$ eines der entfernten Intervalle n-ter Ordnung ist, so sei die Funktion $f(x)$ in diesem Intervall wie folgt definiert:

$$f(a_n^{(i)}) = f(b_n^{(i)}) = f\left\{a_n^{(i)} + \frac{1}{2}(b_n^{(i)} - a_n^{(i)})\right\} = 0,$$

$$f\left\{a_n^{(i)} + \frac{1}{4}(b_n^{(i)} - a_n^{(i)})\right\} = -\frac{1}{n}, \; f\left\{a_n^{(i)} + \frac{3}{4}(b_n^{(i)} - a_n^{(i)})\right\} = +\frac{1}{n},$$

f ändere sich linear in jedem der vier Teile von $(a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$.

Auf P sei $f(x)$ überall gleich Null. Die so in (0, 1) definierte Funktion ist ein unbestimmtes allgemeines Denjoy-Integral [dies folgt z. B. aus Ridder, l. c. [6]), S. 185, 186 und 190] und umsomehr ein unbestimmtes Verblunsky-Integral, für das in fast allen Punkten (x) von P die vier extremen Cesàro-Derivierten und die approximative Ableitung die folgenden Werte haben: $CD^+ f(x) = CD^- f(x) = AD f(x) = 0$; $CD_+ f(x) = CD_- f(x) = -\infty$. In (0, 1) gibt es somit nicht fast überall eine C-Ableitung von $f(x)$, wie dies der Fall sein müßte, wenn $f(x)$ auch ein unbestimmtes CP-Integral im Sinne von Burkill wäre [siehe Burkill, l. c. [3]), S. 319 (Th. 3)].

Auch eine von A. Khintchine konstruierte Funktion [siehe Fundamenta Mathematicae 9 (1927), S. 233—238] ist ein unbestimmtes allgemeines Denjoy-Integral, welches in fast allen Punkten einer perfekten Menge von positivem Maße keine endliche Borel-Ableitung (siehe Definition 5) hat und somit nach einem Lemma von Marcinkiewicz und Zygmund [siehe l. c. [4]), S. 36 (Lemma 29)] auch keine endliche Cesàro-Ableitung haben kann, wie dies beim unbestimmten CP-Integral der Fall ist [siehe Sargent, l. c. [5]), S. 245 (Korollar 2)].

[12]) Wir bemerken nebenbei, daß sich beim Verblunsky-Integral der folgende Satz, mit Hilfe der in § 2 definierten V-Majoranten und V-Minoranten, in sogar

§ 3.

Definition 5. Die endlichwertige Funktion $f(x)$ sei über (a, b) nach der speziellen Denjoyschen Definition integrierbar. Dann sei die untere Borel-Derivierte von $f(x)$ im Punkte x von (a, b), $\underline{BD}\, f(x)$, definiert durch

$$\liminf_{h \to 0} \liminf_{k \to 0} \frac{1}{h} \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\, dt \quad (0 < k < h \text{ oder } h < k < 0).$$

Die obere Borel-Derivierte von $f(x)$ in x, $\overline{BD} f(x)$, sei gleich

$$\limsup_{h \to 0} \limsup_{k \to 0} \frac{1}{h} \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\, dt \quad (0 < k < h \text{ oder } h < k < 0).$$

Sind in einem Punkte x untere und obere Borel-Derivierte von $f(x)$ einander gleich, so soll ihr gemeinsamer Wert die Borel-Ableitung, $BD\, f(x)$, von $f(x)$ in x sein[13]).

Definition 6. $f(x)$ habe die gleichen Eigenschaften wie in Definition 5. Dann soll in jedem inneren Punkte x von (a, b) die untere symmetrische Borel-Derivierte von $f(x)$, $\underline{BD}_s\, f(x)$, gleich

$$\liminf_{h \to 0} \liminf_{k \to 0} \frac{1}{h} \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}\, dt \quad (0 < k < h)$$

und die obere symmetrische Borel-Derivierte von $f(x)$, $\overline{BD}_s f(x)$, gleich

$$\limsup_{h \to 0} \limsup_{k \to 0} \frac{1}{h} \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}\, dt \quad (0 < k < h)$$

---

einfacherer Weise beweisen läßt als der Satz über partielle Integration beim CP-Integral [siehe Burkill, l. c. [3]), S. 320—322]: Wenn im abgeschlossenen Intervall (a, b) $F(x) = \int_a^x (V) f(x)\, d(x)$ und $G(x) = \int_a^x g(x)\, dx$ ist, wobei $g(x)$ in (a, b) von beschränkter Variation, so wird auch $f(x) \cdot G(x)$ V-integrierbar sein über (a, b), und es ist

$$\int_a^b (V)\, f\, G\, dx = F(b) \cdot G(b) - \int_a^b F \cdot g\, dx;$$

das letzte Integral ist ein spezielles Denjoysches Integral.

[13]) Siehe Sargent, Proc. London Math. Soc. (2) 38 (1934), S. 180 und 181. — Das Hauptresultat der eben zitierten Arbeit (das Theorem auf S. 195) folgt unmittelbar aus Sargent, l. c. [5]), S. 245 (Th. 5) und Marcinkiewicz-Zygmund, l. c. [4]), S. 36 (Lemma 29), 8.

sein. Sind untere und obere symmetrische Borel-Derivierte in einem Punkte x einander gleich, so definiere ihr gemeinsamer Wert die symmetrische Borel-Ableitung, $BD_s f(x)$, von $f(x)$ in x[14]).

Lemma 1. *Hat die endliche Funktion $f(x)$ über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral, ist $f(x)$ C-stetig in dem inneren Punkte x von (a, b) mit $\underline{CD}\, f(x) \neq -\infty$, so wird in x*

$$\underline{CD} f(x) \leqq \underline{BD} f(x)$$

sein. Ist $f(x)$ C-stetig in x mit $\overline{CD}\, f(x) \neq +\infty$, so gilt

$$\overline{BD} f(x) \leqq \overline{CD} f(x)$$[15]).

Beweis. Wenn $F(x)$ das spezielle Denjoysche Integral von $f(x)$ über (a, x) darstellt $(a < x < b)$, so wird für jeden inneren Punkt x von $a, b)$

$$\int_k^h \frac{d}{dt}\frac{[F(x+t)-F(x)-tf(x)]}{t}dt = \int_k^h \frac{f(x+t-f(x)}{t}\,dt$$

$(0 < k < h;\ h$ genügend klein)

sein; die Integrale sind spezielle Denjoy-Integrale. Partielle Integration liefert:

$$(4)\qquad \frac{F(x+t)-F(x)-tf(x)}{t}\Bigg|_k^h + \int_k^h \frac{F(x+t)-F(x)-tf(x)}{t^2}\,dt = \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt.$$

Ist $f(x)$ C-stetig in x, so wird $\lim\limits_{k\to 0;\ k>0} \dfrac{F(x+k)-F(x)-kf(x)}{k} = 0$ sein; wenn außerdem $\underline{CD}\, f(x) \neq -\infty$ ist, so existiert auch

$$\lim_{k\to 0;\ k>0} \int_k^h \frac{F(x+t)-F(x)-tf(x)}{t^2}\,dt$$

---

[14]) Vgl. Marcinkiewicz und Zygmund, l. c. [4]), S. 36 (§ 43), 8.

[15]) In analoger Weise wie Lemma 1 läßt sich zeigen: $f(x)$ sei über (a, b) nach der speziellen Denjoyschen Definition integrierbar; für jeden inneren Punkt x von (a, b) und jedes genügend kleine, positive h definiere man $\Delta_2 F(x, h) = F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)$, wobei $F(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$, und $\underline{D}_2 F(x) = \liminf\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta_2 F(x, h)}{h^2}$. Wenn dann in einem inneren Punkt x von (a, b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta_2 F(x, h)}{h} = 0$ [dies ist z. B. der Fall, wenn $f(x)$ C-stetig ist in x] und $\underline{D}_2 F(x) \neq -\infty$ ist, so wird $\underline{D}_2 F(x) \leqq \underline{BD}_s f(x)$ sein.

als endlicher Grenzwert oder als uneigentlicher Grenzwert $= +\infty$. Aus (4) folgt dadurch für jedes positive, genügend kleine h:

$$(5)\quad \frac{F(x+h)-F(x)-hf(x)}{h} + \lim_{k\to 0;\ k>0} \int_k^h \frac{F(x+t)-F(x)-tf(x)}{t^2}\,dt = \lim_{k\to 0;\ k>0}{}^{16}) \int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt.$$

Es gibt zu willkürlich positivem ε eine positive Zahl δ derart, daß aus $0 < k < h < \delta$ folgt:

$$(6)\quad \lim_{k\to 0;\ k>0} \int_k^h \frac{F(x+t)-F(x)-tf(x)}{t^2}\,dt \geqq h.\ [\tfrac{1}{2}\,\underline{CD}\,f(x) - \varepsilon].$$

Aus (5) folgt daher nach Teilung durch h und Grenzübergang, daß

$$\liminf_{h\to 0} \lim_{k\to 0}(\inf) \frac{1}{h}\int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt \geqq \liminf_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)-hf(x)}{h} + \tfrac{1}{2}\,\underline{CD}f(x) - \varepsilon = \underline{CD}f(x) - \varepsilon\ (0 < k < h)$$

ist. In analoger Weise läßt sich zeigen:

$$\liminf_{h\to 0} \lim_{k\to 0}(\inf) \frac{1}{h}\int_k^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt \geqq \underline{CD}\,f(x) - \varepsilon,\ \text{mit } h < k < 0.$$

Da ε willkürlich ist, wird somit

$$\underline{BD}\,f(x) \geqq \underline{CD}\,f(x)$$

sein.

Lemma 2. *Hat die endliche Funktion $f(x)$ über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral, so wird in jedem inneren Punkte x von (a, b)*

$$(7)\quad \underline{BD}f(x) \leqq \underline{BD}_s f(x)$$

und

$$\overline{BD}_s f(x) \leqq \overline{BD}\,f(x)$$

sein[17]).

---

[16]) Wenn dieser Limes $\neq +\infty$ ist, wird es ein spezielles Denjoysches Integral $\int_0^h \frac{1}{h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt$ für jedes genügend kleine positive h geben.

[17]) Man vergleiche hiermit das Lemma: $f(x)$ sei über (a, b) nach der speziellen Denjoyschen Definition integrierbar. Dann wird in jedem inneren Punkte x von (a, b) $\underline{CD}\,f(x) \leqq \underline{D_2}\,F(x) \leqq \overline{D_2}\,F(x) \leqq \overline{CD}\,f(x)$ sein; hierbei ist $\underline{D_2}\,F(x) = \liminf_{h\to 0;\ h>0} \frac{\Delta_2 F(x,h)}{h^2}$ und $\overline{D_2}\,F = \limsup_{h\to 0;\ h>0} \frac{\Delta_2 F(x,h)}{h^2}$, wobei $\Delta_2 F(x,h) \equiv F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)$ und $F(x)$ das Integral von $f(x)$ über (a, x) ist.

Beweis. Es ist bei genügend kleinem, positivem h:

$$\frac{1}{h}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\frac{1}{h}\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}=\frac{2}{h}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t},$$

also auch bei $0<k<h$:

$$\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt+\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}dt=\frac{2}{h}\int_k^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt.$$

Wenn $\underline{BD}\, f(x) \neq -\infty$ ist, so folgt hieraus:

$$\liminf_{k\to 0}\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt+\liminf_{k\to 0}\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}dt$$

$$\leqq 2\liminf_{k\to 0}\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t}dt,$$

somit weiter:

$$\liminf_{h\to 0}\liminf_{k\to 0}\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt+\liminf_{h\to 0}\liminf_{k\to 0}\frac{1}{h}\int_k^h\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}dt$$

$$\leqq 2\,\underline{BD}_s f(x),$$

und dadurch wieder:

$$2\,\underline{BD}\, f(x)\leqq 2\,\underline{BD}_s f(x).$$

Wenn $\underline{BD}\, f(x)=-\infty$ ist, so ist die Gültigkeit von (7) ohnemehr deutlich.

In analoger Weise beweist man die zweite Hälfte des Lemmas.

Definition 7. $f(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall (a, b) definiert. Dann soll die in (a, b) endliche Funktion $\psi_3(x)$ eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte B(orel)-Majorante heißen, wenn sie über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral hat und daneben den folgenden Bedingungen genügt: α) sie ist in jedem Punkte x von (a, b) C(esàro)-stetig; β) $\psi_3(a)=0$; γ) mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Teilmenge ist in jedem Punkte x von (a, b) $\underline{BD}\, \psi_3(x) \neq -\infty$, während in diesem Punkte das in der Definition dieser unteren Derivierten auftretende Integral $\int_k^h \frac{1}{h}\frac{\psi_3(x+t)-\psi_3(x)}{t}dt$, sowohl für $0<k<h$ wie auch für $h<k<0$ und bei $|h|$ genügend klein, einen endlichen Grenzwert oder einen uneigentlichen Grenzwert $=+\infty$ hat, wenn k gegen Null konvergiert; δ) fast überall in (a, b) ist $\underline{BD}\, \psi_3 x \geqq f(x)$.

Definition 8. Es soll $\varphi_3(x)$ eine in (a, b) zu $f(x)$ adjungierte B(orel)-Minorante heißen, falls sie in (a, b) endlich ist, über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral besitzt und außerdem den fol-

genden Bedingungen genügt: α) sie ist in jedem Punkte von (a, b) C-stetig; β) $\varphi_3(a) = 0$; γ) mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge ist in jedem Punkte x von (a, b) die obere B(orel)-Derivierte $\overline{BD}\,\varphi_3(x) \neq +\infty$, während das in ihrer Definition auftretende Integral

$$\int_k^h \frac{1}{h}\,\frac{\varphi_3(x+t)-\varphi_3(x)}{t}\,dt$$

in diesem Punkte x, sowohl für $0 < k < h$ wie auch für $h < k < 0$ und bei $|h|$ genügend klein, einen endlichen Grenzwert oder einen uneigentlichen Grenzwert $= -\infty$ hat, wenn k gegen Null konvergiert; δ) fast überall in (a, b) ist $\overline{BD}\,\varphi_3(x) \leqq f(x)$.

Definition 9. Wenn es zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$ sowohl Borel-Majoranten $\{\psi_3(x)\}$ wie Borel-Minoranten $\{\varphi_3(x)\}$ gibt und die untere Schranke aller $\psi_3(b)$-Werte gleich der oberen Schranke aller $\varphi_3(b)$-Werte ist, so soll ihr gemeinsamer Wert das BP-Integral von $f(x)$ über (a, b), $\int_a^b (BP) f(x)\,dx$, heißen.

Wir lassen hier die Definitionen der von Marcinkiewicz und Zygmund eingeführten B_s-Majoranten und B_s-Minoranten und des B_sP-Integrals in etwas abweichender Form folgen [18]).

Definition 10. Eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte B_s-Majorante $\psi_4(x)$ in bezug auf eine a und b enthaltende Teilmenge E von (a, b), mit $m(E) = b - a$, hat über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral, ist endlich in den Punkten von E und genügt daneben den folgenden Bedingungen: α) sie ist in jedem Punkte von E C-stetig; β) $\psi_4(a) = 0$; γ) ausgenommen in den Punkten einer höchstens abzählbaren Teilmenge F von E ist in jedem inneren Punkte x von (a, b) $\underline{BD}_s\,\psi_4(x) \neq -\infty$, während das in der Definition dieser unteren Derivierten auftretende Integral $\int_k^h \frac{\psi_4(x+t)-\psi_4(x-t)}{2t}\,dt$ $(0 < k < h$; h genügend klein) in den nicht zu F gehörenden inneren Punkten von (a, b) einen endlichen Grenzwert oder einen uneigentlichen Grenzwert $= +\infty$ hat, wenn k gegen Null konvergiert; δ) fast überall in (a, b) ist

$$\underline{BD}_s\,\psi_4(x) \geqq f(x).$$

Definition 11. $\varphi_4(x)$ wird eine zu $f(x)$ in (a, b) in bezug auf die in Def. 10 betrachtete Menge E adjungierte B_s-Minorante genannt, wenn sie über (a, b) ein spezielles Denjoysches Integral

[18]) Vgl. Marcinkiewicz und Zygmund, loc. cit. [4]), S. 36, 37 und S. 8.

hat, in den Punkten von E endlich ist und außerdem den folgenden Bedingungen genügt: α) sie ist in jedem Punkte von E C-stetig; β) $\varphi_4(a) = 0$; γ) ausgenommen in den Punkten einer höchstens abzählbaren Teilmenge G von E ist in jedem inneren Punkte x von (a, b) $\overline{BD}\,\varphi_4(x) \neq +\infty$, während das Integral

$$\int_k^h \frac{\varphi_4(x+t) - \varphi_4(x-t)}{2t}\,dt$$

$(0 < k < h$; h genügend klein) in den nicht zu G gehörenden, inneren Punkten von (a, b) einen endlichen Grenzwert oder einen uneigentlichen Grenzwert $= -\infty$ hat, wenn k gegen Null konvergiert; δ) fast überall in (a, b) ist $\overline{BD}_s\,\varphi_4(x) \leqq f(x)$.

Definition 12. Das $B_s P$-Integral von $f(x)$ über (a, b) in bezug auf E, $\int_a^b [B_s P(E)] f(x)\,dx$, wird als der gemeinsame Wert (falls dieser existiert) der oberen Schranke aller möglichen $\varphi_4(b)$-Werte und der unteren Schranke aller möglichen $\psi_4(b)$-Werte erklärt.

Lemma 3. *Die Differenz einer jeden B_s-Majorante $\psi_4(x)$ und einer jeden B_s-Minorante $\varphi_4(x)$, in (a, b) in bezug auf die Teilmenge E* (siehe Definition 10) *adjungiert zu der Funktion $f(x)$, ist (monoton) nicht-abnehmend auf E*[19]).

Aus Lemma 3 folgt, auf Grund der Definitionen 7 bis 12 und des Lemmas 2, sofort als Spezialfall das

Lemma 4. *Die Differenz einer jeden B-Majorante $\psi_3(x)$ und einer jeden B-Minorante $\varphi_3(x)$, in (a, b) adjungiert zu einer daselbst definierten Funktion, ist (monoton) nicht-abnehmend in (a, b).*

Während aus Lemma 3 die Existenz des $B_s P$-Integrals von $f(x)$ in bezug auf E zwischen je zwei Punkten von E folgt, wenn nur das $B_s P$-Integral in bezug auf E über (a, b) existiert, folgt aus Lemma 4 die Existenz des $B P$-Integrals zwischen je zwei Punkten von (a, b), wenn das $B P$-Integral über (a, b) existiert.

Satz II. *Jede über (a, b) $B P$-integrierbare Funktion $f(x)$ hat über (a, b) auch ein $B_s P$-Integral in bezug auf (a, b) selbst, und die Integralwerte sind einander gleich.*

Denn aus den Definitionen 7, 8 und 10, 11 und Lemma 2 folgt, daß die B-Majoranten und die B-Minoranten von $f(x)$ zu der Klasse der B_s-Majoranten bzw. der B_s-Minoranten von $f(x)$ in bezug auf (a, b) selbst gehören.

---

[19]) Der Beweis verläuft der Hauptsache nach wie der des gleichartigen Lemmas bei Marcinkiewicz und Zygmund, loc. cit. [4]). S. 38 (§ 45).

Satz III. *Jede über* (a, b) *C P-integrierbare Funktion* $f(x)$ *hat über* (a, b) *ein B P-Integral und ein* B_s *P-Integral in bezug auf* (a, b) *selbst, beide von gleichem Werte wie das C P-Integral über* (a, b). *Nicht jede über* (a, b) *in bezug auf eine a und b enthaltende Menge E, mit* $m(E) = b - a$, B_s *P-integrierbare Funktion ist auch C P-integrierbar [B P-integrierbar] über* (a, b).

Beweis. Die erste Hälfte des Satzes folgt auf Grund der Definitionen 1, 2 und 7, 8 aus Lemma 1 und Satz II[20]).

Zum Beweise der zweiten Hälfte betrachten wir eine überall konvergente trigonometrische Reihe $f(x) \equiv \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$. Wenn E die Menge ist, in deren Punkten (x) die Reihe

$$\frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin n x - b_n \cos n x}{n} \tag{8}$$

konvergiert (dies ist bekanntlich fast überall der Fall), so ist $f(x)$ B_s *P*-integrierbar in bezug auf E zwischen je zwei Punkten $x_1 < x_2$ von E; wenn $F(x)$ die Summe der Reihe (8) in den Punkten von E darstellt, muß außerdem

$$\int_{x_1}^{x_2} [B_s P(E)] f(x) \, dx = F(x_2) - F(x_1)$$

sein[21]). Wäre nun $f(x)$ auch *C P*-integrierbar [*B P*-integrierbar] über (x_1, x_2), so folgte aus dem ersten Teile von Satz III [aus Satz II], daß $f(x)$ B_s *P*-integrierbar wäre über (x_1, x_2) in bezug auf (x_1, x_2) selbst. Nach einer Eigenschaft der B_s *P*-Integration[22]) wäre sodann

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} [B_s P(x_1, x_2)] f(x) \, dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} [B_s P(E)] f(x) \, dx = F(\xi_2) - F(\xi_1)$$

zwischen je zwei Punkten ξ_1, ξ_2 von E, mit $x_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq x_2$. Setzten wir somit für jedes x in (x_1, x_2)

$$\int_{x_1}^{x} [B_s P(x_1, x_2)] f(x) \, d(x) = G(x) - F(x_1),$$

so würde in den Punkten von E

$$G(x) = F(x)$$

---

[20]) Siehe auch die Bemerkung in Fußnote [16]).

[21]) Siehe Marcinkiewicz und Zygmund, l. c. [4]), S. 40 und 41.

[22]) Siehe Marcinkiewicz und Zygmund, l. c. [4]), S. 38 (Satz γ).

sein. $G(x)$ wäre als unbestimmtes CP-Integral [unbestimmtes BP-Integral] C-stetig in jedem Punkte x von (x_1, x_2), wodurch in x

$$G(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} G(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t)\,dt = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{x-h}^{x+h} F(t)\,dt}{2h}$$

und, da die Reihe $H(x) \equiv \frac{1}{4} a_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2}$ fast überall in (x_1, x_2) eine Ableitung gleich $F(x)$ hat[23]), auch

$$G(x) = \lim_{h \to 0} \frac{H(x+h) - H(x-h)}{2h}$$

wäre. Nach einem bekannten Fatouschen Satze[24]) würde hierdurch die Reihe (8) in *allen* Punkten von (x_1, x_2) konvergieren. Es gibt jedoch trigonometrische Reihen, für die dies nicht der Fall ist. Also wird nicht jede überall konvergente trigonometrische Reihe über jedes Intervall (x_1, x_2) CP-integrierbar [BP-integrierbar] sein können, obwohl eine derartige Reihe immer ein $B_s P$-Integral über (x_1, x_2) hat in bezug auf die Menge der Konvergenzpunkte von (8)[25]).

§ 4.

Satz IV. *Nicht jedes in (a, b) nach der Verblunskyschen Definition unbestimmte Integral* [sogar nicht jedes unbestimmte Integral nach der allgemeinen Denjoyschen Definition] *ist in (a, b) für die Punkte einer*

---

[23]) Siehe Marcinkiewicz und Zygmund, l. c. [4]), S. 41.

[24]) Siehe z. B. A. Zygmund, Trigonometrical Series (Warszawa-Lwów 1935), S. 272.

[25]) Neben dem hier neueingeführten BP-Integral läßt sich auch ein R(iemann)P(erron)-Integral mittels der Perronschen Methode einführen; eine R(iemann)-Majorante $\psi(x)$, adjungiert zu einer in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, soll dabei endlich sein in (a, b), integrierbar über (a, b) nach der speziellen Denjoyschen Definition und weiter den Bedingungen genügen: α) sie ist C-stetig in (a, b); β) $\psi(a) = 0$; γ) mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Teilmenge ist in jedem Punkte x von (a, b) $\underline{D}_2 \Psi(x) \neq -\infty$, wobei $\Psi(x) \equiv \int_a^x \psi(t)\,dt$; δ) fast überall in (a, b) gilt $\underline{D}_2 \Psi(x) \geqq f(x)$. Es läßt sich zeigen, daß jede über (a, b) CP-integrierbare Funktion über (a, b) auch RP-integrierbar, daß jede über (a, b) RP-integrierbare Funktion über (a, b) auch $B_s P$-integrierbar ist in bezug auf das Intervall (a, b) selbst. Wenn zwei dieser Integrale existieren, so sind sie auch immer einander gleich. Bei Entwicklung dieser Theorie sind die in den Fußnoten [15]) und [17]) enthaltenen Hilfssätze zu benutzen.

a und b enthaltenden Teilmenge E von (a, b), mit m(E) = b − a, ein unbestimmtes $B_s P$-Integral, wie auch E übrigens gewählt sein mag. Umgekehrt gibt es Funktionen, welche über ein Intervall (a, b) $B_s P$-integrierbar sind in bezug auf eine a und b enthaltende Menge E, mit m(E) = b − a, ohne darum zwischen je zwei Punkten von E ein Verblunskysches Integral von gleichem Werte wie das $B_s P$-Integral zwischen diesen Punkten zu haben.

Beweis. Die beiden, in der Fußnote 11 angegebenen Beispiele von unbestimmten allgemeinen D-Integralen sind, da die Verblunskysche Integration die allgemeine Denjoysche Integration umfaßt, zugleich unbestimmte V-Integrale. Jedes dieser Beispiele hat in fast allen Punkten einer perfekten Menge von positivem Maße keine endliche Borel-Ableitung. Da jedoch jedes unbestimmte $B_s P$-Integral fast überall eine endliche Borel-Ableitung haben muß [26]), wird keines der Beispiele ein $B_s P$-Integral sein können, wie auch E gewählt sein mag.

Wenn eine überall konvergente trigonometrische Reihe $f(x) \equiv \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ein V-Integral hat zwischen zwei zu der Menge E der Konvergenzpunkte von

$$\frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{n} \tag{9}$$

gehörenden Punkten $x_1 < x_2$, so existiert das V-Integral zwischen je zwei Punkten ξ_1, ξ_2 von E mit $x_1 \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq x_2$. Hat das zwischen ξ_1 und ξ_2 immer existierende $B_s P$-Integral denselben Wert wie das V-Integral zwischen ξ_1 und ξ_2, und setzen wir

$$\int_{x_1}^{x} (V) f(x)\, dx = G(x) - F(x_1),$$

wobei $F(x)$ die Summe von (9) in ihren Konvergenzpunkten darstellt, so wird in den Punkten von E

$$G(x) = F(x)$$

sein. Da $G(x)$ als unbestimmtes V-Integral endliche Ableitung einer stetigen Funktion, somit C-stetig ist in jedem Punkte von (x_1, x_2), wird die Reihe (9) in jedem Punkte von (x_1, x_2) konvergieren [27]). Da dies jedoch nicht bei jeder konvergenten trigonometrischen Reihe $f(x)$ der Fall zu sein braucht, ist hiermit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

---

[26]) Siehe Marcinkiewicz und Zymund, l. c. [4]), S. 39 (Satz η); es läßt sich l. c. hinzufügen, daß die Borel-Ableitung von $F(x)$ fast überall endlich ist.

[27]) Man vergleiche den Beweis von Satz III.

§ 5.

Schlußbemerkung.

Nach Burkill[28]) hat man den Satz:

Wenn für jedes reelle x, mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge, $\limsup_{n \to \infty} \left| \sum_{m=1}^{n} c_m e^{imx} \right| < \infty$ ist, wobei $c_m \equiv a_m - ib_m$, und wenn für jedes x

$$F(x) - iG(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m e^{imx}}{m}$$

konvergiert, dann existieren $ADF(x)$ und $ADG(x)$ fast überall, und es ist

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ADF(x) \cos nx\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ADG(x) \sin nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ADF(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ADG(x) \cos nx\, dx,$$

wobei die Integrale CP-Integrale sind.

Nach Satz I darf man hier auch die V-Integration anwenden, wie dies von Verblunsky[29]) in direkter Weise bewiesen wurde. Nach Satz III läßt sich auch die $B_s P$-Integration benutzen.

---

[28]) Siehe Journal London Math. Soc. 11 (1936), S. 44 (Th. 1).

[29]) Siehe l. c. [2]), S. 209 (Th. 5).

(Eingegangen am 30. September 1936).

Zur integrallosen Darstellung n-dimensionaler isotroper Mannigfaltigkeiten im euklidischen R_{n+2}.

Von

M. Pinl in Prag.

Die Verallgemeinerung der Theorie Mongescher Probleme auf Fälle unterbestimmter Differentialprobleme in *mehreren* unabhängigen Veränderlichen durch E. Goursat[1]) legt es nahe, den Ausbau der Existenztheorie isotroper Mannigfaltigkeiten mit Hilfe dieser eleganten „integrallosen" Methoden zu versuchen. Dabei beschränken wir uns im folgenden auf die n-dimensionalen isotropen Mannigfaltigkeiten V_n des komplexen euklidischen $(n+2)$-dimensionalen Raumes R_{n+2}, sofern man diese im Sinne der E. Goursatschen Theorie als gewisse singuläre Integralmannigfaltigkeiten einer zugeordneten „Hamiltonschen" nichtlinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in $n+1$ unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen auffassen kann.

Versteht man unter $g_{\alpha\beta}$ die quadratische metrische Fundamentalform einer μ-dimensionalen Mannigfaltigkeit V_μ, so ergibt sich aus deren „Charakteristik" (r, μ), worin r den Rang und μ die Minimalzahl der Veränderlichen, d. h. die Dimensionszahl des Gebildes bedeutet[2]), die im folgenden verwendete Terminologie:

(A)	$\lvert g_{\alpha\beta}\rvert \not\equiv 0,\ \mu - r = 0,$	reguläre μ-dimensionale Mannigfaltigkeiten,
(B)	$\lvert g_{\alpha\beta}\rvert \equiv 0,\ \mu - r = k > 0,$	k-fach isotrope μ-dimensionale Mannigfaltigkeiten,
(C)	$g_{\alpha\beta} \equiv 0, \qquad r = 0,$	totalisotrope μ-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

[1]) Vgl. E. Goursat, Sur une généralisation du problème de Monge, Annales Toulouse (3) 22 (1930), S. 249—295.

[2]) Vgl. J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Jahresbericht D. M. V. 35 (1926), S. 280—294; Über die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 87—95.

§ 1.

$r < \mu$, das algebraische Problem singulärer Charakteristiken.

Bezieht man den euklidischen R_{n+2} auf kartesische komplexe Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n+2}$ und betrachtet eine μ-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit V_μ des R_{n+2} in der Darstellung:

$$(1) \qquad x_{\mu+1} = x_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_\mu), \ldots, x_{n+2} = x_{n+2}(x_1, \ldots, x_\mu), \qquad 1 \leqq \mu \leqq n+1$$

so hat die Matrix $\overset{(\mu)}{\mathfrak{G}}$ vom Grad μ der von der im R_{n+2} herrschenden quadratischen Metrik der V_μ aufgeprägten quadratischen Metrik $\overset{(\mu)}{g}_{\alpha\beta}$ die Struktur:

$$(2) \qquad \overset{(\mu)}{\mathfrak{G}} = \| \overset{(\mu)}{g}_{\alpha\beta} \| = \left\| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_{\mu+1}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_{\mu+1}}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right\|$$
$$= E^{(\mu)} + Q_1^{(\mu)} + \ldots + Q_{n+2-\mu}^{(\mu)} = E^{(\mu)} + Q^{(\mu)}$$

unter Verwendung des Kroneckerschen Einheitstensors und leicht verständlicher Matrizensymbole. Neben $\overset{(\mu)}{\mathfrak{G}}$ ist hier noch die Gramsche Matrix:

$$(3) \qquad \mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)} = \| \mathfrak{q}_\varrho \mathfrak{q}_\sigma \|, \quad \mathfrak{q}_\varrho \mathfrak{q}_\sigma = q_{\varrho 1} q_{\sigma 1} + \ldots + q_{\varrho\mu} q_{\sigma\mu}, \; q_{\varrho\alpha} = \frac{\partial x_\varrho}{\partial x_\alpha},$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu; \quad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n+2-\mu$$

vom Grad $n+2-\mu$ von Bedeutung. Matrizen dieser Art hat Herr W. Specht näher untersucht und die beiden folgenden Resultate dieser Arbeit freundlicherweise zur Verfügung gestellt:

(I) *Die Matrix* $\overset{(\mu)}{\mathfrak{G}}$ *ist mindestens vom Rang* $2\mu - n - 2$.

(II) *Die Matrix* $\overset{(\mu)}{\mathfrak{G}}$ *ist vom Rang* $2\mu - n - 2 + \varrho$, *wenn die Matrix* $E^{(n+2-\mu)} + \mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}$ *(unter* $E^{(n+2-\mu)}$ *die Einheitsmatrix vom Grade* $n+2-\mu$ *verstanden) vom Rang* ϱ ist.

Zum Nachweis der Behauptung (I) betrachte man zunächst die Matrix $Q^{(\mu)}$:

$$(4) \qquad Q^{(\mu)} = \| q^*_{\alpha\beta} \|, \quad q^*_{\alpha\beta} = \sum_{\varrho=1}^{n+2-\mu} q_{\varrho\alpha} q_{\varrho\beta} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu$$

und die (ihrer Symmetrie) entsprechende quadratische Form:

$$(5) \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mu} q^*_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = \sum_{\alpha,\beta;\,\varrho=1}^{\mu;\,n+2-\mu} q_{\varrho\alpha} q_{\varrho\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = \sum_{\varrho=1}^{n+2-\mu} \Big(\sum_{\alpha=1}^{\mu} q_{\varrho\alpha} \xi^\alpha \Big)^2$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{n+2-\mu} (\eta^\varrho)^2; \quad \eta^\varrho = \sum_{\alpha=1}^{\mu} q_{\varrho\alpha} \xi^\alpha.$$

Nach (5) ist der Rang von $Q^{(\mu)}$ höchstens $n+2-\mu$, der „Defekt" dieser Matrix also mindestens $2\mu-n-2$. Somit besteht nach einem bekannten Satz:

$$(6)\quad |E^{(\mu)}t+Q^{(\mu)}| \equiv t^{2\mu-n-2}(t^{n+2-\mu}+g_1 t^{n+1-\mu}+g_2 t^{n-\mu}+\ldots+g_{n+2-\mu}),$$

also insbesondere für $t=z+1$:

$$(7)\quad |E^{(\mu)}z+(E^{(\mu)}+Q^{(\mu)})| = (z+1)^{2\mu-n-2}(z^{n+2-\mu}+f_1 z^{n+1-\mu}+f_2 z^{n-\mu}+\ldots+f_{n+2-\mu})$$

mit gewissen von g_ϱ abhangenden Koeffizienten f_ϱ. Ersichtlich kann der Wert $z=0$ für (7) höchstens als $(n+2-\mu)$-fache Wurzel auftreten. Daher kann der Defekt der Matrix $E^{(\mu)}+Q^{(\mu)}$ den Wert $n+2-\mu$ nicht über-, der Rang den Wert $2\mu-n-2$ nicht unterschreiten.

Zum Nachweis der Behauptung (II) entwickle man die Determinante $|E^{(n+2-\mu)}t+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}|$ in der Form:

$$(8)\quad |E^{(n+2-\mu)}t+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}| \equiv t^{n+2-\mu}+h_1 t^{n+1-\mu}+h_2 t^{n-\mu}+\ldots+h_{n+2-\mu}.$$

Dann zeigt eine längere Rechnung, die wir hier übergehen, die Identität der Koeffizienten h_k in (8) mit g_k in (6), d. h. die Identität:

$$(9)\quad |E^{(\mu)}t+Q^{(\mu)}| \equiv t^{2\mu-n-2}|E^{(n+2-\mu)}t+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}| \qquad \{t\}.$$

Wiederum ergibt die Substitution: $t=z+1$:

$$(10)\quad |E^{(\mu)}z+(E^{(\mu)}+Q^{(\mu)})| = (z+1)^{2\mu-n-2}|E^{(n+2-\mu)}z+(E^{(n+2-\mu)}+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)})|.$$

Somit haben die Matrizen $E^{(\mu)}+Q^{(\mu)}$ und $E^{(n+2-\mu)}+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}$ den gleichen Defekt und der Rang von $E^{(\mu)}+Q^{(\mu)}$ ist $2\mu-n-2+\varrho$, wenn ϱ der Rang von $E^{(n+2-\mu)}+\mathfrak{Q}^{(n+2-\mu)}$ ist.

Damit ist die nötige Ordnung und Übersicht für die Aufstellung der die isotropen (oder totalisotropen) Mannigfaltigkeiten im R_{n+2} definierenden Differentialgleichungen gewonnen. So ergibt sich z. B. in aufsteigender Folge der Dimensions- und Rangzahlen für $\mu=1,2,3$; $r=0,1,2$:

$$(a)\quad n \geqq 0,\quad \mu=1,\quad r=0,\quad \overset{(1)}{\mathfrak{G}} = \|\delta_1^1+x_2'^2+\ldots+x_{n+2}'^2\|,$$

$$(11)\qquad 1+x_2'^2+\ldots+x_{n+2}'^2=0,\quad \left(x_k'=\frac{dx_k}{dx_1},\quad k=2,\ldots,n+2\right)$$

als Differentialgleichung der isotropen Kurven im R_{n+2} (für $n \geqq 1$ unterbestimmt vom Grad n)[3])

[3]) Vgl. W. Groß, Math. Annalen 73 (1913), S. 109—172.

(b) $n \geqq 1, \quad \mu = 2, \quad r = 1;$

$$\overset{(2)}{\mathfrak{G}} = \left\| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_3}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right\| \qquad \alpha, \beta = 1, 2,$$

$$(12) \quad \left[1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_1}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_2}\right)^2\right] - \left[\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_1}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_2}\right]^2 = 0$$

als Differentialgleichung der isotropen Flächen im R_{n+2} (für $n \geqq 2$ unterbestimmt vom Grad $n-1$);

(c) $n \geqq 2, \quad \mu = 2, \quad r = 0;$

$$\overset{(2)}{\mathfrak{G}} = \left\| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_3}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right\|, \qquad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$(13) \quad \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_3}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_3}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} = 0$$

als Differentialsystem der totalisotropen Flächen im R_{n+2} (für $n = 2$ überbestimmt, für $n \geqq 4$ unterbestimmt vom Grad $n-3$);

(d) $n \geqq 2, \quad \mu = 3, \quad r = 2;$

$$\overset{(3)}{\mathfrak{G}} = \left\| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_4}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right\|$$

$$(14) \quad \left| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_4}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right| = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

als Differentialgleichung der einfach isotropen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_{n+2} (für $n \geqq 3$ unterbestimmt vom Grad $n-2$);

(e) $n \geqq 3, \quad \mu = 3, \quad r = 1;$

$$\overset{(3)}{\mathfrak{G}} = \left\| \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial x_4}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_4}{\partial x_\beta} + \ldots + \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\beta} \right\|,$$

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial \overset{(3)}{g}_{\alpha\beta}} \left| \overset{(3)}{\mathfrak{G}} \right| = 0, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

als Differentialsystem der zweifach isotropen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_{n+2} (für $n \geqq 4$ unterbestimmt vom Grad $n-3$).

Die Integration der Gleichungen und Systeme (11), (12), (13) ist (im Falle (11) auch „integrallos") bekannt und wurde mehrfach behandelt[4]).

[4]) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. § 23, S. 45, Berlin, Springer 1930, $(n+2=3)$; M. Pinl, Zur dualistischen Theorie isotroper Kurven, Monatshefte f. Math. u. Phys. 44 (1936), S. 1—12, $(n+2 \geq 3)$.

Unter den Gleichungen (13) und (15) hat man mit „Integrabilitätsbedingungen" zu rechnen. Man kann sich auch in den nicht unter bestimmten Fällen vielfach von der Existenz der Integralmannigfaltigkeiten durch Beispiele überzeugen, die nurmehr die Existenz von Lösungen gewöhnlicher unterbestimmter Differentialsysteme voraussetzen:

(d) V_3 im R_4 vom Rang 2: $\mathfrak{y}(u_1, u_2, u_3) = \mathfrak{x}(u_1) + u_2\mathfrak{x}' + u_3\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'^2 \equiv 1$, $\mathfrak{x}''^2 \equiv 0$, $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{x}^{IV}) \not\equiv 0$ $\{u_1\}$,

(e) V_3 im R_5 vom Rang 1: $\mathfrak{y}(u_1, u_2, u_3) = \mathfrak{x}(u_1) + u_2\mathfrak{x}' + u_3\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'^2 \equiv \mathfrak{x}''^2 \equiv 0$, $(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{x}^{IV}, \mathfrak{x}^{V}) \not\equiv 0$ $\{u_1\}$,

wobei die verwendeten Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ entsprechend jeweils vier bzw. fünf Komponenten zusammenfassen. Die gewöhnlichen Differentialsysteme:

(16) $\mathfrak{x}'^2 = 1$, $\mathfrak{x}''^2 = 0$ im R_4 und $\mathfrak{x}'^2 = \mathfrak{x}''^2 = 0$ im R_5

sind beide unterbestimmt (Mongesche Probleme in einer unabhängigen Veränderlichen) und gehören zum Typus der von Herrn J. Lense in neuerer Zeit ausführlich untersuchten Mongeschen Systeme[5]).

§ 2.

Das Mongesche Problem der Charakteristik $(n-1, n)$.

Es sei:

(17) $$V(x_1, \ldots, x_{n+2}; u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0$$

ein vollständiges Integral der partiellen nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung:

(18) $$H(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}; q_1, \ldots, q_{n+1}) = 0 \quad \left(q_k = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1$$

und

(19) $$u_{n+1} = f(u_1, \ldots, u_n)$$

eine analytische sonst beliebige Funktion der Parameter $u_1, \ldots, u_n$. Dann bestimmt das System:

(20) $$V(x_1, \ldots, x_{n+2}; u_1, \ldots, u_n, f(u_1, \ldots, u_n)) \equiv W(x_1, \ldots, x_{n+2}; u_1, \ldots, u_n) = 0, \; W_{u_\alpha} = 0, \left(W_{u_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n\right),$$

die $(2n+1)$-parametrige Charakteristikenschar von (18) und durch Elimination der Parameter $u_1, \ldots, u_n$ erhält man aus (20) für jede Wahl von

[5]) Vgl. J. Lense, Über Kurven mit isotropen Normalen, Math. Annalen 112 (1935), S. 139—154.

f eine partikuläre $(n+1)$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit V_{n+1} als Ort einer (nach Wahl von f) n-parametrigen Charakteristikenschar, der Schnittkurven von je $n+1$ Hyperflächen (20). Nunmehr betrachten wir das System:

$$(21)\quad W = 0,\ W_{u_1} = 0, \ldots, W_{u_n} = 0,\ |W_{u_\alpha u_\beta}| = 0 \qquad \left(W_{u_\alpha u_\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_\alpha \partial u_\beta},\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Das System (21) gestattet im allgemeinen die Berechnung der Komponenten $x_1, \ldots, x_{n+2}$ des Vektors $\mathfrak{x}$ als Funktion der Parameter $u_1, \ldots, u_n$. Die so definierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}$ auf V_{n+1} heißt „Fokalmannigfaltigkeit" der Charakteristiken auf V_{n+1}[6]) oder „Gratmannigfaltigkeit" der n-parametrigen Hyperflächenschar $W = 0$.

Die einfachsten Scharen dieser Art sind Hyperebenenscharen. Ihre Gratmannigfaltigkeiten $\mathfrak{x}$ bestimmen sich aus dem System:

$$(22)\quad \mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n)\,\mathfrak{x} + \varphi(u_1, \ldots, u_n) = 0,\quad \mathfrak{a}_\alpha\,\mathfrak{x} + \varphi_\alpha = 0,$$
$$|\mathfrak{a}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{x} + \varphi_{\alpha\beta}| = 0 \quad \left(\mathfrak{a}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u_\alpha},\ \varphi_\alpha = \ldots, \ldots;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n\right),$$

wofern diese Gleichungen ein System von $n+2$ unabhängigen Bedingungen für die $n+2$ Komponenten $x_1, \ldots, x_{n+2}$ des Vektors $\mathfrak{x}$ darstellen[7]). Die Gleichungen (22) verwandeln sich in Identitäten (in $u_1, \ldots, u_n$) für jede Lösung $\mathfrak{x}$. Dann ergibt weitere Differentiation:

$$(23)\qquad \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_\alpha \equiv 0,\quad |\mathfrak{a}_\alpha\,\mathfrak{x}_\beta| \equiv 0 \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$$

für jede Lösung $\mathfrak{x}$. Die Charakteristikenscharen erscheinen jetzt durch die Schnittgeraden von je $n+1$ $(n+1)$-dimensionalen Hyperebenen des R_{n+2} mit den Stellungsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ gegeben, die wir durch den Vektor $\mathfrak{s}(u_1, \ldots, u_n)$ charakterisieren. Es gilt:

$$(24)\quad \mathfrak{s}\,\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{s}\,\mathfrak{a}_1 \equiv \ldots \mathfrak{s}\,\mathfrak{a}_n \equiv 0 \quad \{u_1, \ldots, u_n\},\ \text{d. h.}\ \mathfrak{s} = \sigma[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$$

unter Verwendung des Plückerschen Vektors[8]) zur Basis $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ und eines Proportionalitätsfaktors $\sigma \not\equiv 0$. Offenbar läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Stellungsvektor $\mathfrak{a}$ derart wählen, daß:

$$(25)\qquad \mathfrak{a}^2 \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},\quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_\alpha \equiv 0,\quad \{u_1, \ldots, u_n\},\quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

---

[6]) Vgl. (1) insbesondere Fußnote zu S. 257.

[7]) Vgl. die Schlußbemerkungen zu diesem Paragraphen.

[8]) Die Komponenten der Vektoren der Basis $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bilden eine rechteckige Matrix vom Typus $(n+2, n+1)$, deren $n+2$ quadratische Determinanten $(n+1)$-ter Ordnung die Komponenten des Plückerschen Vektors im wesentlichen bestimmen; vgl. Duscheck-Mayer, Diff. Geometrie, Bd. II, § 7, Leipzig 1930.

Dann ergibt sich für den Betrag des Plückerschen Vektors $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, d. h. für die Gramsche Determinante $G_{n+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ in jedem Falle:

$$(26) \quad G_{n+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}^2 |\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta|, \quad \mathfrak{s}^2 = \sigma^2 \mathfrak{a}^2 |\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Bedeutet $\mathfrak{v}$ einen beliebigen Vektor, so ergibt sich für das Determinantenquadrat $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{v})^2$:

$$(27) \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{v})^2 = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}^2, & 0, & \ldots & 0, & * \\ 0, & \mathfrak{a}_1^2, & \ldots, & \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_n, & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0, & \mathfrak{a}_n \mathfrak{a}_1, & \ldots, & \mathfrak{a}_n^2, & * \\ *, & *, & \ldots, & *, & * \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{v})$ verschwände mithin identisch in $\mathfrak{v}$, wenn in (26) beide Faktoren verschwinden. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ist dieser Fall auszuschließen. Mit anderen Worten: für den Defekt τ der Gramschen Matrix $\mathfrak{G}_{n+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ gilt notwendig $\tau \leqq 1$ und man hat das Ergebnis:

(III) *Die Charakteristiken* $\mathfrak{s}$ *der n-parametrigen Schar* (22) *sind euklidische oder isotrope Gerade, je nachdem, ob die Gramsche Matrix der* $n+1$ *linear unabhängigen Stellungsvektoren* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *regulär* ($\tau = 0$) *oder einfach singulär* ($\tau = 1$) *ist.*

Sehen wir von dem Fall regulärer Gramscher Matrizen ab, so hat man für $\tau = 1$ die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

(a) $\mathfrak{a}^2 \equiv 0, \ |\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta| \not\equiv 0$ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ (isotrope Schar mit isotropen Charakteristiken),

(b) $\mathfrak{a}^2 \equiv 1, \ |\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta| \equiv 0$ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ (anisotrope Schar mit isotropen Charakteristiken).

Für $n = 1$ reduziert sich das System (22) auf die Gleichungen:

$$(28) \quad \mathfrak{a}(u_1)\mathfrak{x} + \varphi(u_1) = 0, \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{x} + \varphi' = 0, \quad \mathfrak{a}''\mathfrak{x} + \varphi'' = 0,$$

so daß jede Lösung $\mathfrak{x}(u_1)$ die (23) entsprechenden Identitäten:

$$(29) \quad \mathfrak{a}\mathfrak{x}' \equiv 0, \quad \mathfrak{a}'\mathfrak{x}' \equiv 0 \qquad \{u_1\}$$

liefert. In diesem Fall erhält man für (b):

$$(30) \quad \mathfrak{a}^2 \equiv 1, \quad \mathfrak{a}'^2 \equiv 0, \quad \text{d. h.} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') \equiv 0 \qquad \{u_1\}$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen über das System (28). Hier bleibt als einzige Möglichkeit Fall (a), wodurch man auf die bekannte dualistische Auffassung der isotropen Kurven des dreidimensionalen Raumes[9]) und ihre integrallose Darstellung[10]) geführt wird, die hier als ein Spezialfall unserer Systematik erscheint.

---

[9]) Vgl. [4]).

[10]) Vgl. [9]).

Für $n > 1$ führt die Bestimmung der Scharen $\mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n)$ im Falle (b) auf das Integrationsproblem $|\mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{a}_\beta| = 0$, das wir als die Aufgabe der Bestimmung aller n-dimensionalen isotropen Mannigfaltigkeiten auf der Einheitshyperkugel $\mathfrak{a}^2 \equiv 1$ des R_{n+2} deuten können. Man stünde wiederum vor der Aufgabe, eine Mongesche Differentialgleichung zu integrieren (unter der Nebenbedingung $\mathfrak{a}^2 \equiv 1$), was gerade durch Einführung der Hyperebenenschar $\mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n)$ vermieden werden sollte. Dagegen ergibt Fall (a), auf dessen Behandlung wir uns nunmehr beschränken, unmittelbar die Möglichkeit, die neuere Theorie Mongescher Probleme nach E. Goursat[11]) anzuwenden.

Wir stellen uns also die Aufgabe, die Fokalmannigfaltigkeiten $\mathfrak{x}(u_1, \ldots, u_n)$ einer n-parametrigen Schar isotroper Charakteristiken zu bestimmen, die wir mit Hilfe einer n-parametrigen nichtparallelen Hyperebenenschar vom isotropen Stellungsvektor $\mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n)$ ausschneiden. Nach diesen unseren Voraussetzungen verschwindet das Determinantenquadrat

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, \mathfrak{x}_\alpha)^2$$

für jede Lösung $\mathfrak{x}$, so daß wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ die Beziehungen:

$$\mathfrak{x}_\alpha = \lambda_0^{(\alpha)} \mathfrak{a} + \lambda_1^{(\alpha)} \mathfrak{a}_1 + \ldots + \lambda_n^{(\alpha)} \mathfrak{a}_n \tag{31}$$

für jede Lösung $\mathfrak{x}$ bestehen. Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_\beta$ ergibt wegen (23):

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_1^{(\alpha)} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_\beta + \ldots + \lambda_n^{(\alpha)} \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_\beta \quad \beta = 1, 2, \ldots, n \qquad (\alpha \text{ fest}). \tag{32}$$

Nach (23) ist die Matrix $\| \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_\beta, \ldots, \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_\beta \|$ vom Defekt 1. Daher ist auch die erweiterte Matrix $\| g_{\alpha\beta}, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_\beta, \ldots, \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_\beta \|$ vom Defekt 1. Somit gilt z. B.:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1} \mathfrak{x}_1, g_{\alpha 1}, \mathfrak{a}_{\lambda+1} \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1} \mathfrak{x}_2, g_{\alpha 2}, \mathfrak{a}_{\lambda+1} \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_n, \ldots, \mathfrak{a}_{\lambda-1} \mathfrak{x}_n, g_{\alpha n}, \mathfrak{a}_{\lambda+1} \mathfrak{x}_n, \ldots, \mathfrak{a}_n \mathfrak{x}_n \end{vmatrix} = g_{\alpha 1} A_{\lambda 1} + \ldots + g_{\alpha n} A_{\lambda n} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{33}$$

für jeden festen Wert λ. Da die Unterdeterminanten $(n-1)$-ter Ordnung $A_{\lambda\mu}$ der Matrix $\| \mathfrak{a}_\lambda \mathfrak{x}_\mu \|$ nicht alle verschwinden, folgt notwendig $|g_{\alpha\beta}| \equiv 0$. Die Gramsche Matrix $\mathfrak{G}_{n+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ist unter diesen Umständen vom Defekt 2, d. h. der Stellungsvektor der Hyperebenenschar liegt im Tangentialraum der Gratmannigfaltigkeit[12]). Umgekehrt ergibt sich aus dieser Eigenschaft unmittelbar der isotrope Charakter von $\mathfrak{x}$.

---

[11]) Vgl. [1]).

[12]) $m-1$ Vektoren eines euklidischen R_m $(m \geq 3)$ $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{m-1}$, deren Gramsche Matrix vom Defekt 2 ist, sind stets linear abhängig; vgl. (I) in § 1.

Deuten wir nunmehr die n-parametrige Hyperebenenschar $\mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n)$ als Teilschar einer $(n+1)$-parametrigen Hyperebenenschar vom isotropen Stellungsvektor $\mathfrak{m}(u_1, \ldots, u_{n+1})$ im Sinne der Substitution (19):

$$(34)\quad \begin{gathered} V \equiv \mathfrak{m}(u_1, \ldots, u_{n+1})\,\mathfrak{x} + \psi(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0,\ \mathfrak{m}^2 \equiv 0\ \{u_1, \ldots, u_{n+1}\}, \\ \mathfrak{m}(u_1, \ldots, u_n, f(u_1, \ldots, u_n)) \equiv \mathfrak{a}(u_1, \ldots, u_n) \\ \psi(u_1, \ldots, u_n, f(u_1, \ldots, u_n)) \equiv \varphi(u_1, \ldots, u_n) \end{gathered}.$$

Dann ist, wie man leicht erkennt[13]), die Schar $V = 0$ ein vollständiges Integral der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung der isotropen Hypertorsen des R_{n+2}:

$$(35)\quad \begin{gathered} H \equiv 1 + q_1^2 + \ldots + q_{n+1}^2 = 0, \\ q_{n+1} = \pm i\sqrt{1 + q_1^2 + \ldots + q_n^2}, \end{gathered} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit:

$$(36)\quad x_{n+1} = x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n),\ x_{n+2} = x_{n+2}(x_1, \ldots, x_n)$$

ist Träger einer regulären Integralhyperfläche x_{n+2} der Gleichung (35), wenn sich die Stellungsparameter $q_1, \ldots, q_{n+1}$ aus (35) und (36) in allen Punkten allgemeiner Lage der Mannigfaltigkeit (36) bestimmen lassen (reguläres Cauchysches Problem für $H = 0$). Demnach muß die Relation

$$(37)\quad dx_{n+2} = q_1 dx_1 + q_2 dx_2 + \ldots + q_{n+1} dx_{n+1}$$

unter Berücksichtigung von (35) und (36), d. h. auf dem „Streifen" (36) der Integralhyperfläche x_{n+2} identisch in $dx_1, \ldots, dx_n$ erfüllt sein. Damit ergibt sich unter Verwendung der Bezeichnungen:

$$(38)\quad p_1^\alpha = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_\alpha}, \quad p_2^\alpha = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

für die Stellungsparameter $q_1, \ldots, q_n$ (q_{n+1} ist durch (35) festgelegt) das Bedingungssystem:

$$(39)\quad Q_\alpha \equiv q_\alpha \pm i\sqrt{1 + q_1^2 + \ldots + q_n^2}\ p_1^\alpha - p_2^\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

und als notwendige und hinreichende Bedingung für ein reguläres Cauchysches Problem das nichtidentische Verschwinden der Funktionaldeterminante $\Delta^{(n)}$ dieses Systems bezüglich $q_1, \ldots, q_n$:

$$(40)\quad \begin{gathered} \Delta^{(n)} \equiv \left|\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}\right| \equiv \left|\delta_\alpha^\beta \pm \frac{i}{W} p_1^\alpha q_\beta\right| \not\equiv 0\ \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ W = \sqrt{1 + q_1^2 + \ldots + q_n^2},\ \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}. \end{gathered}$$

Das Cauchysche Problem wird somit singulär, wenn längs einer Mannigfaltigkeit (36):

$$(41)\quad Q_\alpha \equiv 0,\ \Delta^{(n)} \equiv 0 \quad \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

[13]) Durch Differentiation von (34) nach $x_1, \ldots, x_{n+1}$ und Elimination der Komponenten von $\mathfrak{m}$ unter Benutzung von $\mathfrak{m}^2 = 0$ entsteht gerade (35).

Mannigfaltigkeiten dieser Art heißen nach E. Goursat[14]) singuläre Integralmannigfaltigkeiten. Sie genügen den Eliminanten, die man aus (41) nach Entfernung der Parameter $q_1, \ldots, q_n$ erhält, also im allgemeinen[15]) einer Mongeschen Differentialgleichung der Form:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}; p_1^1, \ldots, p_1^n, p_2^1, \ldots, p_2^n) = 0 \tag{42}$$

in n unabhängigen und zwei abhängigen Veränderlichen.

Setzt man $W^* = \pm i W$, so kann im vorliegenden Fall W^* mit Hilfe der Gleichungen (39) durch p_1^α und p_2^α ausgedrückt werden und genügt der quadratischen Gleichung[16]):

$$W^{*2}[1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2] - 2 W^* \sum_{\alpha=1}^{n} p_1^\alpha p_2^\alpha + [1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_2^\alpha)^2] = 0. \tag{43}$$

Nach Elimination von W^* gemäß (43) stellt (41) ein lineares homogenes System (Σ) von $n+1$ Gleichungen für die Größen $1, q_1, \ldots, q_n$ dar, wofern man nur berücksichtigt, daß das Verschwinden der Funktionaldeterminante $\Delta^{(n)}$ auf die Relation:

$$\Delta^{(n)} \equiv 1 \pm \frac{i}{W}(p_1^1 q_1 + \ldots + p_1^n q_n) = 0 \tag{44}$$

reduziert werden kann. Die Determinante des Systems (Σ) verschwindet somit notwendig, wodurch sich für W^* eine weitere lineare Relation ergibt:

$$W^*[1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2] - \sum_{\alpha=1}^{n} p_1^\alpha p_2^\alpha = 0. \tag{45}$$

Demnach besitzt die quadratische Gleichung (43) die Doppelwurzel

$$\frac{\sum_{\alpha=1}^{n} p_1^\alpha p_2^\alpha}{1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2},$$

wofern nur $1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2 \neq 0$. *Für die Diskriminante der metrischen Fundamentalform der Mannigfaltigkeit* (36) *gilt:*

$$\overset{(n)}{G} \equiv |\overset{(n)}{g}_{\alpha\beta}| \equiv |\delta_\alpha^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta + p_2^\alpha p_2^\beta| \equiv D^{(2)} \equiv |\delta_r^s + p_r^1 p_s^1 + \ldots + p_r^n p_s^n| \tag{46}$$

$$\equiv [1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2][1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_2^\alpha)^2] - (\sum_{\alpha=1}^{n} p_1^\alpha p_2^\alpha)^2.$$

Sie ist also mit der Diskriminante der quadratischen Gleichung (43) identisch und stellt durch ihr Verschwinden die gesuchte Mongesche

[14]) Vgl. (1), insbesondere S. 252.

[15]) Solange $\left\| \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} \right\|$ vom Rang $n-1$ ist.

[16]) Bei der Durchführung dieser Elimination wurde ich von Herrn F. Behrend in freundlichster und förderlichster Weise unterstützt.

Eliminantengleichung (42) dar. Damit ist der Anschluß an die früheren Ergebnisse erreicht[17]).

(IV) *Die singulären n-dimensionalen Integralmannigfaltigkeiten der „Hamiltonschen" Gleichung*

$$H \equiv 1 + q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_{n+1}^2 = 0, \quad \left(q_k = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1\right)$$

sind Lösungen der zugeordneten Mongeschen Gleichung:

$$M \equiv |\delta_\alpha^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta + p_2^\alpha p_2^\beta| = 0 \quad \left(p_r^\alpha = \frac{\partial x_{n+r}}{\partial x_\alpha}, \ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; \ r = 1, 2\right)$$

und als solche gewisse isotrope Mannigfaltigkeiten von der allgemeinen Charakteristik $(n-1, n)$. *Sie gestatten bei Kenntnis eines vollständigen Integrals der Hamiltonschen Gleichung (einer* $(n+1)$*-parametrigen isotropen Hyperebenenschar) eine integrallose Darstellung, die von einer analytischen sonst beliebigen Funktion von n (komplexen) Veränderlichen und deren ersten und zweiten Ableitungen abhängt.*

Um den Ausnahmsfall $1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2 \equiv 0$ zu diskutieren, zeigen wir allgemein:

(V) *Ist die Orthogonalprojektion* $\mathfrak{y}$ *einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{x}$ *auf eine beliebige Hyperebene des* R_{n+2} *vom Stellungsvektor* $\mathfrak{e}$ *von der Charakteristik* $(n-1, n)$, *d. h. einfach isotrop, so ist* $\mathfrak{x}$ *selbst von der Charakteristik* $(n-2, n)$, *d. h. zweifach isotrop.*

Ist nämlich:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(u_1, \ldots, u) - \mathfrak{e}(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{e}^2 = 1 \tag{47}$$

die Vektorgleichung der Projektion und verschwindet:

$$|\mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta| = |\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta - (\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_\alpha)(\mathfrak{e}\,\mathfrak{x}_\beta)| \equiv 0 \,\{\mathfrak{e}\}, \ \mathfrak{e}^2 = 1, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{48}$$

(identisch für alle Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$), so ergibt sich z. B.;

$$|\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta - (\mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_\alpha)(\mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_\beta)| \equiv |\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta| - B_{kk}(\mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_k)^2 \equiv 0 \quad \{\mathfrak{e}_k\} \tag{49}$$
$$\alpha, \beta, k = 1, 2, \ldots, n$$

für alle Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_k$, welche den $n-1$ Bedingungen:

$$\mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_2 = \ldots = \mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_{k-1} = \mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_{k+1} = \ldots = \mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_n = 0, \ \mathfrak{e}_k \mathfrak{x}_k \neq 0 \tag{50}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n$$

genügen. Angenommen, die symmetrische Matrix $\|\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta\|$ wäre vom Rang n oder $n-1$. Dann besteht (49) für unendlich viele $\mathfrak{e}_k$. Somit verschwinden notwendig alle Hauptminoren B_{kk} und gemäß (49) zwei Eigenwerte der Matrix, wodurch aber für $\|\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta\|$ gerade der Rang $n-2$ bedingt ist.

---

[17]) Vgl. Gleichung (33).

Demnach ist die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{x}$ von der Charakteristik $(n-2, n)$ und nach (II) von keiner kleineren[18]).

Für $\mathfrak{e} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ ergibt sich für (36):

$$(51)\quad \mathfrak{y} = \mathfrak{x}(x_1, \ldots, x_n) - \mathfrak{e} \cdot x_{n+2},\ |\mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta| = |\delta_\alpha^\beta + p_1^\alpha p_1^\beta| = 1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2,$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach (45) verschwindet mit $1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_1^\alpha)^2$ stets auch $\sum_{\alpha=1}^{n} p_1^\alpha p_2^\alpha$ und nach (43) überdies $1 + \sum_{\alpha=1}^{n} (p_2^\alpha)^2$. Daher ist in diesem Falle die Matrix

$$(52)\qquad \mathfrak{D}^{(2)} = \left\| \delta_r^s + \sum_{\alpha=1}^{n} p_r^\alpha p_s^\alpha \right\| \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n;\ r, s = 1, 2$$

vom Rang Null, die Matrix $\|g_{\alpha\beta}\|$ nach (II) entsprechend vom Rang $n-2$, d. h. von der Charakteristik $(n-2, n)$ in Übereinstimmung mit (V). Die Umkehrung ist evident.

Als Beispiel projizieren wir die isotrope dreidimensionale Torse des R_5:

$$(53)\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}(u_1) + u_2 \mathfrak{x}'(u_1) + u_3 \mathfrak{x}''(u_1),\ \mathfrak{x}'^2 \equiv \mathfrak{x}''^2 \equiv 0,\ (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''', \mathfrak{x}^{IV}, \mathfrak{x}^V) \not\equiv 0 \quad \{u_1\}$$

von der Charakteristik $(1, 3)$ und den Fundamentalkomponenten:

$$(54)\qquad g_{11} = \mathfrak{z}_1^2,\quad g_{12} = g_{13} = g_{22} = g_{23} = g_{33} = 0$$

auf den R_4 vom Einheitsnormalvektor $\mathfrak{e}$ und erhalten für die Projektionsmannigfaltigkeit $\mathfrak{y}$:

$$(55)\qquad |\mathfrak{y}_\alpha \mathfrak{y}_\beta| = \begin{vmatrix} \mathfrak{z}_1^2 - (\mathfrak{e}\mathfrak{z}_1)^2, & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_1)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_2), & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_1)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_3) \\ -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_1)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_2), & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_2)^2, & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_2)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_3) \\ -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_1)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_3), & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_2)(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_3), & -(\mathfrak{e}\mathfrak{z}_3)^2 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \{\mathfrak{e}\},$$

d. h. die Projektion ist von der Charakteristik $(2, 3)$.

Die im Vorhergehenden integrallos dargestellten isotropen Mannigfaltigkeiten der Charakteristik $(n-1, n)$ waren stets ein singuläres Cauchysches Problem für die Hamiltonsche Gleichung (35). Es entsteht die Frage: gibt es (für $n > 1$) auch nichtsinguläre isotrope Cauchysche Probleme der Charakteristik $(n-1, n)$ für die Hamiltonsche Gleichung (35)? Mit anderen Worten: kann man eine isotrope n-dimensionale Mannigfaltigkeit von der Charakteristik $(n-1, n)$ vorgeben, durch die eine Integralhyperfläche der Gleichung (35) hindurchgeht, die jedoch keine Fokalmannigfaltigkeit der n-parametrigen isotropen Charakteristikenschar dar-

[18]) Vgl. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, Kap. V, § 20, S. 61, Teubner 1925.

stellt? Die Frage ist bereits für $n = 2$ zu bejahen. Bekanntlich[19]) zerfallen die isotropen Torsen des R_4 in zwei Klassen:

$$\text{(56)}\quad \mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\,\mathfrak{y}'(u_1), \quad \mathfrak{y}'^2 \equiv \mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}'' \equiv 0,$$
$$\mathfrak{y}''^2 \equiv -1, \quad \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} g_{11}, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix} \text{ vom Rang 1,}$$

$$\text{(57)}\quad \mathfrak{x}^*(u_1, u_2) = \mathfrak{y}^*(u_1) + u_2\,\mathfrak{y}^{*\prime}(u_1), \quad \mathfrak{y}^{*\prime 2} \equiv 1,$$
$$\mathfrak{y}^{*\prime\prime 2} \equiv 0, \quad \|g^*_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{Vmatrix} \text{ vom Rang 1.}$$

deren erste also durch die Tangentenflächen isotroper Kurven, deren zweite durch die Tangentenflächen der Kurven des R_4 mit isotroper Trinormale[20]) gegeben ist. Die Flächen beider Klassen sind von der Charakteristik (1, 2). Dann gilt:

(VI) *Die Tangentenflächen des R_4 der Kurven mit isotroper Trinormale sind nichtsinguläre Cauchysche Probleme für die Differentialgleichung der isotropen Hypertorsen des R_4.*

Diese Behauptung ist erwiesen, sobald sich eine Darstellung dieser Flächen als Gratflächen einer zweiparametrigen isotropen R_3-schar in R_4 als unmöglich herausstellt. Nach Voraussetzung gilt der Ansatz (57). Dann bedingen die Gleichungen (23) (für $\alpha = 1, 2$):

$$\text{(58)}\quad \mathfrak{a}(\mathfrak{y}^{*\prime} + u_2\,\mathfrak{y}^{*\prime\prime}) = 0, \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{y}^{*\prime} = 0, \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{y}^{*\prime\prime} = 0, \quad \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{y}^{*\prime} = 0, \quad \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{y}^{*\prime} = 0,$$

also

$$\text{(59)}\qquad \mathfrak{y}^{*\prime} = \sigma^*[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2], \quad \mathfrak{y}^{*\prime 2} \equiv 0\ \{u_1\}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{y}^{*\prime 2} \equiv 1$. Gleichwohl liegt die isotrope Torse (57) als zweidimensionaler „Streifen" $\mathfrak{z}(u_1, u_2, 0)$ auf der isotropen Hypertorse[21]) des R_4:

$$\text{(60)}\qquad \mathfrak{z}(u_1, u_2, u_3) = \mathfrak{y}^*(u_1) + u_2\,\mathfrak{y}^{*\prime}(u_1) + u_3\,\mathfrak{y}^{*\prime\prime}(u_1)$$

von den Fundamentalkomponenten:

$$\text{(61)}\quad g_{11}, g_{12} = 1, g_{13} = 0, g_{22} = 1, g_{23} = 0, g_{33} = 0, \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} g_{11} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

und der Charakteristik (2, 3), die also eine Integralhyperfläche der Hamiltonschen Gleichung

$$\text{(62)}\qquad 1 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0$$

darstellt.

---

[19]) Vgl. M. Pinl, (a). Über Kurven mit isotropen Schmiegräumen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 39 (1932), 157—172, insbesondere 170—171; (b) 44 (1936), 1—12, insbesondere S. 9; J. Lense (5) insbesondere S. 151.

[20]) Vgl. (19) (b).

[21]) Vgl. (19) (a).

Eine genauere Behandlung der differentialgeometrischen Eigenschaften der isotropen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_{n+2} und ihrer Darstellungen soll insbesondere für den Fall $n = 2$ einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Dabei wird es auch darauf ankommen, zu untersuchen, inwiefern die Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten von der Charakteristik $(n-2, n)$ mit den Voraussetzungen über die Gleichungen (23) verträglich bleiben können[22]).

§ 3.

Das Pfaffsche Problem der Charakteristik $(n-1, n)$.

Der Integration der Mongeschen Gleichung $M = 0$ ist die Bestimmung aller n-dimensionalen Integralmannigfaltigkeiten des Pfaffschen Systems:

$$(63)\quad \begin{cases} \omega_1 \equiv q_1 d x_1 + \ldots + q_n d x_n \pm i \sqrt{1 + q_1^2 + \ldots + q_n^2}\, d x_{n+1} - d x_{n+2} = 0 \\ \omega_2 \equiv \lambda_1 \left[d x_1 \pm \frac{i q_1 d x_{n+1}}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}} \right] + \ldots + \lambda_n \left[d x_n \pm \frac{i q_n d x_{n+1}}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}} \right] = 0 \end{cases}$$

in den $3n+1$ Veränderlichen x_k, q_l, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ äquivalent, wofern man sich nur auf Lösungen beschränkt, für welche die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ als unabhängige Variable verwendet werden können. Die Form ω_1 ist offensichtlich von gerader Klasse $c = 2n+2$, die Gleichung $\omega_1 = 0$ entsprechend von ungerader Klasse $\gamma = 2n+1$, d. h. von der kanonischen Gestalt:

$$(64)\qquad d Z - P_1 d X_1 - P_2 d X_2 - \ldots - P_n d X_n = 0,$$

wobei die $2n+1$ kanonischen Variablen $X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, Z$ als unabhängige Funktionen der $x_1, \ldots, x_{n+2}, q_1, \ldots, q_n$ erscheinen[23]):

$$(65)\quad \begin{cases} X_1 = q_1,\ X_2 = q_2, \ldots, X_n = q_n, \\ Z = x_{n+2} - q_1 x_1 - q_2 x_2 - \ldots \mp i \sqrt{1 + q_1^2 + \ldots + q_n^2}\, x_{n+1}, \\ P_1 = - x_1 \mp i x_{n+1} \frac{q_1}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}}, \ldots, \\ P_n = - x_n \mp i x_{n+1} \frac{q_n}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}}. \end{cases}$$

---

[22]) Vgl. (7).

[23]) Vgl. E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Kap. 1—2, Paris Hermann 1922.

Ferner gilt

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} d\,x_k \pm \frac{i\,q_k\,d\,x_{n+1}}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}} &= d\left(x_k \pm \frac{i\,q_k\,x_{n+1}}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}}\right) \mp i\,x_{n+1}\,d\left(\frac{q_k}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}}\right)\\ &= -\,d\,P_k \mp \frac{i\,x_{n+1}\,d\,X_k}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}} \pm \frac{i\,x_{n+1}\,X_k}{1+q_1^2+\ldots+q^2}\cdot\frac{X_1\,d\,X_1+\ldots+X_n\,d\,X_n}{\sqrt{1+q_1^2+\ldots+q_n^2}}\\ &= -\,d\,P_k \mp \frac{i\,x_{n+1}\,d\,X_k}{\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}} \pm \frac{i\,x_{n+1}\,X_k}{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}\cdot\frac{X_1\,d\,X_1+\ldots+X_n\,d\,X_n}{\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}}. \end{aligned}\right.$$

So entsteht aus (63) das kanonische System:

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned} &d\,Z - P_1\,d\,X_1 - P_2\,d\,X_2 - \ldots - P_n\,d\,X_n = 0,\\ &\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left[d\,P_k \pm \frac{i\,x_{n+1}}{\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}}\left(d\,X_k - X_k\cdot\frac{X_1\,d\,X_1+\ldots+X_n\,d\,X_n}{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Ist Z ein Integral der ersten Gleichung in (67), so gilt:

$$(68)\qquad Z = f(X_1, \ldots, X_n),\ P_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, P_n = \frac{\partial f}{\partial X_n}$$

und die zweite Gleichung muß identisch in $d\,X_1, \ldots, d\,X_n$ erfüllt sein, sobald man $P_1, \ldots, P_n$ gemäß (68) ersetzt. Dadurch entsteht:

$$(69)\qquad \sum_{l=1}^{n}\lambda_l\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_k\,\partial X_l} \pm \frac{i\,x_{n+1}}{\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}}\left(\delta_k^l - \frac{X_k\,X_l}{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}\right)\right] = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

als homogenes lineares System in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Für eine nichttriviale Lösung besteht somit:

$$(70)\qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial X_k\,\partial X_l} \pm \frac{i\,x_{n+1}}{\sqrt{1+X_1^2+\ldots+X_1^2}}\left(\delta_k^l - \frac{X_k\,X_l}{1+X_1^2+\ldots+X_n^2}\right)\right| = 0 \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

wodurch auch die nichtkanonische Variable x_{n+1} bestimmt erscheint. Mit (70) und der ersten der Gleichungen (68) sind für die Variablen $x_1, \ldots, x_{n+2}$ zwei Beziehungen gewonnen, die eine willkürliche (analytische) Funktion f enthalten.

(VII). *Das Pfaffsche Problem* (63) *der Charakteristik* $(n-1, n)$ *gestattet eine explizite Integration mit Hilfe einer willkürlichen analytischen Funktion von* n *komplexen Parametern und deren ersten und zweiten Ableitungen.*

Für $n = 1$, $x_1 = t$ erhält man mit Rücksicht auf (65) und (70):

$$(71)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}(t)\,\mathfrak{x} + f(t) \equiv t\,x_1 \pm i\sqrt{1+t^2}\,x_2 - x_3 + f(t) = 0, \\ \mathfrak{a}'(t)\,\mathfrak{x} + f'(t) \equiv x_1 \pm \dfrac{it}{\sqrt{1+t^2}}\,x_2 + f'(t) = 0, \\ \mathfrak{a}''(t)\,\mathfrak{x} + f''(t) \equiv \pm \dfrac{i}{(1+t^2)^{3/2}}\,x_2 + f''(t) = 0, \\ \mathfrak{a} = \{t, \pm i\sqrt{1+t^2}, -1\},\ \mathfrak{a}^2 \equiv \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' \equiv 0,\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')^2 \equiv -(\mathfrak{a}'^2)^3 \not\equiv 0\ \{t\}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(72)\qquad t = \frac{u^2-1}{2u},\quad \pm i\sqrt{1+t^2} = \mp\frac{i(u^2+1)}{2u},$$

so ergibt sich, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten:

$$(73)\quad \begin{cases} (1-u^2)\,x_1 \pm i(1+u^2)\,x_2 + 2u\,x_3 = 2u\,f(u) = \varphi(u), \\ -u\,x_1 \pm iu\,x_2 + x_3 = \varphi'(u), \\ -x_1 \pm i\,x_2 = \varphi''(u), \\ \mathfrak{a} \equiv \{1-u^2,\ \pm i(1+u^2),\ 2u\},\ \mathfrak{a}^2 \equiv \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' \equiv 0 \quad \{u\}, \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')^2 \equiv -(\mathfrak{a}'^2)^3 \equiv -1 \quad \{u\}, \end{cases}$$

woraus durch Auflösung nach x_1, x_2, x_3 die bekannte explizite „integrallose Darstellung" der isotropen Kurven $\mathfrak{x}(u)$ des R_3 von der Charakteristik $(0, 1)$ in rationaler Form hervorgeht[24]).

Für $n = 2$, $X_1 = u_1$, $X_2 = u_2$ ergibt sich:

$$(74)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}(u_1,u_2)\,\mathfrak{x} + f(u_1,u_2) \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 \pm i\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}\,x_3 - x_4 + f(u_1,u_2) = 0, \\ \mathfrak{a}_1(u_1,u_2)\,\mathfrak{x} + f_1(u_1,u_2) \equiv x_1 \pm \dfrac{i\,u_1\,x_3}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} + f_1(u_1,u_2) = 0, \\ \mathfrak{a}_2(u_1,u_2)\,\mathfrak{x} + f_2(u_1,u_2) \equiv x_2 \pm \dfrac{i\,u_2\,x_3}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} + f_2(u_1,u_2) = 0, \\ |\mathfrak{a}_{rs}(u_1,u_2)\,\mathfrak{x} + f_{rs}(u_1,u_2)| \equiv \begin{vmatrix} \overset{(3)}{a}_{11}x_3 + f_{11}, & \overset{(3)}{a}_{12}x_3 + f_{12} \\ \overset{(3)}{a}_{21}x_3 + f_{21}, & \overset{(3)}{a}_{22}x_3 + f_{22} \end{vmatrix} = 0, \\ \mathfrak{a} \equiv \{u_1, u_2, \overset{(3)}{a}, -1\},\ \overset{(3)}{a} \equiv \pm i\sqrt{1+u_1^2+u_2^2},\ \mathfrak{a}^2 \equiv \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_2 \equiv 0, \\ \mathfrak{a}_1 \equiv \{1, 0, \overset{(3)}{a}_1, 0\},\quad \mathfrak{a}_2 \equiv \{0, 1, \overset{(3)}{a}_2, 0\},\quad \mathfrak{a}_{rs} \equiv \{0, 0, \overset{(3)}{a}_{rs}, 0\}. \end{cases} \quad \{u_1, u_2\}$$

[24]) Vgl. (4).

(VIII). *Die integrallose Darstellung der isotropen Flächen des vierdimensionalen Raumes von der Charakteristik* (1, 2), *welche singuläre Integralmannigfaltigkeiten der partiellen Differentialgleichung*

$$1 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0 \qquad \left(q_k = \frac{\partial x_4}{\partial x_k},\ k = 1, 2, 3\right)$$

sind, ist durch das System:

$$x_1 = \frac{\mp i u_1 x_3}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}} - \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad x_2 = \frac{\mp i u_2 x_3}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}} - \frac{\partial f}{\partial u_2},$$

$$x_4 = u_1 x_1 + u_2 x_2 \pm i\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}\, x_3 + f(u_1, u_2)$$

gegeben, worin f eine willkürliche analytische Funktion der beiden komplexen Parameter u_1, u_2 bedeutet und die nichtkanonische Koordinate x_3 der quadratischen Gleichung:

$$\left| \frac{\partial^2 (\pm i\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2})}{\partial u_r\, \partial u_s} x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial u_r\, \partial u_s} \right| = 0 \qquad r, s, = 1, 2$$

genügt. Zu einer bestimmten isotropen R_3-schar (a, f) *gehören im allgemeinen zwei Gratflächen.*

Setzt man [25])

$$(75)\quad u_1 = -\frac{u - v}{1 + u v}, u_2 = -\frac{u + v}{i(1 + u v)}, \quad i\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2} = -\frac{1 - u v}{i(1 + u v)}$$

so entsteht aus (74) eine (implizite) *rationale* integrallose Darstellung der in Rede stehenden Flächen:

$$(76)\quad \begin{cases} \dfrac{u - v}{1 + u v} x_1 + \dfrac{u + v}{i(1 + u v)} x_2 + \dfrac{1 - u v}{i(1 + u v)} x_3 + x_4 + f(u, v) = 0, \\ \dfrac{1 + v^2}{(1 + u v)^2} x_1 - i \dfrac{1 + v^2}{(1 + u v)^2} x_2 + \dfrac{2 i v}{(1 + u v)^2} x_3 + f_1(u, v) = 0, \\ -\dfrac{1 + u^2}{(1 + u v)^2} x_1 - i \dfrac{1 - u^2}{(1 + u v)^2} x_2 + \dfrac{2 i u}{(1 + u v)^2} x_3 + f_2(u, v) = 0. \end{cases}$$

$$\left| \begin{matrix} A_{11} x_1 + B_{11} x_2 + C_{11} x_3 + f_{11}, & A_{12} x_1 + B_{12} x_2 + C_{12} x_3 + f_{12} \\ A_{21} x_1 + B_{21} x_2 + C_{21} x_3 + f_{21}, & A_{22} x_1 + B_{22} x_2 + C_{22} x_3 + f_{22} \end{matrix} \right| = 0,$$

$$A_{11} \equiv -\frac{2v(1 + v^2)}{(1 + u v)^3}, \quad B_{11} \equiv +\frac{2 i v (1 - v^2)}{(1 + u v)^3}, \quad C_{11} \equiv -\frac{4 i v^2}{(1 + u v)^3},$$

$$A_{12} \equiv \frac{2(v - u)}{(1 + u v)^3}, \quad B_{12} \equiv \frac{2 i (u + v)}{(1 + u v)^3}, \quad C_{12} \equiv \frac{2 i (1 - u v)}{(1 + u v)^3},$$

$$A_{21} \equiv A_{12}, \quad B_{21} \equiv B_{12}, \quad C_{21} \equiv C_{12},$$

$$A_{22} \equiv \frac{2u(1 + u^2)}{(1 + u v)^3}, \quad B_{22} \equiv \frac{2 i u (1 - u^2)}{(1 + u v)^3}, \quad C_{22} \equiv -\frac{4 i u^2}{(1 + u v)^3}.$$

[25]) Dieser Ansatz ist einer brieflichen Mitteilung entnommen, die der Verf. (in einem anderen Zusammenhang) seit längerer Zeit Herrn H. Beck verdankt.

Schließlich gilt allgemein:

(IX). *Die integrallose Darstellung der n-dimensionalen isotropen Mannigfaltigkeiten des $(n+2)$-dimensionalen Raumes von der Charakteristik $(n-1, n)$, welche singuläre Integralmannigfaltigkeiten der partiellen Differentialgleichung*

$$1 + q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2 = 0 \left(q_k = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1\right)$$

sind, ist durch das System

$$x_1 = \frac{\mp i u_1 x_{n+1}}{\sqrt{1+u_1^2+\ldots+u_n^2}} - \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, x_n = \frac{\mp i u_n x_{n+1}}{\sqrt{1+u_1^2+\ldots+u_n^2}} - \frac{\partial f}{\partial u_n},$$

$$x_{n+2} = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n \pm i \sqrt{1+u_1^2+\ldots+u_n^2}\, x_{n+1} + f(u_1, \ldots, u_n)$$

gegeben, worin f eine willkürliche analytische Funktion der n komplexen Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bedeutet und die nichtkanonische Koordinate x_{n+1} der algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$\left| \frac{\partial^2 (\pm i \sqrt{1+u_1^2+\ldots+u_n^2})}{\partial u_r \partial u_s} x_{n+1} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \partial u_s} \right| = 0 \qquad r, s = 1, 2, \ldots, n$$

genügt. Zu einer bestimmten isotropen R_{n+1}-schar $(\mathfrak{a}, f)$ gehören im allgemeinen n Gratmannigfaltigkeiten.

Die Irrationalitäten der Darstellung können durch passende Parametertransformationen stets entfernt werden.

Die Theorie singulärer n-dimensionaler Integralmannigfaltigkeiten partieller Involutionssysteme erster Ordnung[26]) (S) in $n+m-1$ unabhängigen und einer abhängigen Veränderlichen:

$$H_1 = 0, \; H_2 = 0, \ldots, H_{m-1} = 0 \qquad (m > 2)$$

führt zu Methoden integralloser Lösung Mongescher Probleme vom Typus

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+m}; \; p_1^1, \ldots, p_m^n) = 0 \left(p_k^i = \frac{\partial x_{n+k}}{\partial x_i}, \; \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{matrix}\right),$$

wobei $m-1$ willkürliche Funktionen von n Veränderlichen auftreten. Diese Theorie verspricht neue Hilfsmittel zur Untersuchung isotroper n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in R_{n+m} zu liefern, sobald man eine der Gleichungen des Systems (S) mit

$$1 + q_1^2 + \ldots + q_{n+m-1}^2 = 0$$ [27])

identifiziert $(n+m = n+2+l, \; l > 0)$.

[26]) Vgl. (1), insbesondere S. 274—280.

[27]) Vgl. E. Goursat, Sur quelques équations de Monge, Annali di Pisa (2) 1 (1932), S. 35—59; ferner (1) insbesondere S. 282.

Oberrahmede (Sauerland) im September 1936.

(Eingegangen am 6. September 1936.)

Anschauliches zur Gibbsschen Erscheinung und zur Annäherung durch arithmetische Mittel.

Von

A. Walther in Darmstadt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. V. Blaeß in Darmstadt
zum 60. Geburtstag am 12. September 1936 gewidmet.

---

1. Die Gibbssche Erscheinung für die Konvergenz in der Nähe einer Sprungstelle ist namentlich bei den Fourierschen Reihen eingehend untersucht worden[1]). Nach Heinrich Weber läßt sie sich besonders klar am Beispiel des Integrals $\int_0^\infty \frac{\sin u\,x}{u}\,du$ überschauen[2]). Die Webersche Arbeit hat wenig Beachtung gefunden, teilweise vielleicht wegen des Mangels an Figuren. Die folgenden Zeilen sollen die Weberschen Ausführungen durch die notwendigen Bilder ergänzen, vor allem aber zeigen, daß Webers Beispiel ausgezeichnet geeignet ist, auch das Fehlen der Gibbsschen Erscheinung bei den Fejérschen Mitteln, ferner verschiedene neuere Ergebnisse von Fejér[3]) über die gestaltlichen Verhältnisse bei höheren arithmetischen Mitteln anschaulich zu erfassen. Zum Schluß werden gewisse Verallgemeinerungen und Abweichungen angedeutet.

---

[1]) Vgl. etwa M. Bôcher, Introduction to the theory of Fourier's series, Annals Math. (2) 7 (1906), S. 81—152, insb. S. 123—132; C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig (G. J. Göschen) 1904, S. 170—182; W. Rogosinski, Fouriersche Reihen, Berlin und Leipzig (W. de Gruyter & Co.) 1930, S. 109—113; F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I, 3. Aufl., Berlin (Julius Springer) 1924, S. 214—215. Die von Michelson und Stratton mit ihrem Schwingungsüberlagerer instrumentell gefundene, von Gibbs theoretisch erklärte Erscheinung kommt übrigens schon bei H. Wilbraham, On a certain periodic function, Cambridge Dublin math. J. 3 (1848), S. 198—201 vor.

[2]) H. Weber, Über die Gibbssche Erscheinung bei bestimmten Integralen, Math. Ann. 73 (1913), S. 286—288.

[3]) L. Fejér, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 80—88; Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen, J. London math. Soc. 8 (1933), S. 53—62; On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation, and of mechanical quadratures, Bull. Amer. math. Soc. 39 (1933), S. 521—534; On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, J. Math. Physics 13 (1934), S. 1—17.

2. Bekanntlich ist[4])

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u\,x}{u}\,du = \begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\\ -\frac{\pi}{2}\end{matrix} \quad \text{für} \quad x \gtreqless 0 \quad \text{(Fig. 1)},$$

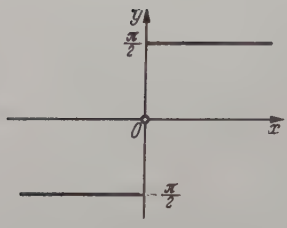


Fig. 1.

Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\\ -\frac{\pi}{2}\end{matrix} \quad \text{für} \quad x \gtreqless 0.$$

wobei die Fouriersche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,x}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{mit} \quad 0 < x < \pi$$

auf kontinuierliche Frequenzen übertragen wird. Wie gelingt es dem Integral, den rechtsstehenden Sprungausdruck darzustellen, insbesondere für alle positiven x den konstanten Wert $\frac{\pi}{2}$ anzunehmen? Dazu denken wir uns $\int_0^\infty$ als Grenzwert des „Abschnittsintegrals" $\int_0^U$ und schreiben

$$(2) \qquad f(x) = \lim_{U\to\infty} \int_0^U \frac{\sin u\,x}{u}\,du = \lim_{U\to\infty} \int_0^{Ux} \frac{\sin u}{u}\,du = \lim_{U\to\infty} \mathrm{Si}\,(Ux),$$

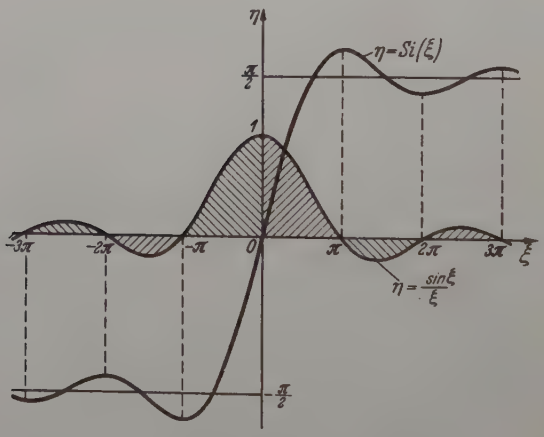


Fig. 2.

Integralsinus $\mathrm{Si}\,(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sin u}{u}\,du.$

wobei

$$\mathrm{Si}\,(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sin u}{u}\,du$$

den Integralsinus bedeutet. Dieser ist der Flächeninhalt der Kurve $\eta = \frac{\sin \xi}{\xi}$ (Fig. 2) von $\xi = 0$ an und hat somit den aus Fig. 2 ersichtlichen Verlauf: nach Nulldurchgang für $\xi = 0$ wird ein Maximum für $\xi = \pi$ erreicht, dann ein Minimum für $\xi = 2\pi$ und so fort, weil die Ableitung $\frac{\sin \xi}{\xi}$ immer wieder ver-

[4]) Vgl. etwa S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig (Akad. Verlagsges.) 1932, S. 13.

schwindet; als Wellenlinie mit abnehmenden Ausschlägen strebt $\mathrm{Si}(\xi)$ für $\xi \to \infty$ dem Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

zu.

Für $U = 1$ ist das Abschnittsintegral $\int_0^U \frac{\sin u x}{u}\, du$ unmittelbar gleich $\mathrm{Si}(x)$ (Fig. 3 oben). Für wachsendes U gehen die Abschnittsintegrale $\mathrm{Si}(U x)$ aus $\mathrm{Si}(x)$ durch Zusammendrängen in x-Richtung nach der Ordinatenachse hin im Verhältnis $1 : U$ *bei unveränderter Höhe und Tiefe der Wellen* hervor (Fig. 3); z. B. wird für $U = 4$, also $\int_0^4 \frac{\sin u x}{u}\, du = \mathrm{Si}(4x)$, jeder Wert schon für $\frac{x}{4}$ gegenüber einem x bei $U = 1$ angenommen. Dadurch kommen die fernen Teile des Integralsinus, die sich von $\frac{\pi}{2}$ fast nicht mehr unterscheiden, in immer größere Nähe der Ordinatenachse. Die Waagerechte $y = \frac{\pi}{2}$ wird durch einen Wellenzug von immer zahl-

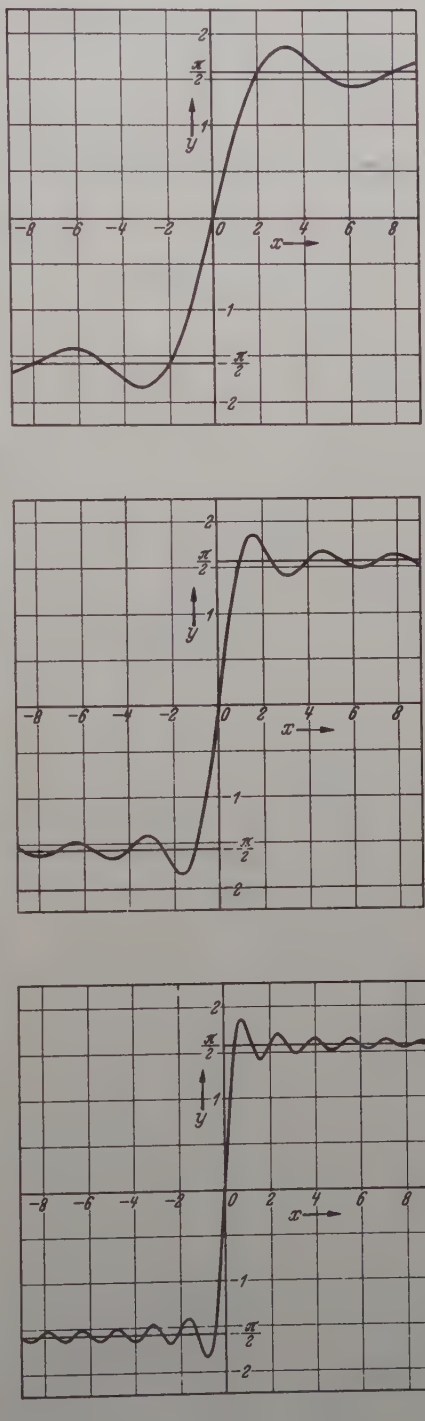


Fig. 3.

Abschnittsintegrale $y = \int_0^U \frac{\sin u x}{u}\, du$

von $\int_0^\infty \frac{\sin u x}{u}\, du$ für $U = 1, 2, 4$.

reicheren und immer niedrigeren Wellen ersetzt — bis auf die unmittelbare Nähe der Ordinatenachse selbst. Dort rücken die ersten über $\frac{\pi}{2}$ überschießenden Wellenberge und unter $\frac{\pi}{2}$ herunterfallenden Wellentäler nur zusammen und werden schmäler, ohne als solche zu verschwinden. Es bilden sich die Gibbsschen „Türmchen" auf und unter der darzustellenden Geraden $y = \frac{\pi}{2}$ heraus. Die erste Welle hat über der Waagerechten $y = \frac{\pi}{2}$ die Höhe $\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}2811$, d. h. etwa $9\,\%$ der Sprunghöhe π, die zweite Welle unter $y = \frac{\pi}{2}$ die Tiefe $\frac{\pi}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{u} du \approx 0{,}1526 \approx 5\,\%$ von π usw. Dieses merkwürdige Konvergenzverhalten der Abschnittsintegrale, insbesondere die Tatsache, daß die Näherungskurven für $U \to \infty$ nicht an die senkrechte Sprungstrecke, sondern an eine beiderseits um je rund $9\,\%$ der Sprunghöhe hinausragende Strecke herangedrückt werden, ist die Gibbssche Erscheinung.

3. Um die Fejérschen arithmetischen Mittel für (1) zu gewinnen, müssen wir — entsprechend wie man bei einer Reihe aufeinanderfolgende Teilsummen addiert und mittelt — hier Abschnittsintegrale integrieren und das Ergebnis durch die Integrationsstrecke teilen, also

$$\frac{1}{U} \int_0^U dv \int_0^v \frac{\sin u x}{u} du$$

bilden; schließlich wird zur Grenze $U \to \infty$ übergegangen. Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach Fig. 4 liefert

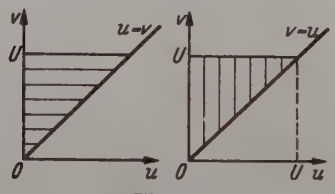


Fig. 4.
Vertauschung der Reihenfolge bei Integration über ein Dreieck:
$\int_0^U dv \int_0^v \varphi(u, v)\, du = \int_0^U du \int_u^U \varphi(u, v)\, dv.$

$$\frac{1}{U} \int_0^U dv \int_0^v \frac{\sin u x}{u} du = \frac{1}{U} \int_0^U du \int_u^U \frac{\sin u x}{u} dv$$

(3)

$$= \frac{1}{U} \int_0^U (U - u) \frac{\sin u x}{u} du = \mathrm{Si}(U x) - \frac{2 \sin^2 \frac{U x}{2}}{U x}.$$

Auch die Fejérschen Mittel hängen hiernach nur vom Produkt $U x$ ab, gehen also aus $\mathrm{Si}(x) - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x}$ für $U = 1$ durch bloßes Zusammen-

schieben in x-Richtung nach der Ordinatenachse hin hervor und sind mit einer Zahlentafel für den Integralsinus[5]) leicht zu zeichnen (Fig. 5). Für $U \to \infty$ entsteht $f(x)$ — wie zu erwarten —, weil (2) gilt und der Grenzwert des Abzugsgliedes verschwindet.

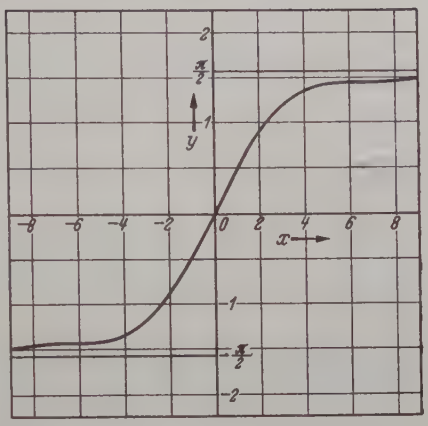
Weiter folgt allgemein durch Teilintegration

$$\mathrm{Si}(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\sin u}{u}\, du$$

$$= \int_0^{\xi} \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{u}\, du = \frac{4 \sin^2 \frac{\xi}{2}}{\xi}$$

$$- \int_0^{\xi} 2 \sin \frac{u}{2} \frac{u \cos \frac{u}{2} - 2 \sin \frac{u}{2}}{u^2}\, du$$

$$= \frac{4 \sin^2 \frac{\xi}{2}}{\xi} - \mathrm{Si}(\xi) + \int_0^{\xi} \frac{4 \sin^2 \frac{u}{2}}{u^2}\, du,$$



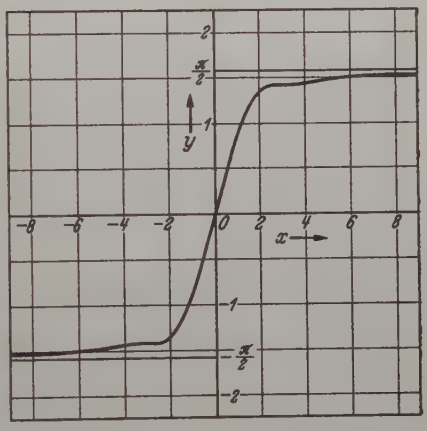
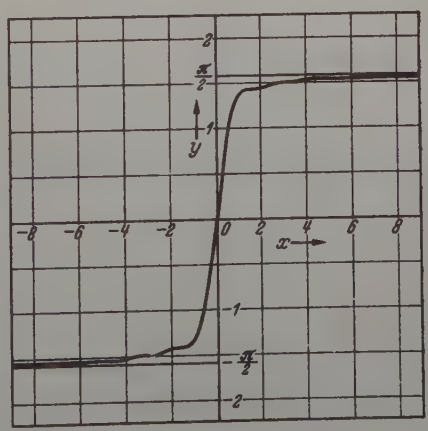


Fig. 5. Fejérsche Mittel

$$y = \frac{1}{U} \int_0^{U} (U - u) \frac{\sin u x}{u}\, du$$

$$= \mathrm{Si}(U x) - \frac{2 \sin^2 \frac{U x}{2}}{U x} = \int_0^{U x} \frac{2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u^2}\, du$$

$$\text{von } \int_0^{\infty} \frac{\sin u x}{u}\, du \text{ für } U = 1, 2, 4.$$



[5]) Z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 2. Aufl., Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1933, S. 83—86.

also

$$\mathrm{Si}(\xi) = \frac{2\sin^2\frac{\xi}{2}}{\xi} + \int_0^{\xi} \frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{u^2}\,du.$$

Damit wird [6])

$$\frac{1}{U}\int_0^U dv \int_0^v \frac{\sin u\,x}{u}\,du = \int_0^{Ux} \frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{u^2}\,du. \tag{4}$$

Hierin ist der Integrand durchweg nichtnegativ. Die Fejérschen Mittel nähern sich also einsinnig, ohne Maxima und Minima der Sprungfunktion $f(x)$, vgl. Fig. 5. Differenziert man — der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit für $U = 1$ — die Ableitung $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ nochmals, so ergibt sich als zweite Ableitung $\left(x\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$. Sie verschwindet immer wieder, für $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ und für $x = 2\pi, 4\pi, \ldots$. Also kommen Wendepunkte vor; die für $x = 2\pi, 4\pi, \ldots$ haben waagerechte Wendetangenten. Die Kurven $y = \mathrm{Si}(x)$ für das Abschnittsintegral und $y = \mathrm{Si}(x) - \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$ für das Fejérsche Mittel treffen sich außer im Nullpunkt noch in den Punkten $x = 2\pi, 4\pi, \ldots$. Weil auch die Steigungsmaße $\frac{\sin x}{x} = 0$ und $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 0$ übereinstimmen, findet in den Treffpunkten Berührung statt. Sie sind die Minima des Abschnittsintegrals und die Wendepunkte des Fejérschen Mittels mit waagerechter Wendetangente. Im Nullpunkte beginnt hingegen das Abschnittsintegral mit dem Steigungsmaß 1, das Fejérsche Mittel mit dem Steigungsmaß $\frac{1}{2}$ (Fig. 6).

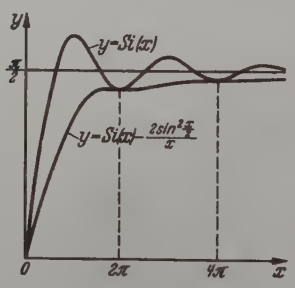


Fig. 6.

Die Kurven des Abschnittsintegrals und des Fejérschen Mittels berühren sich, und zwar in Punkten, die Minima des Abschnittsintegrals und Wendepunkte des Fejérschen Mittels mit waagerechter Wendetangente sind.

[6]) Vgl. auch a. a. O. [4]), S. 15.

4. Höhere arithmetische Mittel kann man nach Hölder oder nach Cesàro bilden. Das 2. Höldersche Mittel z. B. ist das Mittel des 1. arithmetischen Mittels (4), also

$$\lim_{U\to\infty}\frac{1}{U}\int_0^U dv\int_0^v \frac{2\sin^2\frac{ux}{2}}{u^2 x}\,du.$$

Außer $\mathrm{Si}(\xi)$ kommt hier auch der Integralkosinus $\mathrm{Ci}(\xi)$ herein, und die Untersuchung wird etwas mühsam, erst recht bei den höheren Hölderschen Mitteln.

Viel übersichtlicher sind die Cesàroschen Mittel. Man integriert für das 2. Cesàromittel das Abschnittsintegral, dann nochmals das erhaltene Integral, berechnet also

$$\int_0^U dw\int_0^w dv\int_0^v \frac{\sin ux}{u}\,du$$

und dividiert das Ergebnis durch dieselbe Bildung für die Vergleichsfunktion 1:

$$\int_0^U dw\int_0^w dv\cdot 1=\frac{U^2}{2}.$$

Vertauscht man nach Fig. 4 im Zähler die Integrationsreihenfolge und läßt $U\to\infty$ gehen, so ergibt sich als 2. Cesàromittel der Grenzwert des Ausdrucks

$$\frac{1}{U^2}\int_0^U (U-u)^2\frac{\sin ux}{u}\,du,$$

entsprechend als n-tes Cesàromittel[7]) der Grenzwert von

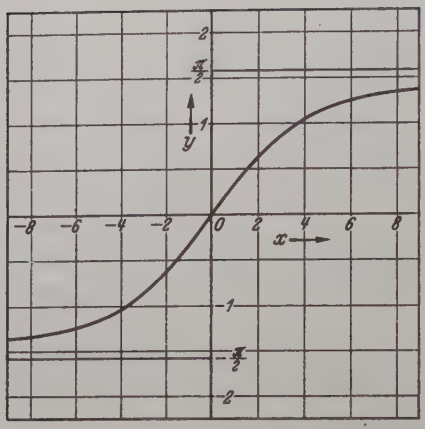
$$\frac{1}{U^n}\int_0^U (U-u)^n\frac{\sin ux}{u}\,du.$$

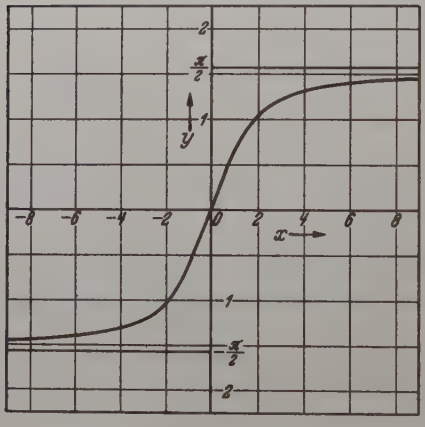
Durch Ausführen des Quadrats erhält man

$$\frac{1}{U^2}\int_0^U (U-u)^2\frac{\sin ux}{u}\,du=\mathrm{Si}(Ux)-\frac{Ux(2-\cos Ux)-\sin Ux}{U^2x^2}=g(Ux).$$

---

[7]) Vgl. auch G. Doetsch, Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen, Math. Z. 11 (1921), S. 161—179, insb. S. 175—179.





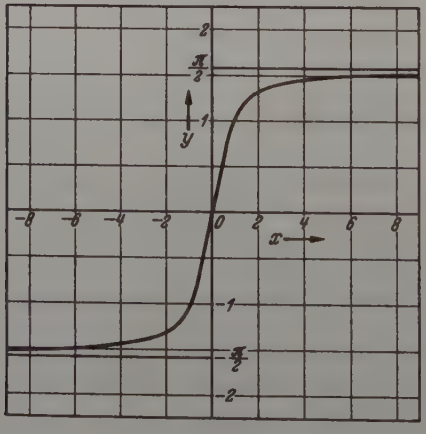


Fig. 7.

Offenkundig ist $\lim_{U \to \infty} g(U x) = f(x)$, so daß auch das 2. Cesàromittel die Sprungfunktion $f(x)$ darstellt.

Wie geht die Annäherung an $f(x)$ bei wachsendem U vor sich? Alle $g(U x)$ entstehen aus

$$g(x) = \mathrm{Si}(x) - \frac{x(2 - \cos x) - \sin x}{x^2}$$

durch Zusammenschieben in x-Richtung. Es genügt also, $g(x)$ zu betrachten. Wegen

$$g'(x) = \frac{2}{x^3}(x - \sin x) > 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

nimmt $g(x)$ ohne Maxima und Minima einsinnig zu. Da

$$g''(x) = \frac{2}{x^4}(3 \sin x - 2x - x \cos x) < 0$$

$$\text{für} \quad x > 0$$

gilt, wie einfach nachzurechnen, erfolgt das Ansteigen von $g(x)$ ohne Wendepunkte, nach oben konvex (Fig. 7).

5. Fejérs zum Vergleich heranzuziehende Sätze[8]) für die Fouriersche

2. Cesàromittel

$$y = \frac{1}{U^2} \int_0^U (U - u)^2 \frac{\sin u x}{u} \, du$$

$$= \mathrm{Si}(U x) - \frac{U x (2 - \cos U x) - \sin U x}{U^2 x^2}$$

von $\int_0^\infty \frac{\sin u x}{u} \, du$ für $U = 1, 2, 4$.

[8]) A. a. O. [3]), insb. J. London math. Soc. 8 (1933), S. 60.

Sinusreihe einer im Intervall $0 < x < \pi$ positiven, nach oben nichtkonkaven, zur Intervallmitte symmetrischen Funktion $f(x)$ sagen aus, daß

die Teilsummen (Abschnitte) positiv,

die arithmetischen Mittel erster Ordnung positiv und höchstens gleich $f(x)$,

die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung positiv, höchstens gleich $f(x)$ und nach oben konvex

sind. Bei den hier erzielten entsprechenden Ergebnissen[9]) für das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin u\,x}{u} du$ ist bemerkenswert, daß Fejérs Satz *mit* Symmetriebedingung in Betracht kommt. *Ohne* Symmetriebedingung, die beim Integral gegenstandslos wird, sind erst die Mittel dritter Ordnung konvex, z. B. bei der zum Integral (1) analogen Fourierschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,x}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{mit} \quad 0 < x < \pi.$$

6. Das untersuchte Integral $\int_0^\infty \frac{\sin u\,x}{u} du$ ist ein Sonderfall des allgemeineren von Euler herrührenden Integrals

$$\int_0^\infty (u\,x)^s \frac{\sin u\,x}{u} du = \lim_{U \to \infty} \int_0^{Ux} \frac{\sin u}{u^{1-s}} du = \begin{matrix} \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2} \\ 0 \end{matrix} \quad \text{für} \quad x \gtrless 0$$

mit $0 \leqq s < 1$, das für $x > 0$ ebenfalls eine waagerechte Gerade darstellt (Höhe zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 1). Z. B. gilt für $s = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}2533$$

oder

$$\int_0^\infty \sin u^2\, du = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \approx 0{,}6267 \text{ (Fresnelsches Integral).}$$

Auch hier kommt die Annäherung dadurch zustande, daß die Kurve des Abschnittsintegrals für $U = 1$, also

$$h(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u^{1-s}} du$$

[9]) Beim 2. Höldermittel läßt sich alles beim 2. Cesàromittel Gefundene auch beweisen.

nach der Ordinatenachse hin zusammengedrängt wird. Die Kurve $y = h(x)$ geht für $x = 0$ vom Nullpunkte aus, hat Maxima für $x = \pi$, $3\pi, \ldots$, Minima für $x = 2\pi$, $4\pi, \ldots$ und schlängelt sich so um die Waagerechte zur Höhe $\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$ herum. Fig. 8 zeigt dies für $s = \frac{1}{2}$, wobei

$$h(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{2\pi}\, S(x)$$

aus Zahlentafeln [10]) des Fresnelschen Integrals $S(x)$ entnommen werden kann. Der erste Wellenberg erhebt sich um

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{u^{1-s}} du - \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$$

über die waagerechte Gerade $y = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}$, z. B. für $s = \frac{1}{2}$ um

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 0{,}5363.$$

Das sind rund 43 % der Waagerechtenhöhe $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1{,}2533$, während für den früher betrachteten Fall $s = 0$ nur 18 % der zugehörigen Waagerechtenhöhe $\frac{\pi}{2}$ vorliegen. Im Grenzfall $U \to \infty$ bildet sich also für $s = \frac{1}{2}$ eine Gibbssche Erscheinung mit 43 % Türmchen statt mit 18 % für $s = 0$ heraus; für s nahe bei 1 kommt man sogar an fast 100 % heran.

Auch die arithmetischen Mittel verhalten sich für $s \neq 0$ abweichend gegenüber dem Fall $s = 0$. Z. B. nähern sie sich der darzustellenden Geraden nicht mehr einsinnig. Doch sollen diese Dinge nicht hier, sondern in anderem Zusammenhange behandelt werden.

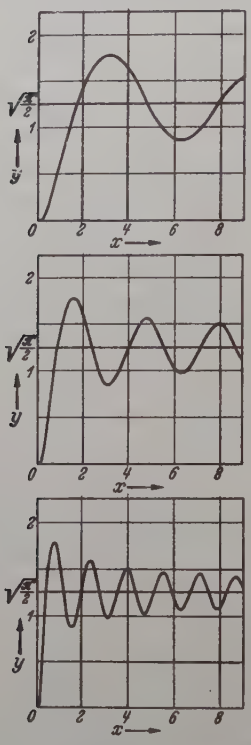


Fig. 8.
Abschnittsintegrale

$$y = \int_0^{Ux} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du$$

von $\int_0^\infty (u\,x)^s \frac{\sin u\, x}{u} du$

für $s = \frac{1}{2}$ und $U = 1, 2, 4$.

[10]) Z. B. a. a. O. [5]), S. 108—109; K. Hayashi, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin (Julius Springer) 1930, S. 104, 119.

(Eingegangen am 9. September 1936.)

Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen.

Von

V. Garten und K. Knopp in Tübingen.

Einleitung.

Aus der C_1-Limitierbarkeit einer Zahlenfolge (s_ν) folgt bekanntlich auch ihre A-Limitierbarkeit, d. h. aus

$$(1) \qquad c_n^{(1)} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \to s, \qquad n \to \infty.$$

folgt

$$(2) \qquad a(x) = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu \to s, \qquad x \to 1-0.$$

Für positive Folgen [1]) gilt sogar das umgekehrte [2]): Aus (2) folgt (1). Dagegen braucht, wenn die Grenzwerte nicht existieren, die Beziehung

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \; c_n^{(1)} = \overline{\lim_{x \to 1}} \; a(x)$$

selbst für positive s_ν nicht zu bestehen [3]). Für solche s_ν gilt aber stets die Ungleichung

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \; c_n^{(1)} \leqq e \cdot \overline{\lim_{x \to 1}} \; a(x).$$

Denn, wenn $s_\nu \geqq 0$ ist, so ist für jedes n und $0 \leqq x < 1$

$$a(x) \geqq (1-x) \cdot x^n \cdot (s_0 + s_1 + \ldots + s_n).$$

Für $x = 1 - \frac{1}{n+1}$ und $n \to \infty$ folgt hieraus sofort die Ungleichung (3). Wie J. Karamata zuerst bemerkt hat, kann in ihr die Zahl e durch keine kleinere ersetzt werden [4]).

---

[1]) Wo kein Mißverständnis möglich ist, soll „positiv" im weiteren Sinne gebraucht werden, also „nicht negativ" bedeuten.

[2]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings of the London Math. Soc. (2) **13** (1914), S. 174—191, insbes. S. 180.

[3]) Beispiele hierfür ergeben sich weiter unten (Satz 8) von selbst.

[4]) J. Karamata, Sur la moyenne arithmétique des coefficients d'une série de Taylor, Mathematica I (1929), S. 99—106. Sowie: Rapport entre les limites d'oscillation des procédés de sommation d'Abel et de Cesàro, Publ. math. Univ. Belgrade **1** (1932), S. 119—124.

In der vorliegenden Arbeit wird diesem Sachverhalt näher nachgegangen. Es werden entsprechende Ungleichungen zwischen den Hauptlimites der verschiedenen C_k- und der A-Mittel (§ 1) und ebenso der E_k- und B-Mittel einer Folge (s_ν) bewiesen (§ 3), die einseitig beschränkt ist oder von der es gewisse dieser Mittel sind. Auch die Hölderschen und die Rieszschen Integralmittel, sowie die Laplace-Transformation werden behandelt (§ 4). Aus den bei den C_k- und A-Mitteln erhaltenen Ungleichungen ergeben sich als leichte Folgerungen einige kürzlich von V. Ramaswami [5]) gewonnene Sätze. Schließlich wird gezeigt (§ 2), daß die verschiedenen in den Ungleichungen auftretenden Konstanten und Parameter die besten sind.

Hierbei ergibt sich noch die überraschende Tatsache, daß die Hauptlimites der höheren Hölderschen Mittel nicht immer, wie es die der Cesàroschen Mittel tun (s. u. (7)), diejenigen der Abelschen Mittel einschließen, und weiter, daß für den Index $k = \infty$ weder der Knopp-Schneesche Äquivalenzsatz noch auch der klassische Höldersche Satz zu gelten braucht, nach dem aus der H_k-Limitierbarkeit einer Folge stets ihre A-Limitierbarkeit folgt.

§ 1.

Die k-ten Cesàroschen Mittel der Folge (s_ν) sollen im folgenden mit $c_n^{(k)}$, nötigenfalls mit $c_n^{(k)}(s_\nu)$, $(k > -1$, beliebig), die A-Mittel mit $a(x)$ bezeichnet werden. Es ist also [6])

$$4 \qquad c_n^{(k)} = c_n^{(k)}(s_\nu) = \frac{1}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} s_\nu, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(5) \qquad a(x) = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu, \qquad (0 \leqq x < 1).$$

Wir setzen

$$(6) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{n \to \infty} c_n^{(k)} = c_k, & \overline{\lim}_{n \to \infty} c_n^{(k)} = C_k, \\ \lim_{k \to \infty} c_k = c_\infty, & \lim_{k \to \infty} C_k = C_\infty, \\ \underline{\lim}_{x \to 1-0} a(x) = a, & \overline{\lim}_{x \to 1} a(x) = A. \end{cases}$$

[5]) V. Ramaswami, Some Tauberian theorems on oscillation. Journ. of the London Math. Soc. 10 (1935), S. 294—308; J. E. Littlewood, Note on the preceding paper, ebenda 10 (1935), S. 309—310.

[6]) Vgl. etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (3. Aufl.), Berlin 1931, S. 483.

Bei allen diesen Werten ist auch $\pm\infty$ zugelassen. Die Grenzwerte C_∞ und c_∞ existieren, da C_k monoton fällt und c_k monoton wächst, wenn k wächst. Überdies gilt ganz allgemein für reelle Zahlenfolgen

$$c_k \leqq c_\infty \leqq a \leqq A \leqq C_\infty \leqq C_k. \tag{7}$$

Wir beweisen nun als typisch zunächst den folgenden

Satz 1. *Ist* $s_\nu \geqq 0$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, *und* $l > k \geqq 1$, *so ist*

$$C_k \leqq \frac{\gamma_l}{\gamma_k} C_l, \tag{8}$$

wenn zur Abkürzung für $k > 1$

$$\gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \quad \textit{und} \quad \gamma_1 = 1 \tag{9}$$

gesetzt wird.

Beweis. Vergleicht man bei zunächst festem n und $p \geqq n$ die explizite Darstellung (4) von $c_n^{(k)}$ und $c_p^{(l)}$, so sieht man, daß

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{p+l}{p}} \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) \binom{p-\nu+l-1}{p-\nu} s_\nu \tag{10}$$

ist, wenn

$$\frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}\binom{p+l}{p}}{\binom{p-\nu+l-1}{p-\nu}\binom{n+k}{n}} = f(\nu) \tag{11}$$

gesetzt wird. Wegen

$$f(\nu+1) = \frac{(n-\nu)(p-\nu+l-1)}{(p-\nu)(n-\nu+k-1)} f(\nu)$$

erhält man für den Wert $\nu = \nu^*$, für den $f(\nu)$ sein Maximum erreicht, $\nu^* = [\nu_*]$ bzw. $= [\nu_*] + 1$, wenn

$$\nu_* = \frac{(l-1)n - (k-1)p}{l-k} \tag{12}$$

gesetzt wird, was

$$n - \nu_* = \frac{k-1}{l-k}(p-n), \qquad p - \nu_* = \frac{l-1}{l-k}(p-n) \tag{13}$$

zur Folge hat. Für beliebiges $r > -1$ ist nun bei $n \to \infty$

$$\binom{n+r}{n} = \frac{n^r}{\Gamma(r+1)}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{14}$$

Für die weiterhin immer wieder auftretenden Fehlerfaktoren der Form $\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ wollen wir hier und im folgenden kurz ω_n schreiben:

$$1 + O\left(\frac{1}{n}\right) = \omega_n. \tag{15}$$

Wir nehmen nun an, daß $\frac{p}{n}$ oberhalb einer festen Zahl > 1 bleibt, daß andererseits ν_* positiv ausfällt und daß $k > 1$ ist. Dann sind die Fehler-

glieder ω_p, $\omega_{n-\nu^*}$, $\omega_{p-\nu^*}$ alle $= \omega_n$, und es ist, wenn k und l festgehalten werden, bei $n \to \infty$

$$f(\nu^*) = \frac{(n-\nu^*)^{k-1}}{\Gamma(k)} \cdot \frac{p^l}{\Gamma(l+1)} \cdot \frac{\Gamma(l)}{(p-\nu^*)^{l-1}} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{n^k} \omega_n.$$

Wegen des Faktors ω_n macht es hier ersichtlich keinen Unterschied, wenn ν^* durch ν_* ersetzt wird. Tut man dies und setzt die Werte (12) ein, so wird nach kurzer Zwischenrechnung

$$f(\nu^*) = \frac{k(k-1)^{k-1}}{l(l-1)^{l-1}} (l-k)^{l-k} \cdot \frac{\left(\frac{p}{n}\right)^l}{\left(\frac{p}{n}-1\right)^{l-k}} \cdot \omega_n. \tag{16}$$

Dies Maximum wird am kleinsten, wenn $p = \frac{l}{k} n \omega_n$ ist, was auch die eben für p und ν_* gestellten Forderungen erfüllt. Es ist dann

$$f(\nu^*) = \frac{\gamma_l}{\gamma_k} \omega_n$$

und folglich für $0 \leqq \nu \leqq n$

$$f(\nu) \leqq \frac{\gamma_l}{\gamma_k} \omega_n.$$

Aus (10) ergibt sich somit, weil $p \geqq n$, $s_\nu \geqq 0$ sein sollte,

$$c_n^{(k)} \leqq \frac{\gamma_l}{\gamma_k} c_p^{(l)} \cdot \omega_n,$$

was für $n \to \infty$ die Behauptung (8) liefert. Für $k = 1$ vereinfacht sich ein Teil der Rechnung und führt zu dem gleichen Ergebnis.

Nur geringe Mehrarbeit macht der Beweis des folgenden etwas weitergehenden Satzes, der für $r = 0$ in den eben bewiesenen übergeht:

Satz 2. *Es sei $r > -1$ und für eine Folge (s_ν) seien die Mittel $c_n^{(r)} \geqq 0$. Für $l > k \geqq 1$ gilt dann*

$$C_{r+k} \leqq \frac{\gamma_l^{(r)}}{\gamma_k^{(r)}} C_{r+l}, \tag{17}$$

wenn zur Abkürzung für $r > -1$, $k > 1$

$$\gamma_k^{(r)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(r+k+1)} \cdot \frac{(r+k)^{r+k}}{(k-1)^{k-1}} \text{ und } \gamma_1^{(r)} = \frac{(r+1)^{r+1}}{\Gamma(r+2)} \tag{18}$$

gesetzt wird.

Beweis. Mit $c_n^{(r)} \geqq 0$ ist auch

$$S_n^{(r)} = \binom{n+r}{n} c_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{n-\nu} s_\nu \geqq 0.$$

Da nun für beliebiges $t > 0$

$$S_n^{(r+t)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+t-1}{n-\nu} S_\nu^{(r)}$$

ist[7]), so ist jetzt entsprechend (10), falls wieder $p \geqq n$ ist,

$$c_n^{(r+k)} = \frac{1}{\binom{p+r+l}{p}} \sum_{\nu=0}^{n} g(\nu) \binom{p-\nu+l-1}{p-\nu} S_\nu^{(r)}, \tag{19}$$

wenn

$$g(\nu) = \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}\binom{p+r+l}{p}}{\binom{p-\nu+l-1}{p-\nu}\binom{n+r+k}{n}} \tag{20}$$

gesetzt wird. Da hier die Binomialkoeffizienten, die ν enthalten, genau dieselben sind wie bei $f(\nu)$, so lehrt die gleiche Rechnung wie beim vorigen Beweise, daß auch jetzt für $0 \leqq \nu \leqq n$

$$g(\nu) \leqq g(\nu^*)$$

ist, wenn ν^* wieder wie bei (12) bestimmt wird. Da nun

$$g(\nu^*) = f(\nu^*) \frac{\binom{n+k}{n}\binom{p+r+l}{p}}{\binom{p+l}{p}\binom{n+r+k}{n}}$$

ist, so ergibt sich

$$g(\nu^*) = \frac{(k-1)^{k-1}}{(l-1)^{l-1}} \cdot \frac{\Gamma(l)\Gamma(r+k+1)}{\Gamma(k)\Gamma(r+l+1)} (l-k)^{l-k} \cdot \frac{\left(\frac{p}{n}\right)^{r+l}}{\left(\frac{p}{n}-1\right)^{l-k}} \omega_n.$$

Dies Maximum wird am kleinsten, wenn $p = \frac{r+l}{r+k} n\,\omega_n$ ist. Dadurch wird

$$g(\nu^*) = \frac{\gamma_l^{(r)}}{\gamma_k^{(r)}} \omega_n,$$

woraus wie bei Satz 1 die jetzige Behauptung (17) folgt.

Die entsprechende Ungleichung für die unteren Limites liefert der

Satz 3. *Sind für eine Folge (s_ν) die Mittel $c_n^{(r)} \geqq 0$, $(r > -1)$, so ist für $l > k \geqq 1$*

$$c_{r+k} \geqq \frac{\bar{\gamma}_l^{(r)}}{\bar{\gamma}_k^{(r)}} c_{r+l}, \tag{21}$$

---

[7]) Es folgt dies unmittelbar aus der für beliebige $k > -1$ geltenden Definitionsgleichung

$$\frac{1}{(1-x)^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu^{(k)} x^\nu.$$

wenn zur Abkürzung für $r > -1$, $k \geqq 1$

$$\bar{\gamma}_k^{(r)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(r+k+1)} \tag{22}$$

gesetzt wird. Für $r = 0$, *also für positive Folgen* (s_ν), *erhält dies Ergebnis, dem Satz* 1 *entsprechend, die besonders einfache Form*

$$c_k \geqq \frac{k}{l} c_l. \tag{22a}$$

Beweis. Es ist jetzt, wenn wieder $p \geqq n$ gedacht wird,

$$c_p^{(r+k)} \geqq \frac{1}{\binom{n+r+l}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{g}(\nu) \cdot \binom{n-\nu+l-1}{n-\nu} S_\nu^{(r)},$$

wobei $\bar{g}(\nu)$ aus $g(\nu)$ in (20) hervorgeht, wenn dort n und p vertauscht werden. Der Wert von ν, für den $\bar{g}(\nu)$ sein Maximum erreicht, ist daher jetzt $\geqq n$; $\bar{g}(\nu)$ wächst also monoton in $0 \leqq \nu \leqq n$, so daß

$$c_p^{(r+k)} \geqq \bar{g}(0) \cdot c_n^{(r+l)}$$

ist. Wählt man insbesondere $p = n$, so erhält $\bar{g}(0)$ seinen günstigsten Wert, nämlich

$$\bar{g}(0) = \frac{\bar{\gamma}_l^{(r)}}{\bar{\gamma}_k^{(r)}} \omega_n.$$

Setzt man dies in die vorangehende Ungleichung ein, so erhält man für $n \to \infty$ die Behauptung (21).

Satz 2 liefert für $l \to \infty$ die Ungleichung

$$C_{r+k} \leqq \frac{e^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}} C_\infty, \qquad (r > -1,\ k \geqq 1) \tag{23}$$

falls die $c_\nu^{(r)} \geqq 0$ sind. Es gilt aber sogar der wegen (7) schärfere

Satz 4. *Für* $r > -1$, $k \geqq 1$ *ist, falls die Mittel* $c_\nu^{(r)} \geqq 0$ *sind,*

$$C_{r+k} \leqq \frac{e^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}} A. \tag{24}$$

Beweis. Wegen

$$c_n^{(r+k)} = \frac{1}{\binom{n+r+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} S_\nu^{(r)}$$

ist jetzt (vgl. Fußnote [7]))

$$c_n^{(r+k)} = (1-x)^{r+1} \sum_{\nu=0}^{n} h(\nu) S_\nu^{(r)} \cdot x^\nu \tag{25}$$

mit

$$h(\nu) = \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+r+k}{n}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{r+1} x^\nu}.$$

Da

$$h(\nu+1) = \frac{n-\nu}{n-\nu+k-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot h(\nu)$$

ist, so erreicht $h(\nu)$ sein Maximum für $\nu = \nu^* = [\nu_*]$ oder $[\nu_*]+1$, wenn

$$\nu_* = n - (k-1)\frac{x}{1-x}$$

ist. Es sei nun zunächst wieder $k > 1$ und $x = x_n$ so in $0 < x < 1$ gewählt, daß $x \to 1$ rückt und $n(1-x)$ unterhalb einer festen Zahl bleibt, aber ν_* positiv wird. Dann ist wieder $\omega_{n-\nu^*} = \omega_n$, und das Maximum selbst ist

$$h(\nu^*) = \frac{(n-\nu^*)^{k-1}}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(r+k+1)}{n^{r+k}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{r+1} \cdot x^{\nu^*}} \cdot \omega_n.$$

Wegen des Faktors ω_n darf man ν^* durch ν_* ersetzen; es wird dann

$$h(\nu^*) = \frac{(k-1)^{k-1}}{\Gamma(k)} \cdot \frac{\Gamma(r+k+1)}{n^{r+k}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{r+k} \cdot x^{n-(k-1)\frac{1}{1-x}}} \cdot \omega_n.$$

Bezeichnet man hier die rechte Seite ohne den Faktor ω_n mit $\psi(n)$, so ist

$$\psi(n+1) = \frac{n^{r+k}}{x\,(n+1)^{r+k}}\,\psi(n).$$

Dies lehrt, daß das Maximum $h(\nu^*)$ am kleinsten wird, wenn

$$x = x_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{r+k} = 1 - \frac{r+k}{n+1}\,\omega_n$$

gewählt wird. Diese Wahl erfüllt auch die zuvor für x_n gestellten Forderungen. Mit ihr wird schließlich

$$h(\nu^*) = \frac{e^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}} \cdot \omega_n.$$

Wegen $h(\nu) \leqq h(\nu^*)$ in $0 \leqq \nu \leqq n$ ist also auf Grund von (25)

$$c_n^{(r+k)} \leqq \frac{e^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}}\,\omega_n \cdot (1-x)^{r+1} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' S_\nu^{(r)} x^\nu = \frac{e^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}}\,\omega_n \cdot a(x).$$

Für $n \to \infty$ liefert dies die Behauptung (24). Ist $k = 1$, so vereinfacht sich ein Teil des Beweises, der im übrigen ebenso verläuft.

Aus diesen Sätzen folgen leicht einige kürzlich von V. Ramaswami gewonnene Ergebnisse[5]):

Satz 5. *Wenn c_∞ einen endlichen Wert hat, wenn also für irgendein $r > -1$ die Folge $c_n^{(r)}$ nach links beschränkt ist, so ist*

(26) $$C_\infty = A.$$

Hat C_∞ einen endlichen Wert, so ist $c_\infty = a$. Sind c_∞ und C_∞ beide endlich, ist also für irgendein $r > -1$ die Folge $c_n^{(r)}$ beiderseits beschränkt, so ist

$$c_\infty = a \quad \text{und} \quad C_\infty = A.$$

Beweis. Mit c_∞ muß für hinreichend großes r auch c_r einen endlichen Wert haben. Für ein solches r ist dann die Folge $c_n^{(r)}$ nach links beschränkt. Es bedeutet wegen des linearen Charakters der C_k- und A-Transformation keine Einschränkung, sie als positiv vorauszusetzen. Die Ungleichung (24) liefert dann für $k \to \infty$, daß $C_\infty \leqq A$ sein muß, was zusammen mit (7) die Behauptung (26) liefert. Die übrigen Behauptungen folgen hieraus ohne weiteres.

§ 2.

Es soll nun gezeigt werden, daß die gewonnenen Ergebnisse nicht verbessert und die den Parametern k und l auferlegten Schranken nicht gemildert werden können.

Wir zeigen zunächst, daß die Forderung $k \geqq 1$ nicht fallen gelassen werden kann:

Satz 6. *Es gibt positive Folgen (s_ν), für die C_1 und folglich alle C_k mit $k \geqq 1$ und $A < +\infty$ sind, für die aber bei jedem positiven $k < 1$ dennoch $C_k = +\infty$ ist.*

Die Folge s_ν, für die

$$s_\nu = \begin{cases} \nu & \text{für } \nu = \mu!, \quad (\mu = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{27}$$

ist, leistet das Verlangte. Da nämlich bei der Darstellung (4) von $c_n^{(k)}$ die Koeffizienten der s_ν sämtlich positiv sind, so ist

$$c_n^{(k)} \geqq \frac{s_n}{\binom{n+k}{n}}.$$

Wegen $\binom{n+k}{n} \sim n^k$ und $s_n = n$ für unendlich viele n ist $C_k = +\infty$ für jedes positive $k < 1$. Man rechnet aber leicht nach, daß für diese Folge

$$C_1 = 1 \tag{28}$$

also endlich ist. Denn liegt n im Intervall $q! \leqq n < (q+1)!$, so ist

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=1}^{q-1} \mu! + \frac{q!}{n+1}.$$

Der erste Summand rechts ist

$$< \frac{1}{q!} \sum_{\mu=1}^{q-1} \mu! \leqq \frac{(q-1)!}{q! - (q-1)!} = \frac{1}{q-1}$$

und strebt also gegen 0 für $n \to \infty$; für den zweiten ist aber der obere Limes $= 1$. — Es gilt sogar der etwas schärfere

Satz 7. *Es gibt positive Folgen* (s_ν), *für die* C_p *mit einem* $p > 0$ *endlich ist, während für ein* k, *das* < 1 *und* $< p$ *ist,* $C_k = +\infty$ *ist.*

Für $p \geqq 1$ zeigte dies schon das vorige Beispiel; für $0 < p < 1$ lehrt es das Beispiel

$$s_\nu = \begin{cases} \nu^p & \text{für } \nu = \mu!, \quad (\mu = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{29}$$

Denn einerseits ist unendlich oft $c_n^{(k)} > \dfrac{n^p}{\binom{n+k}{n}} \to +\infty$ und andererseits ist nach (4)

$$C_p = \Gamma(p+1),$$

wie man durch eine ebenso einfache Rechnung findet wie beim vorigen Beweise.

Wir zeigen nun, daß die in den Sätzen 1 bis 4 rechterhand auftretenden Konstanten die besten sind:

Satz 8. *In den Beziehungen* (8), (17), (21) *und* (24) *der Sätze* 1, 2, 3 *und* 4 *gilt unter den Voraussetzungen des betreffenden Satzes für gewisse Folgen das Gleichheitszeichen.*

Beweis. Da (8) nur ein Sonderfall von (17) ist, genügt es, die Behauptung für die Beziehungen (17), (21) und (24) durch Beispiele zu belegen.

I. Für (17) leistet die Folge (s_ν) das Verlangte, für die (vgl. Fußnote [7])

$$S_\nu^{(r)} = \binom{\nu+r}{\nu} c_\nu^{(r)} = \nu^{r+1} \tag{30}$$

ist für $\nu = \mu!$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$, während sonst $c_\nu^{(r)} = 0$ ist. Für diese Folge ist, wenn n wieder im Intervall J: $Q = q! \leqq n < (q+1)!$ liegt,

$$c_n^{(r+k)} = \frac{S_n^{(r+k)}}{\binom{n+r+k}{n}} = \frac{1}{\binom{n+r+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} S_\nu^{(r)}$$

$$= \frac{1}{\binom{n+r+k}{n}} \sum_{\mu=1}^{q} \binom{n-\mu!+k-1}{n-\mu!} (\mu!)^{r+1}.$$

Nennt man den Teil dieses Ausdruckes, der für $\mu = q$ erhalten wird, B_n, den übrigen A_n, so strebt $A_n \to 0$, denn es ist

$$A_n \leqq \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{n+r+k}{n}} \sum_{\mu=1}^{q-1} (\mu!)^{r+1} \sim \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{\mu=1}^{q-1} (\mu!)^{r+1}$$

und der letzte Ausdruck ist

$$\leqq \frac{1}{(q!)^{r+1}} \sum_{\mu=1}^{q-1} (\mu!)^{r+1} \cong \frac{((q-1)!)^{r+1}}{(q!)^{r+1} - ((q-1)!)^{r+1}} = \frac{1}{q^{r+1}-1} \to 0.$$

Weiter ist

$$B_n = \frac{\binom{n-Q+k-1}{n-Q}}{\binom{n+r+k}{n}} Q^{r+1}.$$

Der Vergleich von B_n mit B_{n+1} lehrt sofort, daß B_n sein Maximum erreicht, für $n = [n_*]$ oder $[n_*]+1$ mit

$$n_* = \frac{r+k}{r+1} Q - 1;$$

und dies Maximum strebt für $n \to \infty$ gegen

$$\frac{(r+1)^{r+1}}{\gamma_k^{(r)}}.$$

Dies ist also der Wert von C_{r+k}. Hiernach ist

$$\gamma_k^{(r)} C_{r+k} = (r+1)^{r+1}$$

und somit von k unabhängig. Also ist auch für $l > k \geqq 1$

$$\gamma_k^{(r)} C_{r+k} = \gamma_l^{(r)} C_{r+l}. \tag{31}$$

II. Für (21) leistet die Folge (s_ν) das Verlangte, für die

$$S_\nu^{(r)} = \binom{\nu+r}{\nu} c_\nu^{(r)} = ((\mu+1)!)^{r+1} \tag{32}$$

ist für $\nu = \mu!$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$, während sonst $c_\nu^{(r)} = 0$ ist. Für diese Folge rechnet man leicht nach, daß

$$c_{r+1} = \Gamma(r+2)$$

ist (und übrigens $C_{r+1} = +\infty$). Denn es ist, wenn n im Intervall $J: Q = q! \leqq n < (q+1)!$ liegt,

$$c_n^{(r+1)} \geqq c_{(q+1)!-1}^{(r+1)}$$

und die rechts stehende Teilfolge strebt für wachsendes q gegen $\Gamma(r+2)$.

Um nun zu zeigen, daß für $l > k \geqq 1$ stets

$$\bar{\gamma}_k^{(r)} c_{r+k} = \gamma_l^{(r)} c_{r+l} \tag{33}$$

ist, genügt es zu beweisen, daß für alle $k \geqq 1$

$$\bar{\gamma}_k^{(r)} c_{r+k} = \bar{\gamma}_1^{(r)} c_{r+1}, \text{ d. h. } = 1 \tag{34}$$

ist. Denn da die rechte Seite von k frei ist, so folgt daraus sofort die volle Behauptung (33). Beim Beweise von (34) wiederum kann man sich auf ganzzahlige k beschränken, da das Produkt $\bar{\gamma}_k^{(r)} c_{r+k}$ nach (21) mit wachsendem k monoton fällt. Es ist also dann und nur dann konstant, wenn es für alle ganzzahligen k denselben Wert hat.

Wegen dieses monotonen Fallens des Produktes genügt es endlich, statt der Gleichung (34) die Ungleichung

$$\bar{\gamma}_k^{(r)}\, c_{r+k} \geqq 1 \quad \text{oder} \quad c_{r+k} \geqq \frac{\Gamma(r+k+1)}{\Gamma(k)} \tag{35}$$

für alle ganzzahligen k zu beweisen. Nun ist die Summe

$$S_n^{(r+k)} = \sum_{\mu=1}^{q} \binom{n-\mu!+k-1}{n-\mu!} ((\mu+1)!)^{r+1}$$

mindestens gleich der Summe ihrer beiden letzten Glieder, also erst recht

$$S_n^{(r+k)} \geqq \binom{n-Q+k-1}{n-Q} (qQ)^{r+1} + \binom{n-\frac{Q}{q}+k-1}{n-\frac{Q}{q}} Q^{r+1}.$$

Für $c_n^{(r+k)}$ erhält man daher, da für ganzzahliges k und m

$$\binom{n-m+k-1}{n-m} = \binom{n-m+k-1}{k-1} \geqq \frac{(n-m)^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

ist, mit Berücksichtigung von (14)

$$c_n^{(r+k)} \geqq \frac{\Gamma(r+k+1)}{\Gamma(k)} \left\{ \left(\frac{qQ}{n}\right)^{r+1} \left(1-\frac{Q}{n}\right)^{k-1} + \left(\frac{Q}{n}\right)^{r+1} \left(1-\frac{Q}{qn}\right)^{k-1} \right\} \cdot \omega_n. \tag{36}$$

Wir werden nun zeigen, daß die Funktion

$$f(x) = (qx)^{r+1} (1-x)^{k-1} + x^{r+1} \left(1-\frac{x}{q}\right)^{k-1}$$

in dem Intervall $\bar{J}$: $\frac{1}{q+1} < x \leqq 1$, das für $x = \frac{Q}{n}$ dem Intervall J entspricht, eine Ungleichung der Form

$$f(x) \geqq \vartheta_q \quad \text{mit} \quad \vartheta_q \to 1 \quad \text{für} \quad q \to \infty \tag{37}$$

erfüllt, woraus sich dann sofort die Behauptung (35) ergibt.

Um (37) zu beweisen, setzen wir

$$\varphi(x) = (qx)^{r+1} (1-x)^{k-1}, \quad \text{so daß also} \quad f(x) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{q}\right)$$

wird. In $0 \leqq x \leqq 1$ ist stets $\varphi(x) \geqq 0$ und $\varphi(x)$ hat dort genau ein Maximum an der Stelle

$$x^* = \frac{r+1}{r+k},$$

die für hinreichend großes q sicher in $\bar{J}$ liegt. Die Funktion $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ andererseits wächst in $0 \leqq x \leqq 1$ monoton, da ihr Maximum bei $qx^* > 1$ liegt. Da hiernach in $0 \leqq x \leqq x^*$ stets $\varphi(x) > \varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ ist $(q > 1)$ und da $\varphi(x)$ in $x^* \leqq x \leqq 1$ monoton fällt, $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ dagegen monoton

steigt, so haben beide Kurven genau einen Schnittpunkt. Für dessen Abszisse ξ ist $x^* < \xi < 1$ und $\varphi(\xi) = \varphi\left(\frac{\xi}{q}\right)$.

In dem Teil $\frac{1}{q+1} < x \leqq \xi$ von $\bar{J}$ ist nun sicher

$$\varphi(x) \geqq \operatorname{Min}\left(\varphi\left(\frac{1}{q+1}\right),\ \varphi(\xi)\right);$$

in dem übrigen Teil $\xi < x \leqq 1$ von $\bar{J}$ aber

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) \geqq \varphi\left(\frac{\xi}{q}\right) = \varphi(\xi).$$

Im ganzen Intervall $\bar{J}$ ist daher

$$f(x) \geqq \operatorname{Min}\left(\varphi\left(\frac{1}{q+1}\right),\ \varphi(\xi)\right). \tag{38}$$

Für die Schnittpunktsabszisse ξ aber findet man durch ganz direkte Rechnung

$$\xi = \xi_q = \frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{q}} \quad \text{mit} \quad \alpha = q^{-\frac{r+1}{k-1}}$$

und weiter

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi_q) \to 1.$$

Da ersichtlich auch $\varphi\left(\frac{1}{q+1}\right) \to 1$ strebt, so ist damit wegen (38) auch (37) und also (35) bewiesen.

III. Für die in I. benutzte Folge ergibt sich aus (31) zunächst für $l \to \infty$

$$\gamma_k^{(r)} C_{r+k} = e^{r+1} C_\infty.$$

Da für diese Folge nach Satz 5 aber $C_\infty = A$ ist, so gilt auch für alle $k \geqq 1$ die Beziehung

$$\gamma_k^{(r)} C_{r+k} = e^{r+1} A. \tag{39}$$

Damit ist Satz 8 in allen Teilen bewiesen.

Für später merken wir noch an, daß im Falle $r = 0$, in dem die jetzige Folge (30) mit der Folge (27) identisch wird,

$$\gamma_k C_k = eA = 1, \quad \text{also} \quad C_k = \frac{1}{\gamma_k}, \quad A = C_\infty = \frac{1}{e} \tag{40}$$

ist.

§ 3.

Für die Eulerschen Mittel k-ter Ordnung einer Folge (s_ν),

$$e_n^{(k)} = e_n^{(k)}(s_\nu) = \frac{1}{(2^k)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (2^k - 1)^{n-\nu} s_\nu, \tag{41}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ k \text{ beliebig}),$$

und die Borelschen Mittel

$$b(x) = b(x;\, s_\nu) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}, \qquad (x > 0), \tag{42}$$

setzen wir

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} e_n^{(k)} = e_k, & \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} e_n^{(k)} = E_k, \\ \lim\limits_{k\to\infty} e_k = e_\infty, & \lim\limits_{k\to\infty} E_k = E_\infty, \\ \underline{\lim}\limits_{x\to\infty} b(x) = b, & \overline{\lim}\limits_{x\to\infty} b(x) = B. \end{array}\right. \tag{43}$$

Die letzten Grenzwerte sind sicher vorhanden, und es ist allgemein

$$e_k \leqq e_\infty \leqq b \leqq B \leqq E_\infty \leqq E_k. \tag{44}$$

Für diese Mittelwerte gelten die folgenden Sätze, die wir ebenso numerieren wie die entsprechenden Sätze in § 1 und § 2:

Satz 1a. *Sind alle* $s_\nu \geqq 0$ *und ist* $l > k > 0$, *so ist*

$$E_k \leqq \frac{\delta_l}{\delta_k} E_l, \tag{45}$$

wenn zur Abkürzung

$$\delta_k = \sqrt{1 - \frac{1}{2^k}} \tag{46}$$

gesetzt wird.

Satz 2a. *Sind für ein beliebiges reelles* r *die Mittel* $e_n^{(r)} \geqq 0$, *so ist für* $l > k > 0$ *auch*

$$E_{r+k} \leqq \frac{\delta_l}{\delta_k} E_{r+l}. \tag{47}$$

Für die unteren Limites ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2a nur die triviale Abschätzung $e_{r+k} \geqq e_r$. Dagegen gilt dem Satz 4 entsprechend der

Satz 4a. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 2a ist für* $k > 0$

$$E_{r+k} \leqq \frac{1}{\delta_k} B. \tag{48}$$

Satz 5a. *Wenn* e_∞ *endlich ist, so ist* $E_\infty = B$; *wenn* E_∞ *endlich ist, so ist* $e_\infty = b$.

Satz 8a. *In den Beziehungen* (45), (47) *und* (48) *der Sätze 1a, 2a und 4a gilt unter den Voraussetzungen des betreffenden Satzes für gewisse Folgen das Gleichheitszeichen.*

Auf die Beweise soll nur eingegangen werden, soweit sie etwas neues bieten:

Beweis von 1a. Wir vergleichen wieder die explizite Darstellung von $e_n^{(k)}$ und $e_p^{(l)}$ für $p > n$ und schreiben

$$(49) \quad e_n^{(k)} = \frac{1}{(\alpha+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha^{n-\nu} s_\nu = \frac{1}{(\beta+1)^p} \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu) \binom{p}{\nu} \beta^{p-\nu} s_\nu.$$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$2^k - 1 = \alpha, \qquad 2^l - 1 = \beta, \qquad (\text{also } 0 < \alpha < \beta),$$

und

$$f(\nu) = \frac{(\beta+1)^p}{(\alpha+1)^n} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{\beta^{p-\nu}} \cdot \frac{n!\,(p-\nu)!}{p!\,(n-\nu)!}$$

gesetzt. Wegen

$$f(\nu+1) = f(\nu) \frac{\beta(n-\nu)}{\alpha(p-\nu)}$$

erreicht $f(\nu)$ sein Maximum für $\nu = \nu^* = \nu_* + \vartheta$ mit

$$\nu_* = \frac{\beta n - \alpha p}{\beta - \alpha} \qquad \text{und} \qquad -1 \leqq \vartheta \leqq +1$$

was noch

$$n - \nu_* = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}(p-n), \qquad p - \nu_* = \frac{\beta}{\beta-\alpha}(p-n)$$

zur Folge hat. Aus ganz ähnlichen Erwägungen wie in den früheren Fällen ist es zweckmäßig, $p = \frac{\beta+1}{\alpha+1} n\,\omega_n$ zu setzen. Dann fällt ν_* in das Intervall $0 < \nu < n$, und es ist dort, wie man nach leichten Zwischenrechnungen unter Verwendung der Stirlingschen Formel findet,

$$f(\nu) \leqq f(\nu_*) \cdot \omega_n$$

und

$$f(\nu_*) = \sqrt{\frac{\beta(\alpha+1)}{\alpha(\beta+1)}} = \frac{\delta_l}{\delta_k} \cdot \omega_n.$$

Nach (49) ist also

$$e_n^{(k)} \leqq \frac{\delta_l}{\delta_k}\,\omega_n \cdot \frac{1}{(2^l)^p} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{p}{\nu} (2^l-1)^{p-\nu} s_\nu \leqq \frac{\delta_l}{\delta_k} e_p^{(l)} \cdot \omega_n.$$

Für $n \to \infty$ folgt hieraus die Behauptung (45).

Der Beweis von Satz 2a ergibt sich hieraus ohne weiteres auf Grund der beim Eulerschen Verfahren besonders einfachen allgemeingültigen Relation

$$(50) \qquad e_n^{(r+k)}(s_\nu) = e_n^{(k)}(e_\nu^{(r)}).$$

Da entsprechend die Relation

$$(51) \qquad b(x; s_\nu) = b(2^r x; e_\nu^{(r)})$$

ganz allgemein gilt, so genügt es, den Satz 4a für den Fall $r = 0$ zu beweisen:

Jetzt ist

$$e_n^{(k)} = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu!} g(\nu) \tag{52}$$

mit

$$g(\nu) = \frac{n!\, e^x}{(\alpha+1)^n} \cdot \frac{\alpha^{n-\nu}}{(n-\nu)!\, x^\nu}.$$

Methodisch gleiche Betrachtungen wie in den früheren Fällen führen nun dazu,

$$x = \frac{n}{\alpha+1}$$

zu nehmen. Dann ist in $0 \leqq \nu \leqq n$

$$g(\nu) \leqq \frac{1}{\delta_k} \omega_n$$

und folglich

$$e_n^{(k)} \leqq \frac{1}{\delta_k} \cdot \omega_n \cdot b(x).$$

Für $n \to \infty$ folgt hieraus die Behauptung (48).

Satz 5a folgt nun aus Satz 4a genau wie Satz 5 aus Satz 4.

Daß endlich die in den Behauptungen der Sätze 1a, 2a und 4a rechterhand auftretenden Konstanten die besten sind, ergibt sich aus dem folgenden, auch an sich interessanten

Satz 9. *Für positive Folgen* (s_ν), *für die* $\Sigma s_\nu x^\nu$ *mindestens für* $|x| < 1$ *konvergiert, ist stets*

$$B\left(\frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\right) \leqq \frac{e}{\sqrt{2\pi}} A(s_\nu)\ ^{8}). \tag{53}$$

Wir nehmen diesen Satz für den Augenblick als bewiesen an und setzen $\sigma_\nu = \frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}$, wenn (s_ν) die Folge (27) bedeutet, setzen also

$$\sigma_\nu = \begin{cases} \frac{\nu}{\sqrt{\nu+1}} \text{ für } \nu = \mu!, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{54}$$

Für die Folge (27) ist $A(s_\nu) = \frac{1}{e}$, wie schon unter (40) vermerkt wurde. Also ist für die jetzige Folge (σ_ν) nach (53)

$$B(\sigma_\nu) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

---

[8]) $A(s_\nu)$ soll hier natürlich den Hauptlimes A für die Folge (s_ν) und $B\left(\frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\right)$ den Hauptlimes B für die Folge $\left(\frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\right)$ bedeuten. Entsprechend sind weiter unten die Bezeichnungen zu verstehen.

Andererseits ist, wie wir gleich hernach verifizieren werden,

$$E_k(\sigma_\nu) \geqq \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_k}}. \tag{55}$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber

$$B(\sigma_\nu) \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqq \delta_k E_k(\sigma_\nu).$$

Nach Satz 4a ist also

$$\delta_k E_k(\sigma_\nu) = B(\sigma_\nu)$$

und, da die rechte Seite von k frei ist, auch

$$\delta_k E_k(\sigma_\nu) = \delta_l E_l(\sigma_\nu).$$

Wählt man dagegen die Folge (σ'_ν), für die $e_n^{(r)}(\sigma'_\nu) = \sigma_n$ ist, so ist nach (50) und (51)

$$\delta_k E_{r+k}(\sigma'_\nu) = \delta_k E_k(\sigma_\nu) = B(\sigma_\nu) = B(\sigma'_\nu)$$

und folglich auch

$$\delta_k E_{r+k}(\sigma'_\nu) = \delta_l E_{r+l}(\sigma'_\nu).$$

Damit ist Satz 8a bewiesen bis auf den Nachweis der Ungleichung (55) und den Beweis des Satzes 9.

Da nach (45) $\delta_k E_k$ mit k monoton wächst, genügt es, die Ungleichung (55) für beliebig kleine positive k zu beweisen. Wir tun es für diejenigen $k > 0$, für die 2^k rational ist, und wählen überdies $\nu = \mu!$ so, daß $n = 2^k \nu$ eine ganze Zahl ist. Das ist für unendlich viele μ der Fall. Für diese ist

$$e_n^{(k)} \geqq \frac{1}{(2^k)^n}\binom{n}{\nu}(2^k-1)^{n-\nu}\sigma_\nu = \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}\left(\frac{1}{2^k}\right)^\nu\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-\nu}\frac{\nu}{\sqrt{\nu+1}}.$$

Die Benutzung der Stirlingschen Formel lehrt aber nach einfacher Rechnung, daß der letzte Ausdruck

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\delta_k}}\,\omega_n$$

ist. Für $\mu \to \infty$ folgt hieraus die Ungleichung (55). — Endlich der Beweis des Satzes 9. Für $x > 0$ und $0 < z < 1$ ist

$$b\left(x; \frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\right) = e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\cdot\frac{x^\nu}{\nu!} \tag{56}$$

$$= (1-z)\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\,s_\nu z^\nu = a\left(z; f(\nu)\,s_\nu\right)$$

mit

$$f(\nu) = \frac{e^{-x}}{1-z}\cdot\frac{x^\nu}{\nu!\sqrt{\nu+1}\,z^\nu}.$$

Wegen

$$f(\nu+1) = f(\nu)\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu+1}\sqrt{\nu+2}}$$

gilt $f(\nu+1) \geqq f(\nu)$ sicher für $\frac{x}{z} \geqq \nu+2$ und $f(\nu+1) \leqq f(\nu)$ sicher für $\frac{x}{z} \leqq \nu+1$. Die Stelle $\nu = \nu^*$ des Maximums von $f(\nu)$ ist also von der Gestalt $\nu^* = \nu_* - \vartheta$ mit $\nu_* = \frac{x}{z}$ und $0 \leqq \vartheta < 3$. Für $x > 3$ ist ν^* positiv und weiter

$$f(\nu^*) = \frac{e^{-x}}{1-z}\cdot\frac{x^{\nu_*-\vartheta}}{\Gamma(\nu_*-\vartheta+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu_*-\vartheta+1}\cdot z^{\nu_*-\vartheta}} = f(\nu_*)\cdot\omega_x.$$

Es ist also für alle $\nu \geqq 0$

$$f(\nu) \leqq f(\nu_*)\cdot\omega_x.$$

Für $f(\nu_*)$ liefert die Stirlingsche Formel:

$$f(\nu_*) = \frac{z}{x}\cdot\frac{e^{-x+\frac{x}{z}}}{(1-z)\sqrt{2\pi}}\cdot\omega_x.$$

Der vor dem Fehlerfaktor stehende Ausdruck — er werde $h(z)$ genannt — erreicht nun bei festem x sein Minimum für $z = z^* = 1 - \frac{1}{x+1}$ und es ist

$$h(z^*) = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}.$$

Für alle $\nu \geqq 0$ ist also, falls $z = 1 - \frac{1}{x+1}$,

$$f(\nu) \leqq \frac{e}{\sqrt{2\pi}}\cdot\omega_x$$

und also nach (56)

$$b\left(x; \frac{s_\nu}{\sqrt{\nu+1}}\right) \leqq \frac{e}{\sqrt{2\pi}}\cdot\omega_x\cdot a\left(1-\frac{1}{x+1}; s_\nu\right).$$

Für $x \to \infty$ folgt hieraus die Behauptung (53).

Die kurz vorher behandelte Folge (s_ν) zeigt überdies, daß auch in diesem Satz 9 die Konstante $\frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ nicht verbessert werden kann.

§ 4.

Die Methoden sollen schließlich noch auf die einfachsten Integralmittelbildungen, die Rieszschen und Hölderschen Integralmittel, sowie die Laplace-Transformation, angewendet werden. Bei den Beweisen, die im ganzen etwas einfacher sind als die bisherigen, können wir uns kurz fassen.

I. Wir betrachten zunächst die Rieszschen Mittel k-ter Ordnung ($k > 0$) einer über jedes Intervall $\langle 0, x\rangle$, ($x > 0$), integrierbaren Funktion $s(t)$:

$$r^{(k)}(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x (x-t)^{k-1} s(t)\, dt. \tag{57}$$

Das auf ihnen beruhende Limitierungsverfahren ist dem C_k-Verfahren äquivalent, wenn $s(t)$ die einer Folge (s_ν) entsprechende Treppenfunktion bedeutet[8]). Wir setzen

$$\varliminf_{x \to \infty} r^{(k)}(x) = r_k, \qquad \lim_{x \to \infty} r^{(k)}(x) = R_k. \tag{58}$$

Die r_k wachsen, die R_k fallen bei $k \to \infty$; die Grenzwerte seien r_∞ und R_∞. Dann gilt dem Satz 1 entsprechend der

Satz 1b. *Ist $s(t) \geqq 0$ für $t \geqq 0$ und $l > k \geqq 1$, so ist mit der bei Satz 1 angegebenen Bedeutung von γ_k*

$$R_k \leqq \frac{\gamma_l}{\gamma_k} R_l. \tag{59}$$

Beweis. Für $y \geqq x$ ist

$$r^{(k)}(x) = \frac{l}{y^l} \int_0^x f(t)\,(y-t)^{l-1} s(t)\, dt,$$

wenn

$$f(t) = \frac{k}{l} \cdot \frac{y^l}{x^k} \cdot \frac{(x-t)^{k-1}}{(y-t)^{l-1}}$$

gesetzt wird. Man findet nun mühelos, daß $f(t)$ für

$$t = t^* = \frac{(l-1)\,x - (k-1)\,y}{l-k}$$

sein Maximum

$$f(t^*) = \frac{k}{l} \cdot \frac{y^l}{x^k} \cdot \frac{(k-1)^{k-1}}{(l-1)^{l-1}} \cdot \left(\frac{l-k}{y-x}\right)^{l-k}$$

erreicht und daß dieses Maximum am kleinsten wird, wenn $y = \frac{l}{k}\, x$ gesetzt wird. Es hat dann den Wert $\frac{\gamma_l}{\gamma_k}$. Für positive $s(t)$ ist also

$$r^{(k)}(x) \leqq \frac{\gamma_l}{\gamma_k} r^{(l)}(y),$$

woraus für $x \to \infty$ die Behauptung (59) folgt.

Satz 3b. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie eben ist*

$$r_k \geqq \frac{k}{l} r_l. \tag{60}$$

---

[8]) M. Riesz, Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmetiques, Comptes rendus 152 (1911), S. 1651—1654.

Der Beweis ist noch einfacher als der eben gegebene und mag übergangen werden.

Aus (59) folgt für $l \to \infty$, daß für $k \geqq 1$

$$R_k \leqq \frac{e}{\gamma_k} R_\infty. \tag{61}$$

Führen wir aber die den Abelschen Mitteln (5) entsprechende Laplace-Transformation

$$L(x) = x \int_0^\infty e^{-tx} s(t)\, dt, \qquad (x > 0), \tag{62}$$

ein und setzen

$$\lim_{x \to +0} L(x) = L, \tag{63}$$

so gilt sogar der (wegen $R_k \geqq L$ und also $R_\infty \geqq L$) schärfere

Satz 4b. *Für positives $s(t)$ und $k \geqq 1$ ist*

$$R_k \leqq \frac{e}{\gamma_k} L. \tag{64}$$

Beweis. Jetzt ist

$$r^{(k)}(x) = y \int_0^x g(t)\, e^{-ty} s(t)\, dt$$

mit

$$g(t) = \frac{k}{y\, x^k} (x - t)^{k-1}\, e^{ty}.$$

Diese Funktion erreicht ihr Maximum für $t = t^* = x - \frac{k-1}{y}$, und dies Maximum wird am kleinsten für $xy = k$. Es hat dann den Wert $\frac{e}{\gamma_k}$

Also ist mit $xy = k$

$$r^{(k)}(x) \leqq \frac{e}{\gamma_k} \cdot y \int_0^x e^{-ty} s(t)\, dt \leqq \frac{e}{\gamma_k} L(y).$$

Für $x \to +\infty$ geht $y \to +0$, und man erhält die Behauptung (64).

II. Für die Hölderschen Integralmittel k-ter Ordnung

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt, \qquad (k > 0), \tag{65}$$

setzen wir

$$\underline{\lim_{x \to \infty}}\, h^{(k)}(x) = h_k, \qquad \lim_{x \to \infty} h^{(k)}(x) = H_k \tag{66}$$

und bezeichnen deren Grenzwerte für $k \to \infty$ mit h_∞ bzw. H_∞. Für sie gilt der

Satz 1c. *Ist* $s(t) \geqq 0$ *und* $l > k \geqq 1$, *so ist*

$$H_k \leqq \frac{\eta_l}{\eta_k} H_l \tag{67}$$

mit $\eta_1 = 1$ *und*

$$\eta_k = \frac{\Gamma(k)}{(k-1)^{k-1}} e^{k-1}, \qquad (k > 1). \tag{68}$$

Beweis. Für $y \geqq x$ ist

$$h^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(l)} \cdot \frac{1}{y} \int_0^x \varphi(t) \left(\log \frac{y}{t}\right)^{l-1} s(t)\, dt \tag{69}$$

mit

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(k)} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{\left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1}}{\left(\log \frac{y}{t}\right)^{l-1}}.$$

Diese Funktion $\varphi(t)$ erreicht ihr Maximum für $t = t^* = \left(\frac{x^{l-1}}{y^{k-1}}\right)^{\frac{1}{l-k}}$ und dies Maximum

$$\varphi(t^*) = \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(k)} \cdot \frac{(k-1)^{k-1}}{(l-1)^{l-1}} (l-k)^{l-k} \cdot \frac{y}{x} \left(\log \frac{y}{x}\right)^{k-l}$$

wird für $\frac{y}{x} = e^{l-k}$ am kleinsten und zwar $= \frac{\eta_l}{\eta_k}$. Aus (69) ergibt sich nun für $x \to \infty$ sofort die Behauptung (67). — Für die unteren Limites ergibt sich hier nur die triviale Abschätzung $h_k \geqq 0$.

III. Trotz des Äquivalenzsatzes zwischen dem (gewöhnlichen) H_k- und C_k-Verfahren liegt bekanntlich der Kern der Folge $h_n^{(k)}$ in dem der Folge $c_n^{(k)}$ und kann von diesem ein echter Teil sein[9]). Auch bei den Integralmitteln ist stets $H_k \leqq R_k$. Es gilt aber der folgende

Satz 1d. *Für positive* $s(t)$ *und* $k \geqq 1$ *ist stets*

$$R_k \leqq \frac{\eta_k}{\gamma_k} H_k \tag{70}$$

und allgemein für $l > k \geqq 1$

$$R_k \leqq \frac{\eta_l}{\gamma_k} H_l. \tag{71}$$

Beweis. Ähnlich wie bisher hat man

$$r^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \frac{1}{y} \int_0^x \psi(t) \left(\log \frac{y}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt \tag{72}$$

---

[9]) Vgl. I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen 74 (1913), S. 447—458, und K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. 31 (1929), S. 97—127, insbes. S. 123. — Der Kern einer reellen Zahlenfolge ist einfach die Strecke zwischen ihren Hauptlimites.

mit

$$\psi(t) = \Gamma(k+1) \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}}{\left(\log \frac{y}{t}\right)^{k-1}}.$$

Diese Funktion $\psi(t)$ wird am größten für die zwischen 0 und x gelegene Lösung $t = t^*$ der Gleichung $t e^{\frac{x}{t}} = e y$. Das Maximum selbst ist, wenn zur Abkürzung

$$\frac{t^*}{x} = \alpha = \alpha(x, y)$$

gesetzt wird,

$$\psi(t^*) = \Gamma(k+1) \cdot \alpha^k e^{\frac{1}{\alpha} - 1}.$$

Es wird also für $\alpha = \frac{1}{k}$, d. h. für $\frac{t^*}{x} = \frac{1}{k}$, $\frac{y}{t^*} = e^{k-1}$, $\frac{y}{x} = \frac{1}{k} e^{k-1}$ am kleinsten und hat dann den Wert $\frac{\eta_k}{\gamma_k}$. Aus (72) ergibt sich so für $x \to \infty$ die Behauptung (70), aus der dann die Verallgemeinerung (71) ohne weiteres nach (67) folgt.

Auch die in den Sätzen dieses Paragraphen auftretenden Konstanten sind die besten, wie jedesmal durch die Funktion

$$(73) \qquad s(t) = \begin{cases} \mu! \text{ in } \mu! \leqq t < \mu! + 1, & (\mu = 1, 2, \ldots), \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

belegt werden kann. Der Beweis dieser Behauptung bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, wir wollen ihn daher übergehen. Die dabei anzuwendenden Methoden gehen hinreichend deutlich aus den Rechnungen des folgenden Paragraphen hervor, in dem die etwas mühsamer zu behandelnden gewöhnlichen Hölderschen Mittel besprochen werden.

§ 5.

Für eine Folge (s_n) werden die gewöhnlichen Hölderschen Mittel k ter Ordnung ($k \geqq 0$, ganz) rekursiv durch die Gleichungen

$$(74) \qquad h_n^{(0)} = s_n, \quad h_n^{(k)} = \frac{h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}}{n+1}, \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

definiert. Ähnlich wie in § 1 setzen wir

$$(75) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}\limits_{n \to \infty} h_n^{(k)} = h_k, & \overline{\lim}\limits_{n \to \infty} h_n^{(k)} = H_k, \\ \lim\limits_{k \to \infty} h_k = h_\infty, & \lim\limits_{k \to \infty} H_k = H_\infty. \end{cases}$$

Für diese Mittel gelten vermutlich entsprechende Sätze wie für die Hölderschen Integralmittel. Wir führen das nicht aus, wollen vielmehr nur

zeigen, daß für die Folge (27) bei diesen H_k die für die Integralmittel angegebenen Schranken erreicht werden. Wir beweisen also den

Satz 10. *Für die Folge* (s_ν) *mit*

$$s_\nu = \begin{cases} \nu & \text{für } \nu = \mu!, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{76}$$

ist $H_1 = 1$ *und für* $k \geqq 2$

$$H_k = \frac{1}{\eta_k} = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1}. \tag{77}$$

Dies Ergebnis ist sehr merkwürdig! Während nämlich für die Cesàroschen und Abelschen Mittel stets die Ungleichung (7) gilt, gilt wegen des Satzes 10 eine entsprechende Ungleichung zwischen den Hölderschen und den Abelschen Mitteln nicht. Er zeigt vielmehr, daß schon

$$H_3 < A$$

sein kann. Denn für die Folge (76) ist nach ihm $H_3 = \frac{2}{e^2}$, nach (40) aber $A = \frac{1}{e}$, also größer[10]).

Weiter aber zeigt der Satz, daß wegen $H_k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ bei unserer Folge $H_\infty = 0$ ist. Daher muß, weil die Folge positiv ist, auch $h_\infty = 0$ sein. Es ist also jedenfalls

$$h_\infty = H_\infty, \tag{78}$$

und der gemeinsame Wert endlich. Es ist nun sinngemäß, eine Folge (s_ν), für die diese Gleichung stattfindet und der gemeinsame Wert von h_∞ und H_∞ den endlichen Wert s hat, als H_∞-limitierbar zum Werte s zu bezeichnen. Ebenso soll eine Folge, für die

$$c_\infty = C_\infty \tag{79}$$

ist und beide den endlichen Wert s haben, als C_∞-limitierbar zum Werte s bezeichnet werden. Tut man dies, so lehrt Satz 10, daß für den Index $k = \infty$ der Äquivalenzsatz zwischen dem C_k- und H_k-Verfahren nicht mehr gilt. Wegen der allgemeinen Gleichung[11])

$$c_k \leqq h_k \leqq H_k \leqq C_k \tag{80}$$

ist zwar immer

$$c_\infty \leqq h_\infty \leqq H_\infty \leqq C_\infty. \tag{81}$$

---

[10]) Für $k = 1$ gilt natürlich $A \leqq H_1$, da ja $h_n^{(1)} = c_n^{(1)}$ ist. Das hat auch schon O. Hölder in seiner nun klassischen Arbeit „Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze", Math. Annalen **20** (1882), S. 535—549, bewiesen. Er bemerkt dort übrigens, daß seine Methode zum Beweis von $A < H_k$ für $k \geqq 2$ versage. Bei dem obigen Beispiel ist genau $H_2 = A$.

[11]) Vgl. Fußnote [8]).

Aus der C_∞-Limitierbarkeit einer Folge folgt also stets ihre H_∞-Limitierbarkeit zum gleichen Werte. Das entspricht dem Schneeschen Satz. Das umgekehrte aber, was dem Knoppschen Satz entsprechen würde, braucht, wie unser Beispiel zeigt, nicht richtig zu sein. Denn bei ihm ist wegen $c_\infty \leqq h_\infty = 0$ auch $c_\infty = 0$, nach (40) aber $C_\infty = \frac{1}{e}$. Sie ist also zwar H_∞-limitierbar (zum Werte 0), aber nicht C_∞-limitierbar. Nach Satz 5 ist aber auch $a = 0$ und $A = \frac{1}{e}$, die Folge also auch nicht A-limitierbar. Es ergibt sich daher weiter, daß auch der klassische Höldersche Satz [12]), nach dem aus der H_k-Limitierbarkeit stets die A-Limitierbarkeit folgt, für den Index $k = \infty$ nicht mehr allgemein richtig ist. Wegen dieser interessanten Folgerungen soll der Beweis des Satzes 10 genauer ausgeführt werden.

Beweis von Satz 10. Jeder natürlichen Zahl ν werde die positive ganze Zahl q_ν durch

$$q_\nu! \leqq \nu < (q_\nu + 1)! \tag{82}$$

eindeutig zugeordnet. Für q_n werde der Kürze halber q geschrieben. Der Beweis gründet sich nun darauf, daß bei festem k

$$h_n^{(k)} = \bar{h}_n^{(k)} + o(1) \tag{83}$$

mit

$$\bar{h}_n^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{q!}{n+1} \left(\log \frac{n+1}{q!}\right)^{k-1} \tag{84}$$

gesetzt werden kann. Sehen wir dies für den Augenblick als richtig an, so ergibt sich daraus die Behauptung (77) sehr leicht. Denn die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} \log^{k-1} z$$

besitzt im Intervall $1 < z \leqq q+1$, das für $z = \frac{n+1}{q!}$ dem Intervall $q! \leqq n < (q+1)!$ entspricht, genau ein Maximum an der Stelle $z = e^{k-1}$, sobald n groß genug ist. Läßt man aber n eine Teilfolge der Form

$$n = e^{k-1} \cdot q! + \vartheta_n$$

mit beschränkten ϑ_n durchlaufen, so strebt für diese

$$\bar{h}_n^{(k)} \to \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1} = \frac{1}{\eta_k}.$$

Damit wäre aber der Beweis schon vollendet.

Wir beweisen nun (83) durch vollständige Induktion. Zunächst ist wegen $h_n^{(1)} = c_n^{(1)}$ (vgl. den Beweis von Satz 6)

$$h_n^{(1)} = \frac{q!}{n+1} + o(1) = \bar{h}_n^{(1)} + o(1).$$

---

[12]) Vgl. Fußnote [9]).

Es sei nun (83) für ein ganzes $k \geqq 1$ schon bewiesen und k weiterhin fest. Dann ist die Gültigkeit dieser Beziehung mit $k+1$ an Stelle von k zu beweisen. Es ist aber

$$(85) \quad h_n^{(k+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(k)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \bar{h}_\nu^{(k)} + o(1) = T_n + o(1).$$

Wir setzen nun zur Abkürzung $(q-1)! = \alpha_n = \alpha$, $q! = \beta_n = \beta$ und zerlegen T_n gemäß

$$(86) \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\beta}^{n} = A_n + B_n + C_n.$$

Wegen der Beschränktheit der (positiven) Folge $\bar{h}_\nu^{(k)}$ ist für ein passendes M

$$(87) \quad A_n \leqq M \cdot \frac{\alpha}{q!+1} \leqq \frac{M}{q}, \quad \text{also } A_n = o(1).$$

Für alle ν der Summe B_n ist $q_\nu = q-1$ und $\log \frac{\nu+1}{(q-1)!} \leqq \log q$. Folglich ist

$$B_n \leqq \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(q-1)!}{n+1} (\log q)^{k-1} \sum_{\nu=\alpha}^{\beta-1} \frac{1}{\nu+1},$$

für ein passendes M' also

$$(88) \quad B_n \leqq M' \frac{(\log q)^k}{q}, \text{ und folglich } B_n = o(1).$$

Für alle ν der Summe C_n ist schließlich $q_\nu = q_n = q$, also

$$C_n = \frac{1}{(k-1)!} \frac{q!}{n+1} \sum_{\nu=q!}^{n} \frac{1}{\nu+1} \left(\log \frac{\nu+1}{q!}\right)^{k-1}.$$

Einfache Integralabschätzungen lehren aber, daß hierin

$$(89) \quad \sum_{\nu=q!}^{n} \frac{1}{\nu+1} \left(\log \frac{\nu+1}{q!}\right)^{k-1} = \frac{1}{k} \left(\log \frac{n+1}{q!}\right)^{k} + o(1)$$

gesetzt werden kann. Also ist

$$(90) \quad C_n = \bar{h}_n^{(k+1)} + o(1).$$

Aus (87), (88) und (90) folgt nun aber nach (86) und (85) die Behauptung, daß

$$h_n^{(k+1)} = \bar{h}_n^{(k+1)} + o(1)$$

gesetzt werden kann. Damit ist der Beweis in allen Teilen vollendet.

(Eingegangen am 2. Oktober 1936.)

Über gewisse Reihen, welche die Potenzreihen als Grenzfall enthalten.

Von

Ernst Lammel in Prag.

Man denke sich auf $|z| = R\,(R > 0)$ eine Folge von Punkten $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ gegeben. Wie muß sie beschaffen sein, damit *jede* für $|z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ sich in eindeutiger Weise in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z} \tag{1}$$

entwickeln läßt?

Es wird sich folgendes Resultat ergeben: Die Gleichverteilung der Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|z| = R$ im Sinne von Weyl[1]) ist hierfür eine notwendige und hinreichende Bedingung. Für die durch $f(z)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq \frac{1}{R}. \tag{2}$$

Umgekehrt: Unter der Voraussetzung der Gleichverteilung der Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ anf $|z| = R$ ist, eine Reihe von der Form (1) dann und nur dann für alle $|z| < R$ konvergent, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist. Die Reihe konvergiert dann in jedem Kreis $|z| \leqq R_1 < R$ gleichmäßig und stellt also eine in $|z| < R$ reguläre Funktion dar.

Anmerkung. Die Potenzreihen sind in den obigen Reihen als Grenzfall $(R \to \infty)$ enthalten.

Im folgenden wird der Einfachheit halber $R = 1$ gesetzt.

§ 1.

Ein Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Reihen (1).

Wir beweisen zunächst einen wichtigen Hilfssatz, worin über die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|z| = 1$ keine weitere Voraussetzung gemacht wird:

[1]) W. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen 77 (1916), S. 313–352.

Ist die Reihe (1) *überhaupt für einen Wert* $z_0\,(0 < |z_0| < 1)$ *konvergent, so konvergiert sie in einem genügend kleinen Kreise um den Nullpunkt gleichmäßig.*

Da die Reihe (1) für $z_0\,(0 < |z_0| < 1)$ konvergiert, so muß für $\mu \geqq M$

$$|A_\mu| \frac{|z_0|^\mu}{\left|\prod_{\nu=1}^{\mu}\left(1-\frac{z_0}{\alpha_\nu}\right)\right|} < 1$$

oder

$$\sqrt[\mu]{|A_\mu|} < \frac{\sqrt[\mu]{\left|\prod_{\nu=1}^{\mu}\left(1-\frac{z_0}{\alpha_\nu}\right)\right|}}{|z_0|}$$

sein und da

$$\left|1-\frac{z_0}{\alpha_\nu}\right| < 2; \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$\sqrt[\mu]{|A_\mu|} < \frac{2}{|z_0|}. \tag{3}$$

Für $|z| < |z_0|$ gilt wegen (3) und da

$$\left|1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right| > 1 - |z_0|; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist,

$$\sqrt[\mu]{|A_\mu| \frac{|z|^\mu}{\left|\prod_{\nu=1}^{\mu}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|}} < \sqrt[\mu]{|A_\mu|}\,\frac{|z|}{1-|z|} < \frac{2|z|}{|z_0|(1-|z|)},$$

sobald $\mu \geqq M$.

Daraus folgt aber, daß die Reihe (1) für

$$|z| \leqq \frac{|z_0|}{|z_0|+2}$$

sicher gleichmäßig konvergiert.

§ 2.

Integraldarstellung für die Entwicklungskoeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$.

$f(z)$ sei eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, von der angenommen wird, daß sie sich in eine Reihe von der Form (1) entwickeln läßt. Da dann die Reihe (1) für alle $|z| < 1$ konvergiert, so ist sie nach dem Hilfssatze in einem hinreichend klein gewählten Kreise gleichmäßig konvergent. Daraus folgt, daß die Differenz

$$f(z) - \left(A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}\right)$$

in $z = 0$ eine mindestens $(n+1)$-fache Nullstelle besitzt und man kann also $f(z)$ in der Form schreiben

$$(4) \qquad f(z) = A_0 + \sum_{u=1}^{n} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z} + f_{n+1}(z) \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z},$$

wobei $f_{n+1}(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion darstellt.

Um A_n $(n \geqq 2)$ zu berechnen, dividieren wir (4) durch

$$z^2 \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}\ ^{2})$$

und integrieren längs $|z| = r < 1$. Wir erhalten dann

$$(5) \qquad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2 \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}} dz \ (n \geqq 2).$$

Durch Division von (4) durch z bzw. z^2 und Integration längs $|z| = r < 1$ erhalten wir

$$(6) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz \quad \text{bzw.} \quad A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Wir bekommen mithin folgenden Satz 1: *Läßt sich die für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe* (1) *entwickeln, so ist die Entwicklung eindeutig und für die Entwicklungskoeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ gelten die Integraldarstellungen* (5) *und* (6).

§ 3.

Gleichverteilung der α-Stellen auf $|z| = 1$ ist Folge der Darstellbarkeit sämtlicher regulärer Funktionen.

Wenn die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|z| = 1$ so beschaffen sein soll, daß sich *jede* für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ daselbst durch eine Reihe von der Form (1) darstellen lassen soll, so muß insbesondere die Funktion $f(z) = z$ diese Eigenschaft haben.

Für die Entwicklungskoeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ der Funktion z erhält man aus (5) und (6)

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{\alpha_\nu}\right); \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Es ist also $|A_\mu| = 1; \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots.$

---

[2]) Die naheliegendere Division durch

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}$$

ist unzweckmäßig.

Wir beweisen nun den folgenden Satz 2: *Ist*

$$|A_\mu| = 1; \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots,$$

so konvergiert die Reihe (1) *dann und nur dann für alle* $|z| < 1$, *wenn die Folge* $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt ist.*

Beweis: Man nehme an, daß die Reihe (1) konvergent ist. Da dann die Reihenglieder für jedes z ($|z| < 1$) beschränkt sind, so ist

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|A_n| \frac{|z|^n}{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{|z|}{\sqrt[n]{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|}} \leqq 1,$$

oder

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|} \geqq |z|. \tag{7}$$

Wir wollen jetzt schließen, daß aus dieser für alle $|z| < 1$ gültigen Ungleichung sogar

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|} \geqq 1 \text{ für alle } |z| < 1 \tag{8}$$

folgt.

Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein z_1 ($|z_1| < 1$), für welches

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right|} = g < 1 \tag{9}$$

ist.

Die Funktionenfolge

$$\varphi_n(z) = \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)}; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

wobei immer der Funktionenzweig genommen werden soll, welcher für $z = 0$ den Wert 1 besitzt, hat die Eigenschaft, daß

$$1 - r \leqq |\varphi_n(z)| \leqq 1 + r \quad \text{für} \quad |z| \leqq r < 1 \tag{11}$$

gilt. Die Folge (10) ist also für $|z| < 1$ gleichmäßig beschränkt und dasselbe ist auch von der Folge

$$\left\{\frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < 1$ der Fall.

Wir wählen $r = R < 1$ so, daß

$$|z_1| < R \quad \text{und} \quad g < R \tag{12}$$

erfüllt ist.

Aus der Folge (10) läßt sich bekanntlich eine Teilfolge

$$\{\varphi_{n_\lambda}(z)\}, \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

aussondern, welche für $|z| \leqq R < 1$ gegen eine Grenzfunktion $\varphi(z)$ konvergiert, wobei offenbar noch verlangt werden kann, daß $|\varphi(z_1)| = g$ ist. Wegen (11) nimmt $\varphi(z)$ das Minimum seines Betrages im Kreise $|z| \leqq R$ auf $|z| = R < 1$ an. z_2 sei eine dieser Stellen. Dann ist

$$|\varphi(z_2)| \leqq g. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt für $z = z_2$ $(|z_2| = R)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n| \frac{|z_2|^n}{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z_2}{\alpha_\nu}\right)\right|}} = \frac{|z_2|}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z_2}{\alpha_\nu}\right)\right|}} \geqq \frac{R}{g} > 1.$$

An der Stelle z_2 aus $|z| < 1$ wäre also Divergenz vorhanden.

Wir zeigen jetzt, daß die Bedingung (9) gleichbedeutend mit der Gleichverteilung der Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ auf $|z| = 1$ ist. Das geschieht in zwei Schritten.

Erster Schritt. Aus (8) folgt, daß die Folge (10) für jedes $|z| \leqq \varrho < 1$ sogar *gleichmäßig gegen Eins als Grenzfunktion konvergiert.*

Zunächst zeigen wir, daß für jedes $|z| \leqq r < 1$

$$|\varphi_n(z)| > 1 - \varepsilon \quad \text{ist, sobald} \quad n \geqq N_\varepsilon(r). \tag{14}$$

Da $\varphi_n'(z) = \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{-\frac{1}{\alpha_\nu}}{1-\frac{z}{\alpha_\nu}}\right)\varphi_n(z)$, so folgt mit Hilfe von (11)

$$|\varphi_n'(z)| \leqq \frac{1+r}{1-r} = K(r) \quad \text{für} \quad |z| \leqq r < 1. \tag{15}$$

Es ist also auch die Folge der Ableitungen $\{\varphi_n'(z)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ für $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig beschränkt.

Wir denken uns nun im Kreise $|z| \leqq r < 1$ l Punkte $z_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, l)$ so gewählt, daß jeder Punkt $|z| \leqq r < 1$ von mindestens einem der Punkte $z_\varkappa$ eine Entfernung hat, für welche

$$|z - z_\varkappa| < \frac{\varepsilon}{2K(r)} \tag{16}$$

erfüllt ist.

Wenn man $n \geqq N_\varepsilon$ wählt, ist

$$|\varphi_n(z_\varkappa)| \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, l). \tag{17}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$|\varphi_n(z) - \varphi_n(z_\varkappa)| \leqq |z - z_\varkappa| \cdot \operatorname*{Max}_{|z|\leqq r} |\varphi_n'(z)| < \frac{\varepsilon}{2K(r)} \cdot K(r) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Da

$$|\varphi_n(z) - \varphi_n(z^\varkappa)| \geqq |\varphi_n(z)| - |\varphi_n(z_\varkappa)|$$

ist, so erhalten wir schließlich aus (17) und (18) die Behauptung (14).

Wir betrachten jetzt die Folge

$$\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei immer der Funktionenzweig genommen werden soll, welcher für $z = 0$ den Wert Null hat. Diese Folge ist für $|z| \leqq r < 1$ regulär und nach (14) ist

$$\Re\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\} < \log \frac{1}{1-\varepsilon} > 0, \quad \text{sobald} \quad n \geqq N_\varepsilon.$$

Daher gelten für $\Re\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}$ die Ungleichungen[3]):

$$-\frac{2\varrho \log \frac{1}{1-\varepsilon}}{r-\varrho} \leqq \Re\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\} \leqq \frac{2\varrho \log \frac{1}{1-\varepsilon}}{r+\varrho}$$

für $|z| \leqq \varrho < r$.

Daraus folgt, daß gleichmäßig für $|z| \leqq \varrho < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \Re\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\} = 0.$$

Mithin ist auch, da außerdem $\log \frac{1}{\varphi_n(0)} = 0$ ist, in $|z| \leqq \varrho$ gleichmäßig

$$\lim_{n\to\infty} \Im\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\} = 0.$$

Es konvergiert also die Folge $\left\{\log \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ für $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig gegen Null und deshalb die Folge (10) daselbst gleichmäßig gegen Eins. Es ist mithin

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 1 \quad \text{gleichmäßig für} \quad |z| \leqq \varrho < 1. \tag{19}$$

Zweiter Schritt. Es ist

$$\varphi_n(z) = e^{-\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a_\nu^\mu}\right) \frac{z^\mu}{\mu}} \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

---

[3]) P. Koebe, Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 52–84, siehe S. 68.

Da $\varphi_n(z)$ für $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig gegen Eins konvergiert, so konvergiert

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^\mu} \right) \frac{z^\mu}{\mu} = \Psi_n(z) \tag{20}$$

daselbst gleichmäßig gegen Null und daraus folgt bekanntlich, daß auch die μ-ten Ableitungen

$$\Psi_n^{(\mu)}(z); \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

dort gleichmäßig gegen Null gehen. Da dann insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_n^{(\mu)}(0) = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist, so erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^\mu} \right) = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots \tag{21}$$

als notwendige Bedingung dafür, daß die Folge (10) für $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig gegen Eins konvergiert.

Die Bedingungen (21) sind auch hinreichend. Das erschließen wir so: Ist $|z| \leqq r < 1$, so ist

$$\left| \sum_{\mu=m}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^\mu} \right) \frac{z^\mu}{\mu} \right| < \frac{|z|^m}{1-|z|} \leqq \frac{r^m}{1-r} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{22}$$

sobald $m \geqq M_\varepsilon$.

Wegen (21) kann man erreichen, daß

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^\mu} \right| < \frac{\varepsilon}{2(m-1)} \text{ für } \mu = 1, 2, 3, \ldots, m-1 \tag{23}$$

wird, wenn $n \geqq N_\varepsilon$ ist.

Aus (22) und (23) folgt also für $|z| \leqq r < 1$

$$\left| \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^\mu} \right) \frac{z^\mu}{\mu} \right| < \varepsilon \text{ sobald } n \geqq N_\varepsilon.$$

Es ist mithin (20) eine Nullfolge, sobald (21) erfüllt ist und zwar ist die Konvergenz für $|r| \leqq z < 1$ gleichmäßig.

Die Bedingungen (21) *sind aber die notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Folge* $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt ist*[4]). Damit ist bewiesen:

[4]) Weyl, a. a. O., S. 315.

Aus

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \right|} \geqq 1 \text{ für jedes } |z| < 1$$

folgt, daß die Folge

$$\left\{ \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)} \right\}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für $|z| \leqq \varrho < 1$ *gleichmäßig gegen Eins konvergiert und dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Folge* $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt ist.*

Gleichzeitig haben wir den folgenden Satz 3 bekommen:

Die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *muß gleichverteilt sein, wenn sich jede für* $|z| < 1$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *in eine Reihe* (1) *entwickeln lassen soll.*

§ 4.

Allgemeiner Konvergenzsatz im Falle der Gleichverteilung der α-Stellen auf $|z| = 1$.

Zunächst beweisen wir den Satz 4:

Ist die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt, so konvergiert die Reihe* (1) *dann und nur dann für alle* $|z| < 1$, *wenn*

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1$$

ist.

Es ist wegen (19)

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{\frac{|A_\mu| \, |z|^\mu}{\left| \prod_{\nu=1}^{\mu} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \right|}} = |z| \, \overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|}, \tag{24}$$

woraus voranstehender Satz folgt.

Ferner beweisen wir den folgenden *Konvergenzsatz*:

Wenn die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt und*

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1$$

ist, stellt die Reihe

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \left(\frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}\right)$$

eine für $|z| < 1$ *reguläre Funktion dar.*

Die nach den Voraussetzungen für alle $|z| < 1$ vorhandene Konvergenz der Reihe (1) ist wegen (24) für $|z| \leqq R_1 < 1$ gleichmäßig. Daraus folgt aber der ausgesprochene Konvergenzsatz unmittelbar.

§ 5.

Entwicklungssatz.

Wir zeigen jetzt endlich, daß die Gleichverteilung der Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1,2,3,\ldots)$ auf $|z| = 1$ auch hinreichend dafür ist, daß sich jede für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe (1) entwickeln läßt.

Aus (5) folgt

$$|A_n| < \frac{1}{r^\mu} \frac{M(r)}{1-r} \operatorname*{Max}_{|z|=r} \left| \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \right|,$$

worin $M(r) = \operatorname*{Max}_{|z|=r} |f(z)|$ bedeutet.

Wir erhalten so mit Rücksicht auf (19)

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq \frac{1}{r}$$

und da wir r beliebig nahe an Eins wählen können, ist

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1.$$

Wenn mithin die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ auf $|z| = 1$ gleichverteilt ist, so stellt die Reihe (1), in welcher die A_μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ durch (5) und (6) gegeben sind, nach dem Konvergenzsatze des vorigen Paragraphen eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion dar. Daß diese Funktion mit der Funktion $f(z)$ identisch ist, folgt einfach daraus, daß $f(z)$ mit der durch die Reihe dargestellten Funktion an der Stelle $z = 0$ im Funktionswerte und allen Ableitungen übereinstimmt.

Als Schlußresultat erhalten wir so den *Entwicklungssatz:*

Denkt man sich eine Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gegeben, so läßt sich jede für* $|z| < 1$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *dann und nur dann in eine Reihe*

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}$$

entwickeln, wenn die Folge $\{\alpha_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *auf* $|z| = 1$ *gleichverteilt ist.*

Für die Entwicklungskoeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ *gelten die Integraldarstellungen*

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\, dz, \quad A_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^2}\, dz,$$

$$A_\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2 \prod_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{\alpha_\nu z}{\alpha_\nu - z}}\, dz \quad (\mu \geqq 2).$$

Es ist

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1.$$

Herrn Professor K. Löwner, Prag, danke ich für das rege Interesse und die vielen Ratschläge, wodurch überhaupt erst ermöglicht wurde, daß die Arbeit in der vorliegenden Fassung erscheint.

Prag, im Juli 1936.

(Eingegangen am 2. Oktober 1936.)

Integralgeometrie 21.

Über Schiebungen.

Aus Vorträgen in Breslau und Dresden im Oktober 1936.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

In den Untersuchungen von Crofton bis Santaló über Integralgometrie wurde meist die Bewegungsgruppe zugrunde gelegt. Ich möchte hier die *Gruppe der Schiebungen* (Translationen) zum Ausgang nehmen und zeigen, daß man da naturgemäß zu einer Erweiterung der Theorie von Brunn und Minkowski auf nicht konvexe Gebilde kommt.

Ich werde mich im folgenden auf die Betrachtung von Vielecken und Vielflachen beschränken, wodurch der Gegenstand völlig elementar wird. Auch ist die vorliegende Arbeit ohne Kenntnis der vorhergehenden dieser Reihe und ohne Kenntnis meines Büchleins über Integralgeometrie lesbar.

Die Ergebnisse der folgenden §§ 1–3 sind auf anderem Wege auch von Herrn L. Berwald gefunden worden. Die Herren L. Berwald und O. Varga haben ferner für die räumliche Geometrie bemerkenswerte Erfolge erzielt, die an anderer Stelle veröffentlicht werden sollen.

§ 1.

Hauptformel für ebene Gebiete.

Wir nehmen in der Ebene $\mathfrak{E}_2$ von Euklid ein Gebiet $\mathfrak{G}$, das sich in einen Dreieckskomplex $\mathfrak{G}''$ zerschneiden oder „triangulieren“ läßt[1]). $\mathfrak{G}$ ist also als schlicht und beschränkt vorausgesetzt und sein Rand $\mathfrak{G}'$ bestehe aus endlich vielen geschlossenen Vielecken mit endlich vielen Kanten. $\mathfrak{G}$ wird als „vernünftig“ angenommen in dem Sinn, daß jede Ecke von $\mathfrak{G}'$ nur zwei Kanten von $\mathfrak{G}'$ angehört.

Die Außenwinkel α von $\mathfrak{G}'$ nehmen wir $|\alpha| < \pi$ mit $\alpha > 0$, wenn $\mathfrak{G}$ an dieser Stelle konvex ist, sonst $\alpha < 0$. Dann ist

$$\Sigma \alpha = 2\pi(\varrho_a - \varrho_i), \tag{1}$$

wenn die Summe links über alle Ecken von $\mathfrak{G}'$ erstreckt wird, ϱ_a die Anzahl der äußeren zusammenhängenden Randteile und ϱ_i die der inneren bedeutet. Es ist

$$\varrho_a - \varrho_i = \varepsilon - \varkappa + \delta, \tag{2}$$

wenn ε, $\varkappa$, δ die Anzahlen von Ecken, Kanten, Dreiecken der Triangulierung $\mathfrak{G}''$ von $\mathfrak{G}$ angeben[1]). Wir nennen

$$Z = \varrho_a - \varrho_i = \frac{1}{2\pi} \Sigma \alpha \tag{3}$$

Eulers *Zusammenhangszahl* für $\mathfrak{G}$.

Es sei nun $\mathfrak{G}_0$ ein festes Gebiet und $\mathfrak{G}_1$ eines, das wir in $\mathfrak{E}_2$ allen Schiebungen unterwerfen wollen. Ein beliebiger mit $\mathfrak{G}_1$ verbundener Punkt beschreibt dabei eine Fläche, deren Element $\dot{\mathfrak{G}}_1$ heißen soll. Wir wollen folgendes Integral umformen:

$$J = \int Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) \dot{\mathfrak{G}}_1. \tag{4}$$

Darin ist die Integration über alle Lagen von $\mathfrak{G}_1$ zu erstrecken, die aus einer unter ihnen durch *alle* Schiebungen in $\mathfrak{E}_2$ entstehen.

Der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$ ist wieder ein Gebiet in dem früher betrachteten Sinn, wenn wir bei der Berechnung von J die Lagen von $\mathfrak{G}_1$ weglassen, bei denen eine Ecke von $\mathfrak{G}_1$ auf eine Seite von $\mathfrak{G}_0$ zu liegen kommt. Diese Weglassung ist für die Berechnung von J unerheblich. $Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)$ bedeutet die Zusammenhangszahl des Durchschnitts $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$, und insbesondere ist $Z = 0$ zu setzen, wenn dieser Durchschnitt leer ist.

Die Auswertung von J gelingt am einfachsten nach einem von W. Maak stammenden Verfahren. Die Ecken des Durchschnitts $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$ sind nämlich von dreierlei Art: 1. Ecken von $\mathfrak{G}_1'$ in $\mathfrak{G}_0$, 2. Ecken von $\mathfrak{G}_0'$ in $\mathfrak{G}_1$ und 3. Ecken, die dadurch entstehen, daß eine Kante von $\mathfrak{G}_0'$ eine von $\mathfrak{G}_1'$ schneidet. Die Lagen von $\mathfrak{G}_1$, bei denen eine Kante von $\mathfrak{G}_i'$ durch eine Ecke von $\mathfrak{G}_k'$ geht, können wir dabei wieder weglassen.

Berechnen wir die entsprechenden Bestandteile J_i $(i = 1, 2, 3)$ von $J = J_1 + J_2 + J_3$, indem wir für Z die Formel

$$Z = \frac{1}{2\pi} \Sigma \alpha$$

benutzen! Zur Berechnung von J_1 betrachten wir eine Ecke $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{G}_1$ mit dem Außenwinkel α. Der Beitrag, den sie zu J_1 liefert, ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{p} < \mathfrak{G}_0} \alpha \dot{\mathfrak{G}}_1 = \frac{1}{2\pi} \alpha F_0, \tag{5}$$

wenn F_0 $(F_0 > 0)$ die Fläche von $\mathfrak{G}_0$ bedeutet. Somit ist

$$J_1 = F_0 \frac{1}{2\pi} \Sigma \alpha = F_0 Z_1, \tag{6}$$

wenn Z_1 die Zusammenhangszahl von $\mathfrak{G}_1$ angibt. Ebenso ist

$$J_2 = F_1 Z_0. \tag{7}$$

---

[1]) Vgl. meine Vorlesungen über Integralgeometrie I, 2. Aufl., § 17. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1936.

Zur Berechnung von J_3 greifen wir von $\mathfrak{G}_0'$ die ϱ-te und von $\mathfrak{G}_1'$ die σ-te Kante heraus. An ihrem Durchschnitt entsteht der Außenwinkel $\alpha_{\varrho\sigma}$ von $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1$ mit $0 < \alpha_{\varrho\sigma} < \pi$ (allfällige Werte $\alpha_{\varrho\sigma} = 0, \pi$ geben zu J_3 keinen Beitrag). Den Flächeninhalt des Gleisecks (Parallelogramms) von dessen Seiten eine zur ϱ-ten Kante von $\mathfrak{G}_0$ und eine zur σ-ten Kante von $\mathfrak{G}_1$ parallel und gleich lang ist, nennen wir $f_{\varrho\sigma} > 0$. Dann geben unsere beiden Kanten zu J_3 den Beitrag $\alpha_{\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma} : 2\pi$ und somit ist

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \Sigma\, \alpha_{\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma}, \tag{8}$$

worin ϱ über alle Kanten von $\mathfrak{G}_0'$ und σ über alle von $\mathfrak{G}_1'$ zu summieren ist.

Damit ist bewiesen:

$$\int Z(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = Z_0 F_1 + \frac{1}{2\pi} \Sigma\, \alpha_{\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma} + F_0 Z_1. \tag{9}$$

Führen wir die Abkürzung

$$H_{01} = H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = \frac{1}{4\pi} \Sigma\, \alpha_{\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma} = H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) \tag{10}$$

ein, so lautet unser Ergebnis kürzer

$$\boxed{\int Z(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1)\,\dot{\mathfrak{G}}_1 = Z_0 F_1 + 2\,H_{01} + F_0 Z_1.} \tag{11}$$

Diese Beziehung soll die *Hauptformel für die Schiebungen ebener Gebiete* heißen.

H_{01} hängt für den Fall von *Eigebieten* $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1$ in einfacher Weise mit H. Minkowskis gemischtem Flächeninhalt zusammen. Es sei nämlich $\mathfrak{G}_0$ das Innere eines konvexen Vielecks. Wir wählen darin einen Aufpunkt o und stellen die Entfernung p_0 der Stützgeraden an $\mathfrak{G}_0$ in Richtung τ als Funktion von τ dar

$$p_0 = p_0(\tau)$$

und erhalten so die „*Stützfunktion*" von $\mathfrak{G}_0$. Ebenso beziehen wir das Eivieleck $\mathfrak{G}_1$ auf einen mit ihm fest verbundenen Aufpunkt $\mathfrak{p}_1$ mit der Stützfunktion

$$p_1 = p_1(\tau).$$

Dann hat unser Integral J eine einfache geometrische Bedeutung. Es ist der Flächeninhalt des Eivielecks $\mathfrak{G}$ mit der Stützfunktion

$$p(\tau) = p_0(\tau) + p_1(\tau + \pi). \tag{12}$$

Nennen wir das Gebiet, das aus $\mathfrak{G}_1$ durch Spiegelung an $\mathfrak{p}_1$ entsteht, $\mathfrak{G}_1^*$, so ist nach Minkowski der Flächeninhalt F von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1^*$ gleich

$$F = F_0 + 2F(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*) + F_1, \tag{13}$$

worin $F(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*)$ den gemischten Flächeninhalt von $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*$ bezeichnet[2]).

[2]) Vgl. etwa das unter 1. genannte Büchlein, § 15.

Durch Vergleich mit der Hauptformel (11) finden wir den angekündigten Zusammenhang:

$$H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = F(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*) \tag{14}$$

oder

$$F(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*). \tag{15}$$

Somit folgt aus (10) für den gemischten Flächeninhalt

$$F(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = \frac{1}{4\pi} \Sigma (\pi - \alpha_{\varrho\sigma}) f_{\varrho\sigma} \tag{16}$$

oder

$$F_{01} + H_{01} = \tfrac{1}{4} \Sigma f_{\varrho\sigma}. \tag{17}$$

Mittels dieser Formeln ist es möglich, den Begriff des gemischten Flächeninhalts auf Gebiete zu übertragen, die nicht konvex sind.

Hat $\mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_1$ einen Mittelpunkt, so ist $F_{01} = H_{01}$.

§ 2.

Mittlere Schnittpunktzahl.

Wir wollen in der Formel (11) an Stelle der Gebiete $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$ ihre Ränder $\mathfrak{G}_0'$, $\mathfrak{G}_1'$, also an Stelle der Gebiete Vielecke einsetzen. Dabei denken wir uns diese Ränder als „unendlich schmale" Gebietsstreifen[3]). Dann wird $F_0 = F_1 = 0$, an Stelle von H_{01} tritt in der Bezeichnung von § 1

$$H_{01}' = \frac{1}{2\pi} \Sigma \alpha_{\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma} + \frac{1}{2\pi} \Sigma (\pi - \alpha_{\varrho\sigma}) f_{\varrho\sigma} = \tfrac{1}{2} \Sigma f_{\varrho\sigma} \tag{18}$$

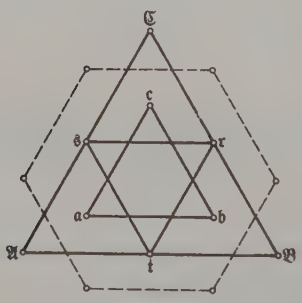


Fig. 1.

oder wegen (17)

$$H_{01}' = 2(F_{01} + H_{01}). \tag{19}$$

Somit gibt (11)

$$\boxed{\int n \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2(F_{01} + H_{01}),} \tag{20}$$

wenn wir

$$Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1') = Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1') = \tfrac{1}{2} Z(\mathfrak{G}_0' \mathfrak{G}_1') = n \tag{21}$$

setzen, also die Schnittpunktzahl von $\mathfrak{G}_0' \mathfrak{G}_1'$ mit $2n$ bezeichnen.

Ich will die Formel (20) an einem einfachen *Beispiel* bestätigen. Es sei $\mathfrak{G}_0$ ein etwa gleichseitiges Dreieck mit den Ecken a, b, c und dem Schwerpunkt s_0 (Fig. 1) und das bewegliche Gebiet $\mathfrak{G}_1$ ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck, das aus $\mathfrak{G}_0$ durch Spiegelung

[3]) Man findet eine verwandte Untersuchung in § 19 meiner „Vorlesungen über Integralgeometrie".

an einem Punkt entsteht. Dann ist $\mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1$ ein regelmäßiges Sechseck, das aus 6 zu $\mathfrak{G}_0$ kongruenten Dreiecken zusammengesetzt werden kann. In unserer Figur ist es punktiert. Somit ist nach (13)

$$F(\mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1) = F_0 + 2F_{01} + F_1 = 6F_0$$

und wegen $F_0 = F_1$ somit $F_{01} = 2F_0$. Andererseits haben wir $Z(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = 1$ oder $= 0$ und der Schwerpunkt s_1, von $\mathfrak{G}_1$ beschreibt, wenn $\mathfrak{G}_1$ so verschoben wird, daß es stets $\mathfrak{G}_0$ trifft, das Dreieck $\mathfrak{ABC}$ mit der Fläche $4F_0$. Nach (11) haben wir somit wegen $Z_0 = Z_1 = 1$

$$2(F_0 + H_{01}) = 4F_0$$

und danach ist $H_{01} = F_0$. Durchläuft s_1 das Dreieck rst, so ist die halbe Schnittpunktzahl von $\mathfrak{G}_0'$ und $\mathfrak{G}_1'$ $n = 3$. Für jedes s_1 in $\mathfrak{ABC}$ und außerhalb rst ist dagegen die halbe Schnittpunktzahl $n = 1$. Danach wird

$$\int n\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 3F_0 + 1(4-1)F_0 = 6F_0.$$

Somit bestätigen wir in unserem Fall die Gültigkeit von (20).

§ 3.

Verallgemeinerung einer Ungleichheit Minkowskis.

Wir nehmen an, die Gebiete $\mathfrak{G}_i$ seien einfach zusammenhängend ($Z_i = 1$), jedes habe also nur einen äußeren Rand $\mathfrak{G}_i'$. Wir wählen die Zahl $\varrho > 0$ so, daß das Gebiet $\varrho\,\mathfrak{G}_0$, das aus $\mathfrak{G}_0$ durch Streckung im Verhältnis $1:\varrho$ vom Ursprung aus entsteht, die Eigenschaft hat, daß $\mathfrak{G}_1$ nicht so parallel verschoben werden kann, daß es ganz in $\varrho\,\mathfrak{G}_0$ liegt oder ganz $\varrho\,\mathfrak{G}_0$ enthält. Die Grenzwerte seien ϱ' und ϱ'' ($\varrho' < \varrho < \varrho''$). Dann besteht der Durchschnitt $\varrho\,\mathfrak{G}_0 \cdot \mathfrak{G}_1$ stets aus einfach zusammenhängenden Teilen und es ist

$$Z(\varrho\,\mathfrak{G}_0 \cdot \mathfrak{G}_1) = m \tag{22}$$

gleich der Anzahl dieser Teile. Da jeder solche Teil mindestens zu einer Trennungslinie in $\varrho\,\mathfrak{G}_0 \cdot \mathfrak{G}_1'$ Anlaß gibt, ist $n(\varrho) \geqq m(\varrho)$. Wir haben also nach (11) und (20)

$$\begin{cases} \int m\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = \varrho^2 F_0 + 2\varrho H_{01} + F_1, \\ \int n\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\varrho(F_{01} + H_{01}) \end{cases} \tag{23}$$

und somit

$$\int (n-m)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = -\varrho^2 F_0 + 2\varrho F_{01} - F_1 \geqq 0. \tag{24}$$

Für die Diskrimante unseres quadratischen Polynoms in ϱ finden wir also

$$\boxed{F_{01}^2 - F_0 F_1 \geqq 0.} \tag{25}$$

Diese Ungleichheit [1]) ist von H. Minkowski um 1900 gefunden worden unter der Beschränkung auf konvexe Gebiete und ist der rechnerische Ausdruck für ein Ergebnis von H. Brunn von 1887 über Eikörper.

Aus (23) folgt wegen $F_0 > 0$

$$\left(\frac{F_{01}^2}{F_0} - F_1\right) - F_0\left(\frac{F_{01}}{F_0} - \varrho\right)^2 \geqq 0 \tag{26}$$

und daraus für $\varrho = \varrho', \varrho''$

$$\begin{cases} \dfrac{F_{01}^2}{F_0} - F_1 \geqq F_0\left(\dfrac{F_{01}}{F_0} - \varrho'\right)^2, \\ \dfrac{F_{01}^2}{F_0} - F_1 \geqq F_0\left(\varrho'' - \dfrac{F_{01}}{F_0}\right)^2, \end{cases} \tag{27}$$

wobei die Ausdrücke in den Klammern $\geqq 0$ sind. Hieraus folgt weiter

$$\boxed{F_{01}^2 - F_0 F_1 \geqq \tfrac{1}{4} F_0^2 (\varrho'' - \varrho')^2.} \tag{28}$$

Diese Verschärfung von (25) ist für den konvexen Fall von Bonnesen und mir angegeben worden [1]). Aus ihr folgt die Einzigkeit: $F_{01}^2 - F_0 F_1 = 0$ gilt nur dann, wenn $\varrho' = \varrho''$, wenn also $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ ähnlich liegen.

§ 4.

Drei Gebiete in der Ebene.

Nach dem Vorbild einer Untersuchung von L. A. Santaló [4]) läßt sich die Hauptformel (11) von zwei Gebieten auf drei Gebiete $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ (und ebenso auf n Gebiete) verallgemeinern. Deuten wir die Herleitung an!

Der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$ sei mit $\mathfrak{G}_d$ bezeichnet. Dann ist nach (11)

$$\begin{aligned} \int Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2)\, \dot{\mathfrak{G}}_1\, \dot{\mathfrak{G}}_2 &= \int \dot{\mathfrak{G}}_1 \int Z(\mathfrak{G}_d \mathfrak{G}_2)\, \dot{\mathfrak{G}}_2 \\ &= \int (Z_d F_2 + 2 H_{d2} + F_d Z_2)\, \dot{\mathfrak{G}}_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Andererseits beweist man

$$\int F_d\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = F_0 F_1, \tag{30}$$

$$\int H_{d2}\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = F_0 H_{12} + F_1 H_{20} \tag{31}$$

---

[4]) L. A. Santaló, Geometría Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano. Hamburg. Abhandlungen **11** (1936), S. 222—236 oder mein unter [1]) genanntes Büchlein S. 53.

und nach (11) ist

$$\int Z_d \dot{\mathfrak{G}}_1 = Z_0 F_1 + 2 H_{01} + F_0 Z_1. \tag{32}$$

Somit ergibt sich das gewünschte Ergebnis

$$\boxed{\begin{aligned}\int Z(\dot{\mathfrak{G}}_0 \dot{\mathfrak{G}}_1 \dot{\mathfrak{G}}_2)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 \dot{\mathfrak{G}}_2 = {} & \{Z_0 F_1 F_2 + Z_1 F_2 F_0 + Z_2 F_0 F_1\} \\ & + 2\{F_0 H_{12} + F_1 H_{20} + F_2 H_{01}\}.\end{aligned}} \tag{33}$$

§ 4.

Gebiete im Raum.

Anziehender als in der Ebene sind unsere Untersuchungen im dreidimensionalen Raum $\mathfrak{E}_3$ von Euklid, dem wir uns jetzt zuwenden wollen. Dabei werden wir uns auf das Nächstliegende beschränken. Die Übertragung unserer Hauptformel (11) auf den Fall *zweier* Gebiete im $\mathfrak{E}_3$ bietet keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten. Solche werden erst bei *drei* Gebieten im $\mathfrak{E}_3$ auftreten.

Zuerst einiges über die Zusammenhangszahl eines Gebietes $\mathfrak{G}$ im $\mathfrak{E}_3$. Wir setzen von $\mathfrak{G}$ voraus, es soll beschränkt und schlicht sein und der Rand $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ soll aus endlich vielen zusammenhängenden Vielflachen bestehen. Jedes solche Vielfach sei aus endlichen vielen ebenen Seitenflächen aufgebaut. Wir setzen ferner $\mathfrak{G}$ im folgenden Sinne als „*vernünftig*" voraus: Auch der Rand $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ soll noch schlicht sein, d. h. $\mathfrak{G}$ soll nicht an sich selbst anstoßen.

Wir denken uns den Rand $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ zerschnitten in einen Dreieckskomplex $\mathfrak{G}''$, dessen Kanten neben „wahren Kanten" von $\mathfrak{G}'$ noch von „falschen Kanten" gebildet werden, mit denen wir die Seitenflächen von $\mathfrak{G}$ in Dreiecke zerschneiden.

Dann ist Eulers *Zusammenhangszahl* für $\mathfrak{G}$ auf zwei verschiedene Arten darstellbar. Entweder

$$Z = \tfrac{1}{2}\{\varepsilon'' - \varkappa'' + \delta''\}, \tag{34}$$

wenn ε'', $\varkappa''$, δ'' Ecken-, Kanten- und Dreieckszahlen von $\mathfrak{G}''$ sind oder

$$Z = \frac{1}{4\pi} \Sigma \omega. \tag{35}$$

Darin bedeuten die ω die *räumlichen Außenwinkel* an den Ecken von $\mathfrak{G}'$.

Diese räumlichen Außenwinkel können am einfachsten so erklärt werden. Wir betrachten eine Ecke $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{G}'$, eine Seitenfläche $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}'$, die $\mathfrak{p}$ als Ecke hat und die beiden Kanten von $\mathfrak{S}$, die von $\mathfrak{p}$ ausgehen.

Ihr Winkel sei τ mit $0 < \tau < 2\pi$, wobei $\tau < \pi$, wenn $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{p}$ konvex, sonst $\tau > \pi$. Dann wird der Außenwinkel ω von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{p}$ durch

$$\omega = 2\pi - \Sigma\tau \tag{36}$$

gemessen, worin die Summe über alle $\mathfrak{S}$ zu erstrecken ist, die $\mathfrak{p}$ als Ecke haben.

Es ist $\omega > 0$, wenn an der betrachteten Ecke $\mathfrak{p}$ unser Gebiet $\mathfrak{G}$ oder sein Außenraum konvex ist. Hingegen ist $\omega < 0$, wenn jede Ebene durch $\mathfrak{p}$ jede Nachbarschaft von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{G}$ zerschneidet. Mit diesen drei Fällen sind natürlich noch nicht alle Möglichkeiten für die Gestaltung einer Ecke erschöpft.

Die Übereinstimmung von (34) und (35) sieht man jetzt so ein. Summiert man (36) über alle Ecken von $\mathfrak{G}''$ — die „falschen" Ecken von $\mathfrak{G}''$ geben keinen Beitrag ($\omega = 0$) — so finden wir

$$\Sigma\omega = 2\pi\varepsilon'' - \pi\delta'', \tag{37}$$

da in jedem Dreieck von $\mathfrak{G}$ die Summe der τ gleich π ist. Nun ist

$$3\delta'' = 2\varkappa'' \tag{38}$$

und aus (37), (38) folgt die behauptete Gleichheit

$$\frac{1}{4\pi}\Sigma\omega = \frac{1}{2}(\varepsilon'' - \varkappa'' + \delta''). \tag{39}$$

Die Formel (34) lehrt, daß Z bei geeigneten Formänderungen von $\mathfrak{G}'$ erhalten bleibt, und die Formel (35), daß Z nur von $\mathfrak{G}'$ (also nur von $\mathfrak{G}$), nicht aber von der Art abhängt, wie $\mathfrak{G}'$ zu $\mathfrak{G}''$ zerschnitten wurde.

Nebenbei: Statt (34) kann man auch setzen

$$Z = \tfrac{1}{2}\{\varepsilon' - \varkappa' + \delta'\}, \tag{40}$$

wo sich die Anzahlen ε', $\varkappa'$, δ' nur auf die wahren Ecken, Kanten und Seitenflächen von $\mathfrak{G}'$ beziehen, wenn diese Seitenflächen einfach zusammenhängen. Sind p die „Geschlechter" der zusammenhängenden Teile von $\mathfrak{G}'$, so ist

$$Z = \Sigma(1 - p). \tag{41}$$

(40) zusammen mit (41) gibt Eulers Formel für Vielflache.

§ 5.

Hauptformel für zwei Gebiete im Raum.

Es sei nun $\mathfrak{G}_0$ ein festes Gebiet und $\mathfrak{G}_1$ ein zweites, das wir allen Schiebungen im $\mathfrak{E}_3$ unterwerfen. $\mathfrak{G}_1$ sei das von einem mit $\mathfrak{G}_1$ fest verbundenen Punkt beschriebene Raumelement. Dabei ist die Wahl dieses Punktes gleichgültig. $\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_1$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$, also wieder ein Gebiet im Sinne von § 4, das auch „fast immer vernünftig"

ausfällt. $Z(\mathfrak{G}_1 \mathfrak{S}_0)$ die Zusammenhangszahl dieses Durchschnitts. Wir berechnen das Integral

$$J = \int Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1. \tag{42}$$

Die Integration ist über alle Lagen von $\mathfrak{G}_1$ zu erstrecken, die aus einer unter ihnen durch alle Schiebungen im E_3 entstehen, und Z ist $= 0$, wenn der Durchschnitt $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$ leer ist.

Zur Berechnung von Z verwenden wir (35), und bemerken, daß die Ecken von $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$ aus vier Quellen fließen: 1. Ecken von $\mathfrak{G}_1'$ in $\mathfrak{G}_0$, 2. Ecken von $\mathfrak{G}_0'$ in $\mathfrak{G}_1$, 3. Ecken, die dadurch entstehen, daß eine Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0'$ eine Kante von $\mathfrak{G}_1'$ schneidet, 4. Ecken, die dadurch entstehen, daß umgekehrt eine Kante von $\mathfrak{G}_0'$ eine Seitenfläche von $\mathfrak{G}_1'$ schneidet. Daß eine Ecke von $\mathfrak{G}_i$ in einer Seitenfläche von $\mathfrak{G}_k$ zu liegen kommt, geschieht „fast nie" („Vernünftigkeit" von $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1$), das heißt, diese Lagen geben keinen Beitrag zum Integral J. Die unseren vier Quellen entsprechenden Summanden von J sollen mit J_1, J_2, J_3, J_4 bezeichnet werden.

Wie in § 1 ergibt sich sofort

$$J_1 = V_0 Z_1, \quad J_2 = Z_0 V_1, \tag{43}$$

wenn die $V_i > 0$ die Rauminhalte der $\mathfrak{G}_i$ und Z_i ihre Zusammenhangszahlen bedeuten.

Für J_3 finden wir folgenden Ausdruck

$$J_3 = \Sigma v_{\varrho\sigma} \omega_{\varrho\sigma}. \tag{44}$$

Darin ist $\omega_{\varrho\sigma}$ der räumliche Winkel der zu einer Ecke gehört, von deren drei Seitenflächen eine zur ϱ-ten Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0'$ gleichsinnig parallel ist und die beiden anderen zu den Seitenflächen von $\mathfrak{G}_1'$ durch die σ-te Kante von $\mathfrak{G}_1'$. $v_{\varrho\sigma} > 0$ ist der Inhalt eines Prismas, dessen Basis aus der ϱ-ten Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0'$ besteht und dessen Seitenkanten parallel und gleich lang zur σ-ten Kante von $\mathfrak{G}_1'$ ist. Wir führen für J_3 die Abkürzung

$$J_3 = 3H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) \tag{45}$$

ein. Dann ist ebenso

$$J_4 = 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0). \tag{46}$$

Somit erhalten wir die *Hauptformel*

$$\boxed{\int Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1)\, \dot{\mathfrak{G}}_1 = Z_0 V_1 + 3H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) + 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) + V_0 Z_1.} \tag{47}$$

Sind $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_1$ konvexe Gebiete, so ist $Z_0 = Z_1 = 1$ und $Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1) = 1$ oder 0. Für die Hauptformel ergibt sich wie in § 1 und nach Minkowski

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1 \neq 0} \dot{\mathfrak{G}}_1 = V_0 + 3V(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*) + 3V(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_0) + V_1. \tag{48}$$

Darin sind die V Minkowskis gemischte Rauminhalte und $\mathfrak{G}_1^*$ entsteht aus $\mathfrak{G}_1$ durch Spiegelung an einem Punkt. Aus (47), (48) folgt, wenn wir statt $\mathfrak{G}_1$ einführen $\lambda\,\mathfrak{G}_1$, im konvexen Falle

$$(49)\qquad \begin{cases} H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) = V(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*), \\ H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) = V(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_0). \end{cases}$$

Wir wollen aus (17) noch die Formel herleiten, die entsteht, wenn anstelle von $\mathfrak{G}_1$ sein Rand $\mathfrak{G}_1'$ tritt. Dabei stellen wir uns $\mathfrak{G}_1'$ als Grenzfall eines Gebietes, also einer dünnen Schale vor, die sich auf den Rand $\mathfrak{G}_1'$ von $\mathfrak{G}_1$ zusammenzieht. Dann wird $V_1' = 0$ und

$$(50)\qquad \begin{cases} H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1') = H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*), \\ H(\mathfrak{G}_1', \mathfrak{G}_1', \mathfrak{G}_0) = H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) - H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_0), \\ Z(\mathfrak{G}_1') = 2Z(\mathfrak{G}_1) = 2Z_1. \end{cases}$$

Somit erhalten wir das Ergebnis

$$(51)\qquad \begin{aligned} \int Z(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1')\,\dot{\mathfrak{G}}_1 &= 3H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) + 3H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*) \\ &\quad + 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) - 3H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_0) + 2V_0 Z(\mathfrak{G}_1). \end{aligned}$$

Darin bedeutet $\mathfrak{G}_1^*$ wieder ein Gebiet, das aus $\mathfrak{G}_1$ durch Spiegelung an einem Punkt entsteht, dessen Seitenflächen also gegensinnig parallel zu denen von $\mathfrak{G}_1$ sind.

Wir wollen (51) noch auf anderem Wege herleiten und dadurch eine geometrische Deutung für darin auftretende Glieder gewinnen. Die „Schale" $\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1'$ hat zweierlei Ecken. Erstens: Doppelt zählend die Ecken von $\mathfrak{G}_1'$ in $\mathfrak{G}_0$. Ihr Beitrag zu (51) ist $2V_0 Z(\mathfrak{G}_1)$. Zweitens: Die Ecken am Rande $\mathfrak{G}_0'\,\mathfrak{G}_1'$ unserer Schale. Diese sind wieder von zwei verschiedenen Unterarten: Erstens solche, die als Schnitt einer Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0'$ mit einer Kante von $\mathfrak{G}_1'$ entstehen, zweitens solche, an denen eine Kante von $\mathfrak{G}_0'$ eine Fläche von $\mathfrak{G}_1'$ schneidet.

An einer Stelle der ersten Unterart finden wir zu den Außenwinkeln den Beitrag

$$\begin{aligned} \omega &= \{2\pi - \tau_0 - \tau_1' - \tau_1''\} + \{2\pi - (2\pi - \tau_0) - \tau_1' - \tau_1''\} \\ &= 2(\pi - \tau_1' - \tau_1''). \end{aligned}$$

und an einer Stelle der zweiten Unterart

$$\begin{aligned} \omega &= \{2\pi - \tau_1 - \tau_0' - \tau_0''\} + \{2\pi - \tau_1 - (\pi - \tau_0') - (\pi - \tau_0'')\} \\ &= 2(\pi - \tau_1). \end{aligned}$$

Darin sind die τ_0 die Winkel zwischen den Kanten auf $\mathfrak{G}_0'$ und die τ_1 die zwischen den Kanten auf $\mathfrak{G}_1'$. Führen wir also die längs des Durchschnitts $\mathfrak{G}_0'\,\mathfrak{G}_1'$ genommene Summe ein.

$$2\pi K(\mathfrak{G}_0', \mathfrak{G}_1') = \Sigma(\pi - \tau_1' - \tau_1'') + \Sigma(\pi - \tau_1),$$

so finden wir durch Vergleich mit (51)

$$\int K(\mathfrak{G}_0' \mathfrak{G}_1') \dot{\mathfrak{G}}_1 = 3\{H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*)\}$$
$$= 3\{H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0) - H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_0)\}.$$

Wir wollen nun eine geometrische Deutung von $K(\mathfrak{G}_0', \mathfrak{G}_1')$ angeben! Wir denken uns die Seitenflächen von $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1'$, die an die Schnittlinie $\mathfrak{G}_0' \mathfrak{G}_1'$ anstoßen, in die Ebene abgewickelt. Dann erscheinen in dieser Ebene die Winkel φ_1. Somit ist $2\pi K(\mathfrak{G}_0', \mathfrak{G}_1')$ die Gesamtkrümmung der abgewickelten Randlinie. Beim Übergang zu krummen Flächen ergibt $2\pi K(\mathfrak{G}_0', \mathfrak{G}_1')$ das Integral der geodätischen Krümmung von $\mathfrak{G}_0' \mathfrak{G}_1'$ auf $\mathfrak{G}_1'$.

§ 6.

Drei Gebiete im Raum.

Wir gehen jetzt darauf aus, das Integral

$$J = \int Z(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2) \dot{\mathfrak{G}}_1 \dot{\mathfrak{G}}_2 \tag{52}$$

für drei Gebiete $\mathfrak{G}_i$ im $\mathfrak{E}_3$ auszuwerten. Die Ecken des Durchschnitts $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ können auf folgende Arten entstehen:

1. Eine Ecke von $\mathfrak{G}_i$ liegt in den beiden anderen Gebieten. Der entprechende Beitrag zu J ist

$$Z_0 V_1 V_2 + Z_1 V_2 V_0 + Z_2 V_0 V_1.$$

2. Eine Fläche von $\mathfrak{G}_i'$ schneidet eine Kante von $\mathfrak{G}_j'$ innerhalb $\mathfrak{G}_k$. Der zugehörige Beitrag ist

$$3\{V_0 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + V_1 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_0) + V_2 H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1)\}$$
$$+ 3\{V_0 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + V_1 H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_2) + V_2 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0)\}.$$

3. Drei Seitenflächen von $\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ schneiden sich. Zu J gibt das einen Zuschuß

$$6L(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) = \frac{1}{4\pi} \Sigma \omega_{\varrho\sigma\tau} w_{\varrho\sigma\tau}. \tag{53}$$

Darin hängt L symmetrisch von den $\mathfrak{G}_i$ ab. $\omega_{\varrho\sigma\tau}$ bedeutet den Außenwinkel einer dreiseitigen Ecke, deren drei Seitenflächen gleichsinnig parallel laufen zur ϱ-ten Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0$, zur σ-ten Seitenfläche von $\mathfrak{G}_1$ und zur τ-ten von $\mathfrak{G}_2$. $w_{\varrho\sigma\tau}$ kann man so erklären. Es sei $\mathfrak{e}_\varrho$ ein Einheitsvektor normal zur ϱ-ten Seitenfläche von $\mathfrak{G}_0$ und f_ϱ^0 deren Flächeninhalt mit $f_\varrho^0 > 0$. Dann ist $w_{\varrho\sigma\tau}$ gleich dem Produkt

$$w_{\varrho\sigma\tau} = f_\varrho^0 f_\sigma^1 f_\tau^2 \cdot |\text{Determinante } (\mathfrak{e}_\varrho, \mathfrak{e}_\sigma, \mathfrak{e}_\tau)|. \tag{54}$$

Somit ergibt sich die gewünschte Hauptformel für drei Gebiete in der Gestalt

$$\begin{aligned}(55)\quad &\int Z(\mathfrak{G}_0\,\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2)\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2\\ &= \{Z_0 V_1 V_2 + Z_1 V_2 V_0 + Z_2 V_0 V_1\} + 6\,L(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)\\ &\quad + 3\left\{\begin{array}{l} V_0 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + V_1 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + V_2 H(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1)\\ + V_0 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + V_1 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + V_2 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_0)\end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Um der geometrischen Deutung des Gliedes L etwas näher zu kommen, betrachten wir wieder den Grenzfall, daß anstelle der $\mathfrak{G}_i$ die $\mathfrak{G}_i'$ treten, die wir uns als dünne Schalen vorstellen. Dann werden alle $V_i = 0$ und $Z(\mathfrak{G}_0'\,\mathfrak{G}_2'\,\mathfrak{G}_2')$ wird gleich der Anzahl n der Schnittpunkte der drei Ränder. Fälle, in denen die $\mathfrak{G}_i'$ unendlich viele Punkte gemein haben, geben zu unserem Integral keinen Beitrag. Wir finden

$$(56)\qquad \int n(\mathfrak{G}_0'\,\mathfrak{G}_1'\,\mathfrak{G}_2')\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2 = 12\left\{\begin{array}{l} L(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + L(\mathfrak{G}_0^*, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)\\ + L(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2) + L(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^*)\end{array}\right\}.$$

Hierin soll der Ausdruck (53) für L eingeführt werden. Der Ausdruck $w_{\varrho\sigma\tau}$ ändert sich nicht, wenn ein $\mathfrak{G}_i$ durch $\mathfrak{G}_i^*$ ersetzt wird. Wohl aber ändert sich $\omega_{\varrho\sigma\tau}$. Ersetzen wir z. B. $\mathfrak{G}_0$ durch $\mathfrak{G}_0^*$ und nennen wir die Flächenwinkel der räumlichen Ecke τ_0, τ_1, τ_2, so wird

$$(57)\qquad \left\{\begin{array}{l}\tau_0^* = \tau_0,\\ \tau_1^* = \pi - \tau_1,\\ \tau_2^* = \pi - \tau_2.\end{array}\right.$$

Führen wir also

$$(58)\qquad \omega^* = 2\pi - \Sigma\tau^*, \quad \omega = 2\pi - \Sigma\tau$$

ein, so ist

$$(59)\qquad \omega^* = 2\pi - \omega - 2\tau_0.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int n\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2 &= 2\,\Sigma\left\{\begin{array}{l}+2\pi - \omega - 2\tau_0\\ +2\pi - \omega - 2\tau_1\\ +2\pi - \omega - 2\tau_2\end{array}\right\}\cdot w\\ &= \Sigma w_{\varrho\sigma\tau}.\end{aligned}$$

Damit ist also gezeigt

$$(60)\qquad \boxed{\int n(\mathfrak{G}_0'\,\mathfrak{G}_1'\,\mathfrak{G}_2')\,\dot{\mathfrak{G}}_1\,\dot{\mathfrak{G}}_2 = \Sigma w_{\varrho\sigma\tau}.}$$

(Eingegangen am 24. Oktober 1936.)

Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese.

Di

E. Bompiani (a Roma) e di E. Bortolotti (a Firenze).

Parte I

di E. Bompiani.

1. — In un lavoro recente G. Bol[1]) ha dato un esempio interessante di 5-tessuto di curve piane di massimo rango *non* rappresentabile topologicamente su cinque sistemi di rette.

Con l'elegante procedimento ideato da W. Blaschke detto tessuto dà luogo ad una superficie di S_5 dotata di cinque sistemi ∞^1 di linee tali che i piani tangenti alla superficie nei punti di ciascuna di esse stanno in un S_4.

La ricerca di superficie con sistemi ∞^1 di linee aventi la proprietà ora detta si collega strettamente con precedenti ricerche di C. Segre e mie; ho creduto opportuno pertanto di esaminare la questione dal punto di vista della geometria proiettiva differenziale. Ciò mi ha dato occasione di stabilire (nella Parte I) una proprietà caratteristica della superficie di Veronese e d'indicare una proprietà delle superficie in esame dalla quale risulta la costruzione di quelle che posseggono tre sistemi ∞^1 di linee del tipo voluto.

In seguito il Bortolotti, utilizzando elementi già introdotti nella Parte I, è riuscito a ricavare un'altra caratterizzazione della superficie di Veronese: che qui espone nella Parte II.

Nella Parte III, giovandomi del „coniugio di seconda specie" e di un'altra legge di associazione di E_2 ad E_1 superficiali, qui introdotta per le superficie di S_5, ho dato ancora una proprietà caratteristica della superficie di Veronese e qualche altro risultato concernente le superficie di S_5 in generale[2]).

---

[1]) T 64: *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene;* Abhandlungen a. d. Mathem. Sem. d. Hamb. Univ. 11 (1936), S. 387—393. Per l'impostazione del problema e per la sua rappresentazione iperspaziale cfr. W. Blaschke, T 50: *Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse;* Ibidem 9 (1933), S. 313—317.

[2]) Alcune aggiunte alla III Parte, contrassegnate con *, sono dovute al Bortolotti.

Rimane tuttavia aperta la ricerca delle superficie con quattro e cinque sistemi di linee appartenenti ad S_4 che siano tangenti, lungo esse, in ciascun punto alla superficie; e in particolare la questione di sapere se la superficie del Bol sia l'unica con cinque tali sistemi.

2. — Sia data la superficie σ di uno spazio proiettivo a cinque dimensioni S_5 descritta dal punto $x(u,v)$ di coordinate proiettive omogenee $x^i(u,v)$, $i = 1, \ldots, 6$. Il piano tangente in x è individuato dai punti x, $x_1 = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_2 = \frac{\partial x}{\partial v}$. Lo spazio osculatore (o 2-osculatore) $S(2)$ o $S(2,0)$[3]) è quello contenente i punti

$$x,\ x_r,\ x_{rs} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^r\, \partial u^s} \quad (p,q,r,s,t = 1,2;\ u^1 = u, u^2 = v).$$

Se questi sono indipendenti, $S(2) \equiv S_5$, si ha il *caso normale*. *Supporremo sempre che sia* $S(2) \equiv S_5$.

Per essere σ in S_5 i punti derivati terzi $x_{rst}\,(r,s,t = 1,2)$ sono combinazioni lineari dei precedenti, cioè *tutte* le x^i soddisfano alle *stesse* equazioni differenziali

$$x_{rst} = C^{pq}_{rst}\, x_{pq} + C^{p}_{rst}\, x_p + C_{rst}\, x \qquad (p,q = 1,2) \tag{2.1}$$

ove le $C(u,v)$ *non* dipendono da i e si sono soppressi i segni di sommatoria. (S'intende che sia $C^{12}_{rst} = C^{21}_{rst}$).

3. — Riferendoci esclusivamente al *caso normale* consideriamo un elemento del 1° ordine E_1 (cioè punto e tangente) di curva di σ.

Relativamente ad E_1 possono definirsi:

1. un $S_3 \equiv S(2,1)$[3]), contenente i piani osculatori alle curve di σ alle quali appartiene E_1; al variare di E_1 pel punto x fissato questi S_3 descrivono un cono quadrico, cono di Del Pezzo[4]), avente per vertice il piano tangente.

2. un S_4 *bitangente* secondo E_1 a σ contenente i piani tangenti a σ in due punti infinitamente vicini di E_1; questi S_4 sono tangenti, lungo gli S_3 precedenti, al cono di Del Pezzo.

Lo S_4 bitangente secondo $E_1\,(u,v;\ du/dv)$ è individuato dai punti

$$x, x_1, x_2, x_{11}\,du + x_{12}\,dv,\ x_{12}\,du + x_{22}\,dv. \tag{3.1}$$

[3]) Adotto il simbolo $S(r,\nu)$, o anche $S(r)$ per $\nu = 0$, per lo spazio lineare minimo contenente gli S_r osculatori alle curve di una varietà aventi in comune un elemento d'ordine ν, E_ν. Cfr. E. Bompiani: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Atti R. Accad. di Torino, vol. 48 (1912—1913), S. 393—410.

[4]) P. Del Pezzo: *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni;* Rendiconti R. Accad. delle Scienze di Napoli, anno XXV, 1886, S. 176—180. Cfr. anche C. Segre: *Su una classe di superficie degli iperspazi legata colle equazioni alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti R. Accad. Torino, vol 42 (1906—1907), S. 1047—1079.

4. — In ogni punto x di σ esistono[5]) cinque S_4 tangenti che segano σ in curve aventi in x un *tacnodo*; le tangenti tacnodali sono dette *tangenti principali* e *curve principali* quelle da esse inviluppate.

Alle stesse tangenti si perviene[6]) cercando per quali E_1 in x si possono condurre curve i cui S_3 osculatori in x coincidono con lo $S_3 \equiv S(2,1)$ definito da E_1.

Gli elementi del 2° ordine (∞^2) che così si determinano *non* sono in generale quelli appartenenti alle curve principali; anzi non possono in generale ordinarsi come gli E_2 di ∞^1 curve.

L'equazione differenziale delle curve principali è

$$(4.1)\quad |x, x_1, x_2, x_{11}\,du + x_{12}\,dv, x_{12}\,du + x_{22}\,dv, x_{rst}\,du^r\,du^s\,du^t| = 0$$

ove a sinistra è il determinante costruito con le coordinate omogenee dei punti indicati. Sostituendo alle x_{rst} le loro espressioni (2.1) e poiché per l'ipotesi $S(2) \equiv S_5$ è

$$(4.2)\qquad \Delta = |x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}| \neq 0$$

si ha l'equazione differenziale delle linee principali in funzione delle $C^{\cdots}_{\cdots}$ (la (12.3) indicata più innanzi, nella Parte II).

5. — Un'altra proprietà delle tangenti principali, che le collega alla questione topologica indicata in principio, e che ci condurrà ad una nuova proprietà caratteristica della superficie di Veronese, è la seguente:

Gli S_4 bitangenti a σ secondo gli E_1 principali, e soltanto questi, sono anche tri-tangenti (cioè contengono i piani tangenti alla superficie in tre punti infinitamente vicini di un E_2 per un E_1 principale).

Infatti affinché lo S_4 bitangente definito dai punti (3.1) contenga anche il piano tangente in $x + dx + \frac{1}{2}d^2x$ occorre e basta ch'esso contenga i punti

$$x_{1rs}\,du^r\,du^s + x_{1r}\,d^2u^r, \quad x_{2rs}\,du^r\,du^s + x_{2r}\,d^2u^r$$

cioè che siano soddisfatte le equazioni

$$(5.1)\quad |x, x_1, x_2, x_{1r}\,du^r, x_{2r}\,du^r, x_{1rs}\,du^r\,du^s| = -\Delta\,dv\,(dv\,d^2u - du\,d^2v),$$

$$(5.2)\quad |x, x_1, x_2, x_{1r}\,du^r, x_{2r}\,du^r, x_{2rs}\,du^r\,du^s| = \Delta\,du\,(dv\,d^2u - du\,d^2v).$$

Queste sono incompatibili per un E_1 generico; la loro compatibilità in $dv\,d^2u - du\,d^2v$ impone che E_1 (du/dv) sia scelto in modo da soddisfare alla (4.1); cioè soltanto gli E_1 principali posseggono la proprietà voluta.

6. — È noto che la superficie di Veronese, F_2^4 di S_5, può caratterizzarsi con una delle due seguenti proprietà differenziali:

---

[5]) C. Segre: *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi;* Rendiconti Circ. Matem. di Palermo, t. XXX, 1910, S. 87—121: in fine del n. 24.

[6]) E. Bompiani: *Sopra alcune estensioni* etc. (già cit.), in fine del n. 7.

1. essa è l'unica superficie di S_5 con $S(2) \equiv S_5$ le cui tangenti principali in ogni punto risultano indeterminate (cioè ogni tangente è principale)[7]);

2. essa è l'unica superficie di S_n $(n \geqq 5)$ con $S(2) \equiv S_5$ che possegga ∞^2 *quasi-asintotiche* γ_{13}, cioè curve tali che lo S_3 osculatore ad una di esse in un punto contiene il piano tangente alla superficie nel punto[8]).

È evidente che la superficie di Veronese ha soltanto ∞^2 S_4 bitangenti (e non ∞^3 come una superficie generica) essendo lo stesso lo S_4 bitangente per tutti gli E_1 di una sua conica. Viceversa, se una superficie σ ha soltanto ∞^2 S_4 bitangenti, per ogni punto ne devono passare ∞^1 e ciascuno deve essere bitangente a σ secondo tutti gli E_1 che ha in comune con essa. Per la proprietà rilevata al n. 5 delle tangenti principali ogni tangente è principale e, per la proprietà caratteristica rilevata in 1., σ è la superficie di Veronese.

Le uniche superficie, con $S(2) \equiv S_5$, *che ammettano soltanto* ∞^2 S_4 *bitangenti sono le superficie di Veronese.*

7. — La proprietà delle tangenti principali rilevata al n. 5 associa ad ogni E_1 principale un elemento del 2^0 ordine E_2 dato indifferentemente dalla (5.1) o dalla (5.2). Però *gli* ∞^2 E_2 *così ottenuti non si possono generalmente ordinare come gli* ∞^2 E_2 *di* ∞^1 *curve di* σ.

Infatti se ciò fosse possibile quegli E_2 dovrebbero appartenere alle curve principali (alle quali appartengono gli E_1); ma ciò in generale non accade perché, fissato un E_1 principale, l'espressione di $dv\,d^2u - du\,d^2v$ ricavata da (5.1) o da (5.2) non coincide con quella che si ricaverebbe per derivazione dalla (4.1).

Ciò posto, risulta chiaro il procedimento da seguire per *trovare le superficie che posseggono uno o più sistemi di* ∞^1 *linee lungo ciascuna delle quali lo spazio* S_4 *bitangente secondo i suoi* E_1 *è fisso.*

Bisogna infatti esprimere che $dv\,d^2u - du\,d^2v$ ricavato dalla (5.1) o dalla (5.2), per un E_1 principale, coincide con l'espressione di

$$dv\,d^2u - du\,d^2v$$

ottenuta derivando la (4.1). Ciò facendo si ottiene una equazione algebrica in du/dv (i cui coefficienti si esprimono per le $C^{\cdots}_{\cdots}$): se questa ha

---

[7]) C. Segre: *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, Rendiconti A. Accad. Lincei (5) vol. 30, 1° sem., 1921, S. 200—203 e S. 227—231.

[8]) E. Bompiani: *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine.* Rendic. R. Accad. Lincei, (5) vol. 30, 2° sem., 1921, S. 248—251.

uno o più fattori comuni con la (4. 1) la superficie possiede uno o più sistemi di linee aventi la proprietà voluta.

L'interesse dell'esempio portato dal Bol sta in ciò che esso assicura l'esistenza di una superficie sulla quale *tutti* i sistemi di linee principali hanno la proprietà voluta (senza ch'esse divengano indeterminate come sulla superficie di Veronese).

L'effettiva elaborazione delle condizioni per l'esistenza di uno o più sistemi di linee con la proprietà richiesta, condizioni che si sono accennate più sopra, e delle condizioni d'integrabilità delle (2. 1), non è piacevole.

Alcuni risultati generali sulle linee indicate possono tuttavia ottenersi senza condurre a termine il procedimento indicato.

8. — Supposto che σ possegga un sistema ∞^1 di linee tali che gli E_1 di una (qualsiasi) di esse dian luogo allo stesso S_4 bitangente, assumiamolo come quello delle curve $u\,(dv = 0)$. Poiché esse debbono essere linee principali deve esser soddisfatta la (4. 1), quindi

$$x_{111} = [x_{11}, x_{12}, x_1, x_2, x] \tag{8. 1}$$

ove con la notazione a 2^0 membro si è indicata una combinazione lineare omogenea di $x_{11}, \ldots, x$ i cui coefficienti non indichiamo esplicitamente.

Dev'esser poi soddisfatta la (5. 2) quindi

$$x_{112} = [x_{11}, x_{12}, x_1, x_2, x]. \tag{8. 2}$$

Le equazioni (8. 1) ed (8. 2) sono, nella scelta fatta delle linee $dv = 0$, due delle equazioni (2. 1); bisogna discuterne le condizioni d'integrabilità.

Occorre distinguere due casi.

I. Nella (8. 1) manca il termine in x_{12} $(C^{12}_{111} = 0)$.

Il confronto delle due espressioni di x_{1112} che si ricavano dalle (8. 1) ed (8. 2) porta che nella (8. 1) deve mancare anche il termine in x_2, altrimenti si avrebbe x_{22} espressa linearmente per $x_{11}, x_{12}, x_1, x_2, x$ il che contraddice l'ipotesi $S\,(2) \equiv S_5$; quindi la (8. 1) si riscrive

$$x_{111} = [x_{11}, x_1, x] \tag{8. 1'}$$

e questa mostra che *le linee principali* $u\,(dv = 0)$ *sono piane.*

Se si ritorna all'equazione (4. 1) delle linee principali si vede che in questo caso (e non nell'opposto in cui (8. 1) contenga effettivamente il termine in x_{12}) il primo membro della (4. 1) è divisibile per $(dv)^2$, quindi il sistema di linee principali (piane) assorbe due dei cinque sistemi (è doppio); dunque non vi potranno essere più di due sistemi di linee piane con la proprietà voluta senza ricadere sulla superficie di Veronese. La (8. 2) esprime poi che due piani infinitamente vicini stanno in S_4 (che è appunto bitangente lungo la linea piana).

II. Nella (8.1) comparisce il termine in x_{12} ($C^{12}_{111} \neq 0$).

Derivando la (8.1) e la (8.2) quante volte si vuole rispetto ad u si ha che i punti $\frac{\partial^k x}{(\partial u)^k}$ e $\frac{\partial^{h+1} x}{\partial v (\partial u)^h}$ per $k \geqq 3$, $h \geqq 2$ stanno tutti nello $S_4(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12})$; cioè tutta una curva u e i piani tangenti nei suoi punti a σ stanno in S_4.

In particolare stanno in S_4 i punti

$$x,\ x_1,\ x_{11},\ x_2,\ x_{12},\ x_{111},\ x_{1111}.$$

Se si potesse individuare lo S_4 con i primi tre e con gli ultimi due punti si potrebbe scrivere

$$x_2 = [x_{1111}, x_{111}, x_{11}, x_1, x], \tag{8.3}$$

$$x_{12} = [x_{1111}, x_{111}, x_{11}, x_1, x]; \tag{8.4}$$

queste equazioni risulterebbero equivalenti alla (8.1) e alla sua derivata rispetto ad u. Ma se ciò fosse, derivando la (8.3) rispètto a v si ricaverebbe l'appartenenza di x_{22} allo stesso S_4 cioè, contro l'ipotesi, $S(2) \equiv S_4$. Ciò prova che i punti supposti indipendenti non lo sono, cioè che vale un'equazione

$$x_{1111} = [x_{111}, x_{11}, x_1, x] \tag{8.5}$$

la quale esprime che le linee u stanno in S_3. La (8.2) e la sua derivata rispetto ad u portano di conseguenza che due S_3 infinitamente vicini stanno in un S_4 (e si tagliano in un S_2).

Diremo che gli ∞^1 S_3 sono quelli di una *sviluppabile* (includendo non solo gli S_3 osculatori ad una curva, ma anche i casi degeneri degli S_3 osculatori ad un cono di prima specie, passanti tutti per il punto vertice; degli S_3 tangenti ad un cono di 2^a specie, passanti per la retta vertice; e degli S_3 generatori di un cono di 3^a specie, passanti per il piano vertice).

Riassumiamo la discussione nel seguente teorema:

Sia data una superficie σ con $S(2) \equiv S_5$ che possegga ∞^1 linee tali che gli S_4 bitangenti alla superficie nei punti di una qualsiasi di esse coincidano.

Le linee in parola costituiscono necessariamente un sistema di linee principali, e possono darsi due casi:

I. *esse sono piane e in tal caso assorbono due sistemi di linee principali; se per ogni punto di σ ne passano (almeno) tre allora (ve ne passano infinite e) la superficie è quella di Veronese.*

II. *esse appartengono agli S_3 di una sviluppabile.*

Si noti che la seconda eventualità considerata in I. dà una nuova proprietà caratteristica della superficie di Veronese.

9. — Il teorema precedente dà la costruzione delle superficie con tre sistemi ∞^1 di linee aventi la proprietà voluta. Si considerino gli S_3 di tre sviluppabili generiche.

Il luogo dei punti d'intersezione degli S_3 dei tre sistemi è una superficie avente la proprietà voluta: su ciascun S_3 gli ∞^1 S_3 di ciascuna delle altre due sviluppabili segano una rigata e la curva comune alle due rigate è la curva principale della superficie appartenente allo S_3.

Per risolvere completamente il problema posto al n. 7 bisognerebbe assegnare la costruzione delle superficie con quattro e con cinque sistemi di curve principali con S_4 bitangente fisso lungo ciascuna di esse [9]).

10. — Verifichiamo che, d'accordo col teorema del n. 8, la superficie del Bol possiede 5 sistemi di curve negli S_3 di 5 sviluppabili.

Le equazioni parametriche della superficie del Bol sono:

$$(10.1)\qquad \begin{cases} x^1 = \log t^1 = \log u - \log v \\ x^2 = \log t^2 = \log(u + v - 1) - \log v, \\ x^3 = \log t^3 = \log(u - v) - \log(1 - v), \\ x^4 = \log t^4 = \log(1 - v) - \log u, \\ x^5 = \log t^5 = \log u(1 - u) - \log v(1 - v), \\ x^6 = -1; \end{cases}$$

le curve dei cinque sistemi sono le $t^i =$ costante. Per es. la curva $t^1 = k$ appartiene allo S_3 di equazioni:

$$(10.2)\qquad \begin{cases} x^1 + x^6 \log k = 0, \\ x^3 + x^4 + x^6 \log\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0; \end{cases}$$

al variare di k questi S_3 passano per il piano

$$(10.3)\qquad x^1 = x^3 + x^4 = x^6 = 0.$$

Analogamente per gli altri sistemi; sicché le cinque sviluppabili sono coni di 3ª specie, aventi ciascuno per vertice un piano: ed i 5 piani stanno tutti in uno S_4 ($x^6 = 0$).

Sarebbe già molto interessante stabilire se la superficie del Bol sia *l'unica* di cui tutti i cinque sistemi di linee principali siano costituiti da linee con S_4 bitangente fisso.

Parte II

di E. Bortolotti.

11. — Le nuove caratterizzazioni che il Bompiani ha dato, nella Parte I, della superficie di Veronese utilizzano la considerazione degli elementi E_2 (su una superficie di S_5, con $S(2) \equiv S_5$) pei quali l' S_4 bi-

[9]) La costruzione delle superficie con *uno* o *due* tali sistemi di curve principali risulta, da quanto precede, senz'altro evidente.

tangente, lungo i rispettivi E_1, è anche tritangente. (In breve: „E_2 ad S_4 tritangente".) Nel 1921 il Bompiani aveva caratterizzato la superficie di Veronese utilizzando invece gli E_2 contenuti in E_3 ad S_3 osculatore tangente alla superficie [10]) cioè gli E_2 di curve che hanno *almeno localmente*, nel punto x considerato, carattere di curve *quasi-asintotiche* γ_{13}. (Brevemente: „E_2 di γ_{13}".) Esporrò ora una caratterizzazione della superficie di Veronese che utilizza *entrambi* gli E_2 ora ricordati.

12. — Anzitutto dimostro che:

Se, per una superficie di S_5, con gli $S(2)$ 5-dimensionali, gli E_2 di γ_{13} coincidono con gli E_2 ad S_4 tritangente, la superficie ha soltanto due o un solo sistema di linee principali, oppure è a linee principali indeterminate.

Infatti: i primi E_2 sono quelli pei quali i punti

$$(12.1) \qquad x,\ x_1,\ x_2,\ x_{rs}\,du^r\,du^s,\ x_{rst}\,du^r\,du^s\,du^t + 3\,x_{rs}\,d^2u^r\,du^s$$

stanno in S_3. Tale condizione dà

$$(12.2) \quad \begin{cases} d^2u\,dv - d^2v\,du = \dfrac{2}{3}\dfrac{(C^{12}_{rst}\,du - C^{11}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t}{du} \\ d^2u\,dv - d^2v\,du = \dfrac{2}{3}\dfrac{(C^{22}_{rst}\,du - C^{12}_{rst}\,dv)\,du\ du^s\,du^t}{dv} \end{cases}$$

e la condizione di compatibilità

$$(12.3) \qquad (C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,du^t = 0$$

è l'equazione differenziale delle linee principali.

Gli altri E_2 sono quelli pei quali valgono le (5.2), (5.1) della Parte I, cioè

$$(12.4) \quad \begin{cases} d^3u\,dv - d^2v\,du = \dfrac{(C^{22}_{rs2}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs2}\,du\,dv + C^{11}_{rs2}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{du} \\ d^2u\,dv - d^2v\,du = -\dfrac{(C^{22}_{rs1}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs1}\,du\,dv + C^{11}_{rs1}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{dv} \end{cases}$$

e la condizione di compatibilità è la medesima. Ma se, di più, vogliamo che gli E_2 soddisfacenti alle (12.2), (12.4) siano *gli stessi*, per ogni valore di du/dv soddisfacente alla (12.3) dovrà anche aversi:

$$(12.5) \quad \frac{2}{3}(C^{12}_{rst}\,du - C^{11}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t = (C^{22}_{rs2}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs2}\,du\,dv + C^{11}_{rs2}\,dv^2)\,du^r\,du^s$$

$$(12.6) \quad \frac{2}{3}(C^{22}_{rst}\,du - C^{12}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t = (-C^{22}_{rs1}\,du^2 + 2\,C^{12}_{rs1}\,du\,dv - C^{11}_{rs1}\,dv^2)\,du^r\,du^s.$$

Naturalmente ogni valore di du/dv soddisfacente alle (12.3), (12.5), tranne al più $du/dv = 0$, soddisfa anche alla (12.6); ogni valore di

[10]) E. Bompiani, *Proprietà differenziale caratteristica* ... già cit. nella nota [8]), I; ed I, n. 6. (Con I cito la I Parte del presente lavoro).

dv/du soddisfacente alle (12.3), (12.6), tranne al più $dv/du = 0$, soddisfa anche alla (12.5). Ma è facile precisare la relazione fra le tre equazioni: sviluppando la (12.3) abbiamo

$$A\,du^5 + B\,du^4\,dv + C\,du^3\,dv^2 + D\,du^2\,dv^3 + E\,du\,dv^4 + F\,dv^5 = 0, \tag{12.7}$$

ove abbiamo posto

$$\begin{cases} A = C^{22}_{111},\ B = 3\,C^{22}_{112} - 2\,C^{12}_{111},\ C = C^{11}_{111} - 6\,C^{12}_{112} + 3\,C^{22}_{122}, \\ F = C^{11}_{222},\ E = 3\,C^{11}_{122} - 2\,C^{12}_{222},\ D = C^{22}_{222} - 6\,C^{21}_{122} + 3\,C^{11}_{112}. \end{cases} \tag{12.8}$$

Ebbene: sviluppando le (12.5), (12.6) otteniamo rispettivamente

$$B\,du^4 + 2\,C\,du^3\,dv + 3\,D\,du^2\,dv^2 + 4\,E\,du\,dv^3 + 5\,F\,dv^4 = 0, \tag{12.9}$$

$$5\,A\,du^4 + 4\,B\,du^3\,dv + 3\,C\,du^2\,dv^2 + 2\,D\,du\,dv^3 + E\,dv^4 = 0, \tag{12.10}$$

e vediamo che le (12.9), (12.10) non sono che *le equazioni derivate* della (12.3) o (12.7) rispetto a dv, du.

Ciò posto: noi vogliamo che le (12.9), (12.10), riguardate quali equazioni algebriche in du/dv, ammettano tutte le radici della (12.7): condizione per questo è evidentemente che questa ultima equazione *abbia o una radice tripla e una doppia, o una radice quintupla, ovvero sia identicamente soddisfatta.* Nel primo caso sia la (12.9) che la (12.10) ammetteranno le medesime radici quali radici doppia e (rispettivamente) semplice; nel secondo caso avranno la stessa radice come radice quadrupla; nel terzo caso infine saranno esse stesse identicamente verificate. Ciò prova quanto volevamo.

13. — Come conseguenza ormai immediata ricaviamo la caratterizzazione della superficie di Veronese, che avevamo in vista:

Le superficie di Veronese, fra le superficie di S_5, *con* $S(2) \equiv S_5$, *sono caratterizzate dal possedere almeno tre sistemi* ∞^1 *distinti di linee principali, e dalla coincidenza, lungo esse, degli elementi* E_2 *di curve ad* S_3 *osculatore tangente alla superficie con gli* E_2 *pei quali l'* S_4 *bitangente lungo i rispettivi* E_1 *è anche tritangente.*

14. — Conviene qui rapidamente riesporre la dimostrazione ora data, in forma più compatta, con le notazioni dell' *algebra tensoriale*: ciò dà occasione a un'osservazione ulteriore che non appare priva d'interesse. Le (12.4), (12.2) possono scriversi così:

$$\varepsilon_{pq}\,d^2u^p\,du^q\,du^r = \varepsilon^{rs}\,\varepsilon_{pq}\,\varepsilon_{tw}\,C^{pt}_{lms}\,du^l\,du^m\,du^q\,du^w, \tag{14.1}$$

$$\varepsilon_{pq}\,d^2u^p\,du^q\,du^r = -\tfrac{2}{3}\,\varepsilon_{pq}\,C^{rp}_{lmw}\,du^l\,du^m\,du^w\,du^q \tag{14.2}$$

$$(l,\ m,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ w = 1,\ 2)$$

ove il tensore emisimmetrico ε_{pq} puo' intendersi ricavato (al modo di Ricci) da una *qualunque* forma quadratica differenziale: ciò non ha importanza. Rammentiamo che ad ogni modo

$$\varepsilon^{rs}\,\varepsilon_{tw} = \delta^r_t\,\delta^s_w - \delta^r_w\,\delta^s_t. \tag{14.3}$$

L'equazione differenziale delle linee principali, (12.3) o (12.7), si scrive anche:

$$\varepsilon_{pq}\,\varepsilon_{ts}\,C^{pt}_{lmw}\,du^l\,du^m\,du^w\,du^q\,du^s = 0. \tag{14.4}$$

Se per ogni E_1 principale le (14.1), (14.2) sono compatibili, ciò vuol dire che in forza della (14.4) i secondi membri delle (14.1), (14.2) sono eguali: per le (14.3) ciò dà

$$5\,\varepsilon_{pq}\,C^{pr}_{lmw}\,du^l\,du^m\,du^w\,du^q = 3\,\varepsilon_{pq}\,C^{pw}_{lmw}\,du^l\,du^m\,du^q\,du^r. \tag{14.5}$$

Orbene: direttamente si verifica (ancora facendo uso delle (14.3)) che *le stesse* (14.5) *risultano anche dalla* (14.4) *per derivazione rispetto alla generica* du^t.

Inoltre: in forza delle (14.5) (che portano quale conseguenza anche la (14.4)) si puo' dare alle (14.1) o anche alle (14.2) la forma

$$\varepsilon_{pq}\,(d^2u^p + \tfrac{2}{5}\,C^{pw}_{lmw}\,du^l\,du^m)\,du^q = 0 \tag{14.6}$$

e queste sono *le equazioni differenziali delle geodetiche di una connessione affine per la superficie* σ: di parametri $\frac{2}{5}\,C^{pw}_{lmw}$.

Dunque: ritroviamo che è necessario e sufficiente, perché gli E_2 di curve ad S_3 osculatore tangente alla superficie si identifichino con gli E_2 pei quali l' S_4 bitangente lungo i rispettivi E_1 è tritangente, che *ciascun sistema di linee principali sia almeno doppio*, oppure le linee principali siano *indeterminate*; e di più si vede che *quegli* E_2 *allora appartengono alle geodetiche, della connessione affine di parametri* $\frac{2}{5}\,C^{pw}_{lmw}$, *tangenti alle linee principali*. In particolare: *quando le linee principali siano indeterminate, le* (14.6) *rappresentano le* ∞^2 *coniche della superficie di Veronese, quali geodetiche di una connessione affine.*

Parte III

di E. Bompiani.

15. — Approfitto della opportunità per aggiungere qualche altra proprietà delle superficie di S_5 in generale, e in particolare della superficie di Veronese.

La proprietà caratteristica degli E_1 principali (o delle linee principali) per cui gli S_4 bitangenti secondo tali E_1 sono tritangenti alla superficie è molto vicina, ma non coincidente, ad un'altra proprietà, caratteristica anch'essa, degli stessi E_1.

Per enunciarla conviene ricordare la condizione di *coniugio di* 2^a *specie* per linee di una superficie σ di S_5[11]).

Si consideri una rigata circoscritta a σ: se essa *ha indice di sviluppabilità due* (cioè se tre generatrici infinitamente vicine stanno in un S_4 invece che in S_5) chiamo *coniugati di* 2^a *specie* in un punto l' E_1 di generatrice per esso e l' E_2 della curva di contatto della rigata con σ.

Se δu^r sono relativi alla direzione della generatrice e du^r, d^2u^r all' E_2 di contatto la condizione precedente si traduce in

$$(15.1) \qquad |S_2\ x_{1r}\,du^r\ x_{2r}\,du^r\ x_{rst}\,du^r\,du^s\,\delta u^t + x_{rt}\,d^2u^r\,\delta u^t| = 0$$

ove S_2 sostituisce nel determinante le colonne x^i, x_1^i, x_2^i.

L'equazione precedente si scrive anche

$$(15.2) \qquad \Delta\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)\,(du\,\delta v - dv\,\delta u) = -|S_2\ x_{1r}\,du^r\ x_{2r}\,du^r\ x_{rst}\,du^r\,du^s\,\delta u^t|$$

da cui segue subito che se $du\,dv = \delta u\,\delta v$ dev'essere

$$|S_2\ x_{1r}\,du^r\ x_{2r}\,du^r\ x_{rst}\,du^r\,du^s\,du^t| = 0$$

cioè: *le linee autoconiugate di* 2^a *specie sono le linee principali.*

Ad ogni sistema ∞^1 di linee $\delta u/\delta v$ su σ la (15.2) associa un sistema ∞^2 di linee coniugate di 2^a specie.

Viceversa: un sistema assegnato di $E_2(d)$ (intendiamo: di E_2 definiti dalle du^r, d^2u^r), *appartenenti o no ad* ∞^1 *linee*, per la (15.2) dà luogo generalmente a un sistema ∞^1 di linee $\delta u/\delta v$, cioè, a un sistema di $E_1(\delta)$, a cui le linee supposte, o gli E_2 supposti, sono coniugati di 2^a specie.

* *Ma vi è un caso d'eccezione: se gli* E_2 *supposti sono quelli ad* S_4 *tritangente, e allora soltanto, gli* $E_1(\delta)$ *corrispondenti non sono determinati.* Infatti la (15.2) sviluppata si scrive

$$(15.3) \qquad \frac{(d^2u\,dv - d^2v\,du)\,dv + (C^{22}_{rs1}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs1}\,du\,dv + C^{11}_{rs1}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{(d^2u\,dv - d^2v\,du)\,du - (C^{22}_{rs2}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs2}\,du\,dv + C^{11}_{rs2}\,dv^2)\,du^r\,du^s} = \frac{\delta v}{\delta u},$$

e i due termini del 1° membro si annullano allora e solo che valgono le (12.4) *.

16. — Vogliamo ora introdurre un nuovo sistema pure ∞^2 di curve proiettivamente definito su σ a partire da un sistema ∞^1 di curve. Siano queste, per semplicità, definite da $\delta v = 0$ (linee u); cerchiamo se esistano E_3 di curve di σ tali che, per ogni punto P, il piano tangente

---

[11]) E. Bompiani: *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi;* Rendiconti Circ. Matem. di Palermo, t. XLVI (1922). S. 91—104.

a σ, il piano osculatore alla curva data per P e lo S_3 osculatore all' E_3 stiano in un S_4. Indicato con d il simbolo di differenziazione relativo all' E_3 in questione dovrà essere

$$|S_2\ x_{11}\ d^2x\ d^3x| = 0. \tag{16.1}$$

Poiché

$$d^2x = x_{11}\,du^2 + 2x_{12}\,du\,dv + x_{22}\,dv^2 + x_1\,d^2u + x_2\,d^2v, \tag{16.2}$$

$$\begin{aligned} d^3x = {} & x_{111}\,du^3 + 3x_{112}\,du^2\,dv + 3x_{122}\,du\,dv^2 + x_{222}\,dv^3 \\ & + 3x_{11}\,du\,d^2u + 3x_{12}(du\,d^2v + dv\,d^2u) + 3x_{22}\,dv\,d^2v \\ & + x_1\,d^3u + x_2\,d^3v \end{aligned} \tag{16.3}$$

la (16.1), diviso il primo membro per dv (la presenza di questo fattore è geometricamente evidente), si scrive

$$\begin{aligned} |S_2\ x_{11}\ 2x_{12}\,du + x_{22}\,dv\ \ x_{111}\,du^3 + 3x_{112}\,du^2\,dv + 3x_{122}\,du\,dv^2 \\ + x_{222}\,dv^3 + 3x_{12}(dv\,d^2u - du\,d^2v)| = 0. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Questa equazione differenziale del 2° ordine definisce un sistema ∞^2 di curve proiettivamente individuato dal sistema ∞^1 dato. La proprietà caratteristica di questo nuovo sistema è la seguente:

Dato su σ un sistema ∞^1 di curve è ad esso proiettivamente associato un sistema ∞^2 di curve tale che gli S_3 osculatori a curve (o ad E_3 di curve) di σ in un punto P aventi per E_2 quelli del sistema associato stanno in S_4 con lo S_2 osculatore in P alla curva del sistema dato.

In altri termini: *Si consideri in P lo S_4 determinato dallo S_2 osculatore alla curva del sistema dato e dallo S_2 osculatore ad una delle ∞^1 curve, per P, del sistema associato. Gli S_3 passanti per il secondo S_2 e contenuti nello S_4 sono osculatori ad elementi E_3 di curve di σ.*

È da notare, per rilevare l'interesse del teorema, che un S_3 passante per un S_2 osculatore ad una curva di σ *non* è in generale un S_3 osculatore ad una curva di σ. Ma di più nell'equazione (16.1) niente cambia se al termine x_{11} si sostituisce il termine $x_{11} + x_1\,\delta^2u + x_2\,\delta^2v$ (a causa della presenza in S_2 dei termini in x, x_1, x_2): sicché nell'ultimo enunciato si puo' sostituire allo S_2 osculatore alla linea del sistema dato un qualsiasi piano osculatore a curve della superficie tangenti in P a quella del sistema dato. Se poi nella (16.1) si prescinde dalla particolarizzazione delle linee u e si scrive

$$|S_2\ \delta^2x\ d^3x\ d^3x| = 0 \tag{16.5}$$

si vede che dato un $E_2(d)$ rimangono individuati (almeno in generale) *due* $E_1(\delta)$ tali che lo S_3 osculatore ad una qualsiasi curva per E_2 e lo S_2 osculatore ad una qualsiasi curva per uno di questi E_1 stanno in S_4.

Chiediamoci per quali E_2 i due E_1 così determinati coincidono. Se l' E_2 è $du = 0$, $d^2u = 0$ bisogna che l'equazione

$$|S_2\ x_{11}\delta u^2 + 2x_{12}\delta u\delta v + x_{22}\delta v^2\ \ x_{22}\ \ x_{222}| = 0$$

ammetta due radici coincidenti (necessariamente in $\delta u^2 = 0$), e perciò

$$|S_2\ x_{12}\ x_{22}\ x_{222}| = 0 \tag{16.6}$$

che è soddisfatta solo quando $du = 0$ sia una tangente principale. Sicché:

La superficie σ determina una corrispondenza fra gli E_1 e gli E_2 passanti per un suo punto P generico, tale che:

ad ogni E_1 corrispondono ∞^1 E_2 (uno per ogni tangente in P) di guisa che ogni S_2 osculatore ad una curva possedente E_1 ed ogni S_3 osculatore ad ogni curva possedente uno (degli ∞^1) E_2 stanno in S_4;

un E_2 determina, generalmente, due E_1 ciascuno dei quali gode con E_2 della proprietà precedente; la coincidenza di questi E_1 avviene soltanto per le tangenti principali.

*Anche qui vi è un *caso d'eccezione:* allora e solo che l' $E_2(d)$ appartiene a una curva che vi ha l' S_3 osculatore tangente alla superficie la coppia di $E_1(\delta)$ corrispondenti è indeterminata. Infatti la (16.5) sviluppata si scrive

$$H\delta u^3 + 2L\delta u\delta v + K\delta v^2 = 0 \tag{16.7}$$

ove

$$\begin{cases} H = 2(C^{22}_{rst}\,du - C^{12}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t\,dv - 3(d^2u\,dv - d^2v\,du)\,dv^2 \\ L = (C^{11}_{rst}\,dv^2 - C^{22}_{rst}\,du^2)\,du^r\,du^s\,du^t + 3(d^2u\,dv - d^2v\,du)\,du\,dv \\ K = 2(C^{12}_{rst}\,du - C^{11}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t\,du - 3(d^2u\,dv - d^2v\,du)\,du^2 \end{cases} \tag{16.8}$$

le H, L, K sono legate dall'identità

$$Hdu^3 + 2Ldu\,dv + Kdv^2 = 0 \tag{16.9}$$

e d'altra parte le $H = 0$, $K = 0$ equivalgono alle (12.2)*.

17. — La corrispondenza indicata al n. prec., e così pure il coniugio di 2^a specie (n. 15) associano, ad ogni $E_1(\delta)$, ∞^1 $E_2(d)$: vediamo in particolare qual'è l' E_2 associato ad E_1, e *che esce da P proprio con questo E_1*.

Cominciamo dalla corrispondenza del n. prec. (che per brevità indicheremo, ove occorra, con Π: mentre con Ω indicheremo il coniugio di 2^a specie).

Osserviamo che la (16.7) si puo' ancora scrivere nelle forme seguenti:

$$d^2u\,dv - d^2v\,du = \frac{2}{3}\,\frac{\{C^{22}_{rst}\,du\,\delta u - C^{12}_{rst}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + C^{11}_{rst}\,dv\,\delta v\}\,du^r\,du^s\,du^t}{\delta u\,dv - \delta v\,du}. \tag{17.1}$$

$$(17.2)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{(C^{22}_{rst}\,du - C^{12}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t}{dv}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{(C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,du^t}{dv\,(\delta u\,dv - \delta v\,du)}\,\delta v.$$

$$(17.3)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{(C^{12}_{rst}\,du - C^{11}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du^t}{du}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{(C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,du^t}{du\,(\delta u\,dv - \delta v\,du)}\,\delta u.$$

L'ultima di queste quando l' $E_1(d)$ sia principale — e quindi soddisfacente alla (12.3) — si riduce alla prima delle (12.2), dunque si ritrova che se l' $E_1(d)$ è principale, qualunque sia l' $E_1(\delta)$ (purchè da esso differente), l' $E_2(d)$ appartiene a una linea ad S_3 osculatore tangente in P alla superficie.

Ma ora torniamo a supporre che l' $E_1(\delta)$ sia quello della linea u che esce da P, cioè che sia $\delta v = 0$. La (17.2) dà, purché sia $dv \neq 0$,

$$(17.4)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = \frac{2}{3}\frac{(C^{22}_{rst}\,du - C^{12}_{rst}\,dv)\,du^r\,du^s\,du}{dv},$$

cioè

$$(17.5)\quad (d^2u\,dv - d^2v\,du)\,dv =$$
$$= \tfrac{2}{3}C^{22}_{111}\,du^4 + \tfrac{2}{3}(3\,C^{22}_{112} - C^{12}_{111})\,du^3\,dv + 2\,(C^{22}_{122} - C^{12}_{112})\,du^2\,dv^2$$
$$+ \tfrac{2}{3}(C^{22}_{222} - 3\,C^{12}_{122})\,du\,dv^3 - \tfrac{2}{3}C^{12}_{222}\,dv^4.$$

Indichiamo l' espressione a secondo membro con $Q_4(du, dv)$ e supponiamo prima che l'elemento E_1, $\delta v = 0$, cui sono associati gli E_2 definiti dalla (17.5) non sia principale: $C^{22}_{111} \neq 0$.

Il piano di un E_2 è definito da P, dP, d^2P e a quest'ultimo punto può sostituirsi l'altro $dv\,(du\,d^2P - d^2u\,dP)$, cioè

$$(x_{11}\,du^2 + 2\,x_{12}\,du\,dv + x_{22}\,dv^2)\,du\,dv + x_2\,dv\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)$$
$$\equiv (x_{11}\,du^2 + 2\,x_{12}\,du\,dv + x_{22}\,dv^2)\,du\,dv - x_2\,Q_4(du,\,dv).$$

Se s'introducono le coordinate locali ν_0, ν_1, ν_2, ν_{11}, ν_{12}, ν_{22} per il punto $\nu_0 x + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_{11} x_{11} + 2\nu_{12} x_{12} + \nu_{22} x_{22}$, l'ultimo punto considerato ha le coordinate

$$\nu_0 = 0,\quad \nu_1 = 0,\quad \nu_2 = -Q_4(du, dv),\quad \nu_{11} = du^3\,dv,\quad \nu_{12} = du^2\,dv^2,$$
$$\nu_{22} = du\,dv^3,$$

e descrive quindi una C^4 razionale nello S_3 $\nu_0 = \nu_1 = 0$. Il punto $dP = x_1\,du + x_2\,dv$ descrive una retta incidente la C^4; punti corrispondenti di C^4 e di questa retta (determinati dallo stesso valore di du/dv)

si corrispondono in una proiettività nella quale è unito il punto comune alla retta e a C^4 $(du = 0)$. La rigata delle rette congiungenti punti corrispondenti è del 4° ordine e così anche *il cono dei piani degli* E_2 *associati in* P (per la corrispondenza Π) *ad un* E_1 *generico è del* 4° *ordine.*

Risulta dalla (17.5), sempre per un $E_1(\delta)$ generico (non principale), che *l'* E_2 *corrispondente a* $dv = 0$ *è singolare, di tipo cuspidale* $\left(\frac{d^2v}{du^2} = \infty\right)$.

Passiamo al caso in cui l' $E_1(\delta)$ sia *principale*, cioè $C^{23}_{111} = 0$. L'equazione (17.2) che determina gli $E_2(d)$ associati (per Π) si scrive

$$d^3u\,dv - d^3v\,du = Q_3(du, dv) \tag{17.6}$$

ove

$$\begin{aligned} Q_3(du, dv) = {} & \tfrac{2}{3}(3C^{23}_{112} - C^{13}_{111})\,du^3 \\ & + 2(C^{23}_{122} - C^{13}_{112})\,du^2\,dv + \tfrac{2}{3}(C^{23}_{222} - 3C^{13}_{122})\,du\,dv^2 - \tfrac{2}{3}C^{13}_{222}\,dv^3. \end{aligned} \tag{17.7}$$

Il piano osculatore all' E_2 determinato da du/dv è individuato, oltre che dal punto P, dai punti dP e

$$\nu_0 = \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = -Q_3(du, dv), \quad \nu_{11} = du^3, \quad \nu_{12} = du^2\,dv, \quad \nu_{22} = du\,dv^2;$$

questo descrive una cubica sghemba C^3 e dP una retta riferite in una proiettività in cui è unito il loro punto comune

$$(du = 0, \quad \nu_0 = \nu_1 = \nu_{11} = \nu_{12} = \nu_{22} = 0, \quad \nu_2 \neq 0 \quad \text{se} \quad C^{13}_{222} \neq 0).$$

Il cono dei piani degli E_2 *associati in* P *ad un* E_1 *principale è del* 3° *ordine.*

Il piano dell' E_2 che ha per tangente l' E_1 principale $dv = 0$ si ha per

$$d^3v = \tfrac{2}{3}(C^{13}_{111} - 3C^{23}_{112})\,du^2 \tag{17.8}$$

quindi è il piano dei punti

$$x,\ x_1,\ x_{11} + \tfrac{2}{3}(C^{13}_{111} - 3C^{23}_{112})\,x_2;$$

è questo il piano invariante associato (per Π) *all'* E_1 *principale considerato; esso coincide col piano osculatore all'* E_2 *di* γ_{13} *tangente alla linea principale,* E_2 che si ha per

$$d^2v = -\tfrac{2}{3}C^{13}_{111}\,du^2, \tag{17.9}$$

se e solo se la linea principale è doppia $(2C^{13}_{111} = 3C^{23}_{112})$.

18. — *Considerazioni e risultati affatto analoghi a quelli esposti al n. prec. nei riguardi della corrispondenza Π valgono anche per l'altra corrispondenza Ω fra $E_1(\delta)$ ed $E_2(d)$ superficiali uscenti da un punto P, costituita dal *coniugio di* 2ª *specie* (n. 15). Basterà un rapido cenno.

La (15.3) puo' anche scriversi nelle forme seguenti:

$$(18.1)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = \frac{(C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,\delta u^t}{du\,\delta v - dv\,\delta u},$$

$$(18.2)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = \frac{(C^{22}_{rs2}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs2}\,du\,dv + C^{11}_{rs2}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{du} + \frac{(C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,du^t}{du\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}\,\delta u,$$

$$(18.3)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = \frac{-(C^{22}_{rs1}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs1}\,du\,dv + C^{11}_{rs1}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{dv} + \frac{(C^{22}_{rst}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rst}\,du\,dv + C^{11}_{rst}\,dv^2)\,du^r\,du^s\,du^t}{dv\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}\,\delta v.$$

La (18.2) quando l' $E_1(d)$ sia principale si riduce alla prima delle (12.4); ritroviamo che se l' $E_1(d)$ è principale, qualunque sia l' $E_1(\delta)$ (purché da esso differente) l' $E_2(d)$ è ad S_4 tritangente.

Supposto ora che l' $E_1(\delta)$ sia quello definito da $\delta v = 0$, dalla (18.3) ricaviamo (inteso per ora che sia $dv \neq 0$)

$$(18.4)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = -\frac{(C^{22}_{rs1}\,du^2 - 2\,C^{12}_{rs1}\,du\,dv + C^{11}_{rs1}\,dv^2)\,du^r\,du^s}{dv}.$$

Al variare di du/dv i piani osculatori agli $E_2(d)$ determinati dalla (18.4) formano un cono del 4° ordine.

Se l' E_1 $\delta v = 0$ è principale, quindi $C^{22}_{111} = 0$, la (18.4) diviene

$$(18.5)\quad d^2u\,dv - d^2v\,du = -2\,(C^{22}_{112} - C^{12}_{111})\,du^3 - (C^{22}_{122} - 4\,C^{12}_{112} + C^{11}_{111})\,du^2\,dv + 2\,(C^{12}_{122} - C^{11}_{112})\,du\,dv^2 - C^{11}_{122}\,dv^3.$$

Allora i piani osculatori descrivono, al variare di du/dv, un cono del 3° ordine.

Per $dv = 0$ la (18.5) conserva significato e ci dà

$$(18.6)\quad d^2v = 2\,(C^{22}_{112} - C^{12}_{111})\,du^2$$

e il corrispondente piano osculatore è quello dei punti

$$(18.7)\quad x,\ x_1,\ x_{11} + 2\,(C^{22}_{112} - C^{12}_{111})\,x_2.$$

Tale piano invariante coincide col piano osculatore all' E_2 con S_4 tritangente, e uscente dall' E_1 della supposta linea principale, E_2 che si ha per

$$(18.8)\quad d^2v = -C^{22}_{112}\,du^2,$$

se e solo se tale linea principale è doppia $(2\,C^{12}_{111} = 3\,C^{22}_{112})$ *.

19. — Risulta da tutto quanto precede che ad ogni elemento E_1 di linea principale, qui assunta come $dv = 0$, possono associarsi *cinque elementi del* 2^0 *ordine invarianti*, generalmente distinti fra loro, e così definiti:

1. l' $E_2^{(1)}$ della linea principale considerata; per esso $\frac{d^2v}{du^2} = v_1'' = 0$.

2. l' $E_2^{(2)}$ di quasi-asintotica γ_{13} (cioè: tale che per questo $E_2^{(2)}$ passa un S_3 osculatore ad un elemento di curva di σ, contenente il piano tangente); per esso $\frac{d^2v}{du^2} = v_2'' = -\frac{2}{3} C_{111}^{12}$.

3. l' $E_2^{(3)}$ per il quale l' S_4 bitangente a σ secondo il suo E_1 risulta tritangente; per esso $\frac{d^2v}{du^2} = v_3'' = -C_{112}^{22}$.

4. l' $E_2^{(4)}$ associato all' E_1 per la corrispondenza Π, cioè, posizione limite di un E_2 associato per Π a tale E_1, e uscente da un E_1 variabile che col primo E_1 tende a coincidere; per esso

$$\frac{d^2v}{du^2} = v_4'' = \frac{2}{3}(C_{111}^{12} - 3\,C_{112}^{22}).$$

5. l' $E_2^{(5)}$ associato all' E_1 pel coniugio di 2^a specie Ω, cioè, posizione limite di un E_2 coniugato di 2^a specie a tale E_1, e uscente da un E_1 variabile che tende a coincidere con quell' E_1; per esso

$$\frac{d^2v}{du^2} = v_5'' = 2\,(C_{112}^{22} - C_{111}^{12}).$$

Ciascuna delle condizioni $v_2'' = v_3''$, $v_2'' = v_4''$, $v_2'' = v_5''$, $v_3'' = v_4''$, $v_3'' = v_5''$, $v_4'' = v_5''$ porta di conseguenza le rimanenti, riducendosi tutte a

$$2\,C_{111}^{12} = 3\,C_{112}^{22};$$

o ancora, per la seconda delle (12.8), a $B = 0$; cosicché allora (e soltanto allora) che vale una delle coincidenze ora dette la supposta linea principale è *doppia*. Notiamo ancora che la coincidenza di $E_2^{(2)}$ con $E_2^{(1)}$ porta $C_{111}^{12} = 0$; quella di $E_2^{(3)}$ con $E_2^{(1)}$ porta $C_{112}^{22} = 0$; quella di due qualsiansi degli $E_2^{(2)}$, $E_2^{(3)}$, $E_2^{(4)}$, $E_2^{(5)}$ con $E_2^{(1)}$ porta $C_{111}^{12} = C_{112}^{22} = 0$, quindi la coincidenza anche dei due rimanenti con $E_2^{(1)}$; sicché tenendo presenti anche i risultati della Parte I, n. 8 si ha:

Se due qualsiansi degli elementi $E_2^{(2)}$, $E_2^{(3)}$, $E_2^{(4)}$, $E_2^{(5)}$ *coincidono fra loro in ogni punto di una linea principale, coincidono tutti ed essa è doppia (assorbe due delle cinque linee principali); quindi se ciò avviene in ciascun punto per tre direzioni principali distinte (queste divengono indeterminate e) la superficie è necessariamente quella di Veronese.*

Se lungo una linea principale coincidono $E_2^{(3)}$ *ed* $E_2^{(1)}$, *lungo essa è fisso lo* S_4 *bitangente; e se due qualsiansi degli* $E_2^{(2)}$, $E_2^{(3)}$, $E_2^{(4)}$, $E_2^{(5)}$ *coincidono con* $E_2^{(1)}$ *la linea principale è piana (con* S_4 *bitangente fisso).*

La prima parte del teorema, quando ci si limiti a considerare $E_2^{(2)}$ ed $E_2^{(3)}$, coincide col teorema del Bortolotti dato al n. 13 (Parte II).

20. — Possiamo ancora utilizzare i cinque E_2 introdotti per formare degli *invarianti proiettivi* (dei quali però uno solo è indipendente), *relativi ad una direzione principale.*

Individuata ancora questa con $dv = 0$, i piani dei cinque E_2 passano per la tangente principale e per i punti $x_{11} + v''_\lambda x_2 (\lambda = 1, \ldots, 5)$; il birapporto di quattro dei cinque piani è uguale al birapporto dei corrispondenti valori di v''. Essendo $(v''_2 v''_3 v''_4 v''_5) = 3$, dei rimanenti birapporti uno solo è indipendente, ad es.:

$$(20.1) \qquad (v''_2 v''_3 v''_4 v''_1) = 3 \frac{C^{2\,2}_{11\,2}}{C^{1\,2}_{111}}.$$

Sostanzialmente allo stesso birapporto si puo' arrivare cosi:

Tre E_2 fra loro tangenti appartenenti ad una superficie di S_n hanno un invariante proiettivo; per vederlo, distinguiamo i differenziali secondi sui vari E_2 con un indice (d_i^2, d_k^2, d_l^2) e proiettiamo da un S_{n-2} passante per il loro punto x comune (ma non per la loro tangente comune) tre punti di tre curve per quegli E_2 (punti che faremo poi tendere ad x) e poi un punto arbitrario z. Si ha per il birapporto dei quattro S_{n-1} proiettanti l'espressione

$$(20.2) \qquad \frac{|S_{n-2}\, dx + \tfrac{1}{2} d_i^2 x + \ldots \; dx + \tfrac{1}{2} d_l^2 x + \ldots|}{|S_{n-2}\, dx + \tfrac{1}{2} d_k^2 x + \ldots \; dx + \tfrac{1}{2} d_l^2 x + \ldots|} \cdot \frac{|S_{n-2}\, dx + \tfrac{1}{2} d_k^2 x + \ldots \; z|}{|S_{n-2}\, dx + \tfrac{1}{2} d_i^2 x + \ldots \; z|}$$

(ove S_{n-2} sostituisce, in ciascuno dei quattro determinanti, uno stesso gruppo di $n-1$ colonne: formate dalle coordinate di $n-1$ punti indipendenti di quello spazio S_{n-2}).

Il valor principale dell'espressione (20.2) è

$$(20.3) \qquad \frac{|S_{n-2}\, (d_i^2 - d_l^2)\, x \;\; dx|}{|S_{n-2}\, (d_k^2 - d_l^2)\, x \;\; dx|},$$

ed è indipendente da S_{n-2} e da z. Nel nostro caso esso vale $(v''_i v''_k v''_l)$. Pei cinque E_2 considerati ve n'è uno solo indipendente; p. es.

$$(20.4) \qquad (v''_3 v''_2 v''_1) = \frac{3}{2} \frac{C^{2\,3}_{11\,2}}{C^{1\,2}_{111}}.$$

Esso diviene indeterminato, per quanto precede, solo se la linea principale cui si riferisce è piana.

Possiamo anche scrivere l'espressione di questo invariante senza ricorrrere al particolare riferimento $dv = 0$ per la linea principale.

Per un $E_2^{(1)}$ principale si ha (con le notazioni del n. 12, Parte II)

$$(20.5)\quad d\,v\,d^3u - d\,u\,d^2v = \\ = d\,u\,\frac{d\,A\,d\,u^5 + \ldots + d\,F\,d\,v^5}{B\,d\,u^4 + 2\,C\,d\,u^3\,d\,v + 3\,D\,d\,u^2\,d\,v^2 + 4\,E\,d\,u\,d\,v^3 + 5\,F\,d\,v^4}.$$

Indichiamo il denominatore dell'ultima frazione con $P_4^{(1)}$.

Per un $E_2^{(2)}$ di γ_{13} si ha, per la seconda delle (12.2):

$$(20.6)\qquad d\,v\,d^3u - d\,u\,d^2v = \frac{2}{3}\,\frac{P_4^{(2)}}{d\,v},$$

$$\begin{aligned} P_4^{(2)} &= (C_{rst}^{223}\,d\,u - C_{rst}^{123}\,d\,v)\,d\,u^r\,d\,u^s\,d\,u^t \\ &= C_{111}^{223}\,d\,u^4 + (3\,C_{112}^{223} - C_{111}^{123})\,d\,u^3\,d\,v + 3\,(C_{122}^{223} - C_{112}^{123})\,d\,u^2\,d\,v^2 \\ &\quad + (C_{222}^{223} - 3\,C_{122}^{123})\,d\,u\,d\,v^4 - C_{222}^{123}\,d\,v^5. \end{aligned}$$

Per un $E_2^{(3)}$ ad S_4 tritangente si ha, per la seconda delle (12.4):

$$(20.7)\qquad d\,v\,d^2u - d\,u\,d^2v = -\frac{P_4^{(3)}}{d\,v},$$

$$\begin{aligned} P_4^{(3)} &= (C_{rs1}^{223}\,d\,u^2 - 2\,C_{rs1}^{123}\,d\,u\,d\,v + C_{rs1}^{113}\,d\,v^2)\,d\,u^r\,d\,u^s \\ &= C_{111}^{223}\,d\,u^4 + 2\,(C_{112}^{223} - C_{111}^{123})\,d\,u^3\,d\,v \\ &\quad + (C_{122}^{223} - 4\,C_{112}^{123} + C_{111}^{113})\,d\,u^2\,d\,v^2 \\ &\quad + 2\,(-C_{122}^{123} + C_{112}^{113})\,d\,u\,d\,v^3 + C_{122}^{113}\,d\,v^4. \end{aligned}$$

Ricaviamo infine:

È invariante l'espressione

$$\frac{P_4^{(1)}\,P_4^{(3)} + d\,u\,d\,v\,(d\,A\,d\,u^5 + \ldots + d\,F\,d\,v^5)}{-\frac{2}{3}\,P_4^{(1)}\,P_4^{(2)} + d\,u\,d\,v\,(d\,A\,d\,u^5 + \ldots + d\,F\,d\,v^5)}$$

costruita per ciascuna delle tangenti principali.

Sesto in Pusteria, settembre 1936.

(Eingegangen am 3. Oktober 1936.)

Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.

(Erster Abschnitt.)

Von

Georg Tautz in Breslau.

Inhaltsübersicht.

Seite

Erster Abschnitt. Existenzbeweise. 430

§ 1. Vorbemerkungen 430
§ 2. Problemstellung 432
§ 3. Hilfssätze 435
§ 4. Die inhomogene Gleichung des Kerns $K_0(x-y)$ für einen Punkt des Spektrums 440
§ 5. Existenz von Lösungen der Gleichung (3) für gewisse Punkte des Spektrums 445
§ 6. Asymptotische Darstellung der Lösung 453
§ 7. Lösung der Integralgleichung für beliebige Werte des Spektrums 455
§ 8. Über die Existenz von beschränkten Lösungen für $\lambda = 1$ . . 464
§ 9. Spezielle Typen 466
§ 10. Eine potentialtheoretische Randwertaufgabe 469

Zweiter Abschnitt. Das Fouriertheorem 473

§ 1. Vorbemerkungen 473
§ 2. Einige Hilfssätze 474
§ 3. Die Ableitung der Spektralfunktion 477
§ 4. Gerade Kerne; das Fouriertheorem 481

Erster Abschnitt.

Existenzbeweise.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die singulären Integralgleichungen[1]) sind, wenn man von gewissen einfacheren Typen absieht, vor allem durch das Auftreten der Streckenspektra gekennzeichnet. In solchen Fällen braucht die homogene Integralgleichung keine Lösung zu besitzen. Wohl aber existieren sogenannte

[1]) Vgl. das Buch von T. Carleman: Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique: im folgenden mit „Ca“ zitiert.

Differentiallösungen. Das heißt, es gibt Funktionen $\omega(x, \lambda)$, welche der Gleichung genügen

$$(1) \qquad \Delta_\lambda \omega(x, \lambda) - \int_a^b K(x, y) \int_{\Delta\lambda} \mu \, d_\mu \omega(y, \mu) \, dy = 0.$$

Hierbei ist

$$\Delta_\lambda \omega(x, \lambda) = \omega(x, \lambda_2) - \omega(x, \lambda_1),$$

und die Werte $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$ gehören zum Streckenspektrum. Hat dann $K(x, y)$ die Spektralfunktion $\Theta(x, y|\lambda)$, so werden durch

$$\Theta(x, y|\lambda + 0) - \Theta(x, y|\lambda - 0) = \varphi(x, y)$$

die Eigenfunktionen geliefert, wenn man etwa y festhält, während $\Delta_\lambda \sigma(x, y|\lambda)$ bei festem y Differentiallösungen erzeugt. $\sigma(x, y|\lambda)$ ist der nach Abzug der Eigenfunktionen übrigbleibende stetige Teil von $\Theta(x, y|\lambda)$. Ist nun für ein λ-Intervall $\Theta(x, y|\lambda)$ nach λ differenzierbar für alle x und ein gewisses y, so folgt aus (1), falls das auftretende Integral existiert,

$$\frac{d\,\omega(x, \lambda)}{d\,\lambda} - \lambda \int_a^b K(x, y) \frac{d\,\omega(y, \lambda)}{d\,\lambda} d\,y.$$

Wir erhalten also eine Lösung der homogenen Gleichung, die allerdings nach einem Satz von Hilbert[2]) nicht quadratisch integrierbar ist. Nun ist zwar die Spektralfunktion in jedem endlichen λ-Intervall von beschränkter Schwankung, falls es sich um die in Kap. I (Ca) charakterisierten Kerne handelt, und daher bei festem x und y fast überall nach λ differenzierbar. Jedoch bedarf es keiner großen Überlegung, um zu erkennen, daß dies nicht genügt, um die Existenz von eigentlichen Lösungen allgemein zu erschließen.

Für mehr oder weniger spezielle Typen gelingt es allerdings. Hierher gehören vor allem die Kerne vom Typus $K(x, y) = K(x \pm y)$. Man bekommt z. B. für $K(x - y)$ unter ziemlich allgemeinen Bedingungen über die Funktion $K(t)$ Lösungen in der Form von Exponentialfunktionen. Andreoli behandelt allgemeiner Kerne von der Form $K(\alpha x + \beta y)$. Allen diesen Kernen ist die mehr oder weniger spezielle Bindung zwischen x und y gemein. Im Gegensatz hierzu handelt es sich im folgenden um Kerne mit unendlichem Integrationsintervall, die in einem beliebig großen Bereich der Variablen x und y bis auf gewisse Stetigkeitseigenschaften völlig willkürlich sind, während sie asymptotisch vom Typus $K(x - y)$ sind. Solche Kerne treten beispielsweise bei Randwertproblemen aus der Potentialtheorie auf, die unendliche Grundgebiete haben.

---

[2]) D. Hilbert, Grundzüge S. 147, Satz 34.

§ 2.

Problemstellung.

Bevor wir die Voraussetzungen festlegen können, benötigen wir einige Tatsachen über eine gewisse Klasse von Kernen des Typus $K(x-y)$.

Es sei $K_0(t) = e^{-a|t|}u(t)$, $a > 0$, $u(t)$ eine integrierbare gerade Funktion, die für $t > 0$ beschränkt ist, (d. h. $|u(t)| < M$ für $t \geqq t_0 > 0$, t_0 beliebig > 0) und bei $t = 0$ nur logarithmisch unendlich wird. Dann existiert die Fouriersche Transformierte

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(t)\, e^{i\alpha t}\, dt = 2\int_0^{\infty} K_0(t)\cos\alpha t\, dt;$$

offenbar ist $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha)$. Wir normieren

$$\frac{1}{\lambda(0)} = 1 = 2\int_0^{\infty} K_0(t)\, dt.$$

$\lambda(\alpha)$ ist eine analytische Funktion, die für reelle α selbst reell ist, und, da $K_0(t)$ absolut integrierbar ist, für $\alpha \to \infty$ selbst über alle Grenzen wächst. $\lambda(\alpha)^{-1}$ ist regulär in jedem Streifen von einer Breite $< a$ beiderseits der reellen Achse, denn es ist für $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t| - \alpha_2 t}\, u(t)\, e^{i\alpha_1 t}\, dt \qquad |\alpha_2| < a$$

Wir können nun umgekehrt $\lambda(\alpha)$ vorgeben, und eine Funktion $K_0(t)$ durch $\lambda(\alpha)$ definieren. Wir verlangen jetzt allerdings von $\lambda(\alpha)$ noch mehr. Es sei

(A) $\frac{1}{\lambda(\alpha)}$ *eine gerade Funktion von* $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, *die in einem Streifen von der Breite* $a + \varepsilon$ *zu beiden Seiten der reellen Achse analytisch ist. Für reelle* α *ist* $\lambda(\alpha)$ *reell und insbesondere* $\lambda(0) = 1$. $\frac{1}{|\lambda|}$ *nimmt monoton gegen Null ab, — für reelle* α *sogar streng monoton —, wenn* α_1 *bei festem* α_2 *ins Unendliche wächst. Es gibt eine positive Konstante* C, *so daß von einem* α_1 *an* $|\lambda(\alpha)| > C \cdot |\alpha|$ *ist.*

Dann existieren die uneigentlichen Integrale[3])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta t}}{\lambda(ih+\beta)}\, d\beta$$

[3]) Vgl. Bochner, Vorlesungen über das Fouriersche Integral (in folgendem zitiert durch „Bo"), Satz 1 und 1a.

und es ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha t}}{\lambda(\alpha)}\,d\alpha = \frac{e^{-bt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\beta t}}{\lambda(ib+\beta)}\,d\beta, \qquad \begin{matrix}|b| \leqq a \\ b\cdot t > 0\end{matrix}$$

hat also die Form $e^{-a|t|}\,u(t)$.

Kerne von der eben geschilderten Art sind wegen $\int_0^\infty |K_0(t)|\,dt < \infty$ beschränkte Kerne (vgl. Ca (158), S. 112). Es gelten bekanntlich die inversen Beziehungen:

(2a, b) $$K_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha t}}{\lambda(\alpha)}\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha t}{\lambda(\alpha)}\,d\alpha$$

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(t)\,e^{i\alpha t}\,dt = 2\int_0^\infty K_0(t)\cos\alpha t\,dt.$$

Aus (2a) und der Monotonie von $\lambda(\alpha)$ folgt, daß $K_0(t)$ positiv sein muß.

Nun betrachten wir symmetrische Kerne der folgenden Art:

$$K(x,y) = K_0(x-y)\,(1+\eta(x,y)), \quad K_0(t) = e^{-a|t|}\,u(t),$$

wobei die symmetrische Funktion $\eta(x,y)$ folgenden Bedingungen genügt:

(B) *Es gibt ein $x_1 > 0$, so daß*

a) $$|\eta(x,y)| \leqq C, \quad \text{falls } |x| \text{ oder } |y| \geqq x_1$$

b) $$|\eta(x,y)| \leqq \frac{C_1}{[\mathrm{Min}\,(|x|,|y|)]^l}, \qquad \left.\begin{matrix}|x| \\ |y|\end{matrix}\right\} \geqq x_1 \quad l > \frac{3}{2}$$

C eine Konstante.

(C) *$u(t)\,\eta(x, x+t)$ ist in jedem endlichen t-Intervall bei beliebigem x quadratisch integrierbar. Das Integral des Quadrats sei unter einer nur vom Intervall, nicht von x abhängigen Schranke.*

Dazu kommt noch die Stetigkeitsbedingung von Carleman (Ca (24), S. 25), mit einer kleinen Verschärfung:

Es gebe höchstens endlich viele Stellen $\xi_1 \ldots \xi_m$, so daß

(D) $$\lim_{x'\to x}\int_{-\infty}^{+\infty}[K(x,y)-K(x',y)]^2\,dy = 0. \qquad (x \neq \xi_\nu)$$

Ist die Zahl x_1 genügend groß, so bleibt nach Bedingung (C) das Verhalten von $K(x,y)$ in einem beliebig großen Rechteck der (x,y)-Ebene in hohem Grade willkürlich.

Aus den Bedingungen (A) bis (D) ergibt sich als Folgerung

(E) $$\lim_{x'\to x}\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x,y)-K(x',y)|\,dy = 0 \qquad (x \neq \xi_\nu).$$

Beweis. x sei gegeben; wegen (B) folgt leicht aus der Form von $K_0(t)$, daß für ein hinreichend großes A

$$\int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{\infty} \{|K(x,y)| + |K(x',y)|\}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun wählen wir x' so nahe bei x gemäß (D), daß

$$\int_{-A}^{A} [K(x,y) - K(x'y)]^2\, dy < \frac{\varepsilon^2}{8A}.$$

Dann folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{-A}^{A} |K(x,y) - K(x,y)|\, dy \leqq \sqrt{\int_{-A}^{A} [K(x,y) - K(x',y)]^2\, dy}\ \sqrt{2A} < \frac{\varepsilon}{2}$$

w. z. b. w.

Aus den Voraussetzungen folgert man leicht, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y)|\, dy < N$ unabhängig von x ist, woraus sich, wie bei $K_0(x-y)$, die Beschränktheit von $K(x,y)$ ergibt. Im nächsten Paragraphen werden wir außerdem zeigen, daß der *Zusatzkern* $K(x,y) - K_0(x-y) = K_0(x-y)\,\eta(x,y)$ vollstetig ist im Sinne von Carleman. Daraus wiederum folgt (vgl. Ca S. 120 unten), daß $K(x,y)$ dasselbe Streckenspektrum besitzt wie $K_0(x-y)$.

Das Spektrum von $K_0(x-y)$ liest man aus den Formeln (2) ab, welche bereits die Spektraldarstellung von $K_0(x-y)$ liefern. Die Spektralfunktion hat also die Gestalt

$$\Theta_0(x-y|\lambda) = \frac{\sin \alpha(x-y)}{\pi(x-y)}^{4}, \qquad \lambda = \lambda(\alpha) > 1.$$

Das Spektrum wird dargestellt durch alle Werte $\lambda \geqq 1$. Zu jedem $\lambda > 1$ gibt es zwei beschränkte Lösungen $\cos \alpha x$ und $\sin \alpha x$ der homogenen Gleichung, dagegen bei $\lambda = 1$ neben $\varphi(x) \equiv 1$ als zweite nur die nichtbeschränkte $\varphi(x) = x$. Dies ist auf das Verschwinden der Ableitung $\frac{d\lambda}{d\alpha}$ bei $\alpha = 0$ $(\lambda(0) = 1)$ zurückzuführen. $\varphi(x) = x$ erscheint als Grenzfunktion von $\frac{\sin \alpha x}{\alpha}$ für $\alpha \to 0$ [5]).

Das Streckenspektrum von $K(x,y)$ erfüllt also auch die Werte von 1 bis ∞. An sich können auch Eigenwerte auftreten.

---

[4]) Vgl. Ca, Kap. V. Hier ist speziell $K_0(t) = e^{-|t|}$.

[5]) Man erkennt leicht folgendes. Wenn für einen Punkt des Spektrums $\lambda(\alpha)$ eine k-fache Nullstelle besitzt, so ist gleichzeitig mit $\cos \alpha x$ auch $P(x) \cdot \cos \alpha x$ eine Lösung, wobei $P(x)$ ein beliebiges Polynom von der Ordnung $k-1$ ist. Vgl. hierzu die Arbeit von Wiener und Hopf, Sitzungsber. der Preuß. Akad. 1931.

Es soll nun gezeigt werden, daß unter den Voraussetzungen (A) bis (D) unter einer später noch zu formulierenden Bedingung über $K_0(t)$ die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0 \tag{3}$$

für jedes $\lambda > 1$ mindestens eine beschränkte und im allgemeinen stetige Lösung besitzt, die sich asymptotisch wie eine Lösung des „Grundkerns" $K_0(t)$ verhält.

Zunächst werden wir die Existenz von Lösungen für einen geeigneten Wert $\lambda > 1$ beweisen; und zwar in der Form, daß wir ähnlich, wie es Carleman bei der Konstruktion der Spektralfunktion macht, $K(x, y)$ durch Kerne approximieren, die für große x und y verschwinden, so daß wir es nur mit Integralgleichungen über ein endliches Intervall zu tun haben. Deren Eigenwerte müssen sich gegen die Werte des Spektrums häufen. Die Lösungen der approximierenden Kerne lassen sich, indem man von $K(x, y)$ das Glied $K_0 \cdot \eta$ abspaltet, als Lösung einer inhomogenen Gleichung mit dem Kern K_0 auffassen, allerdings für einen Wert des Streckenspektrums. Die Lösungen werden so normiert, daß das Maximum ihres Betrages gleich 1 wird. Aus der Bedingung (E) folgt die gleichgradige Stetigkeit. Durch Auswahl bekommt man eine Grenzfunktion. Die Schwierigkeit liegt in dem Nachweis, daß die Grenzfunktion nicht identisch verschwindet.

Danach wird unter Voraussetzung der Existenz einer Lösung die asymptotische Darstellung bewiesen, mit deren Hilfe dann die Existenz von Lösungen für alle Werte des Spektrums nachgewiesen wird. Dies wird dann angewandt auf eine gemischte Randwertaufgabe der Potentialtheorie. In einem zweiten Abschnitt wird gezeigt, daß in der Tat unsere Lösungen gleich den Ableitungen der Spektralfunktion sind, was durchaus nicht sofort zu ersehen ist. Dies ermöglicht es, nach dem Vorgang von Weyl ein Fouriertheorem aufzustellen. Zum Schluß folgen noch einige Bemerkungen zu den Voraussetzungen über den Kern $K_0(t)$.

Es sei noch gesagt, daß im Interesse der Klarheit nicht immer das Minimum an Voraussetzungen erstrebt wurde.

§ 3.

Hilfssätze.

Wir hatten zu Beginn von § 2 angenommen, daß $K_0(t)$ bei $t = 0$ nur logarithmisch unendlich werde, wir wollen nun umgekehrt folgendes zeigen:

Hilfssatz I. *Sei* $\mu(\alpha) > M > 0$ $(\alpha \geqq 0)$ *monoton und von einem gewissen* α^* *an* $\mu(\alpha) > C \cdot \alpha$ $(C > 0)$. *Wenn*

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha t}{\mu(\alpha)} d\alpha = H(t)$$

gesetzt wird, so ist

$$|H(t)| < k_1 |\lg t| + k_2.$$

$\left| \int_0^{\alpha^*} \frac{\cos \alpha t}{\mu(\alpha)} d\alpha \right|$ ist beschränkt. α_0 sei so gewählt, daß $\alpha_0 t = 1$. Dann ist nach dem zweiten Mittelwertsatz (vgl. Bo, S. 7)

$$\left| \int_{\alpha_0}^\infty \frac{\cos \alpha t}{\mu(\alpha)} d\alpha \right| < \frac{2}{t} \frac{1}{\mu(\alpha_0)} < \frac{2}{t \cdot C \cdot \alpha_0} = \frac{2}{C}$$

Wir können $\alpha^* \geqq 1$ annehmen, dann gilt

$$\left| \int_{\alpha^*}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha t}{\mu(\alpha)} d\alpha \right| < \int_1^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{C \cdot \alpha} = \frac{1}{C} \lg \alpha_0 = \frac{1}{C} |\lg t|,$$

womit der Beweis erbracht ist.

Hilfssatz II. *Es sei* $F(t)$ *in* $(-\infty, +\infty)$ *absolut und quadratisch integrabel.* $\mu(\alpha)$ *sei definiert wie in Hilfssatz I. Dann ist folgende Integrationsvertauschung zulässig (die Grenzen* $-\infty$ *oder* $+\infty$ *lassen wir fortan beiseite*):

$$\int F(t)\, dt \int \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha = \int \frac{d\alpha}{\mu(\alpha)} \int F(t)\, e^{i\alpha t} dt.$$

Da wegen der Monotonie von $\mu(\alpha)$

$$\lim_{t \to \infty} \int \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha = 0,$$

so ist für $t \geqq 1$ das Integral absolut unter einer festen Schranke M. Es ist nur zu zeigen $\left(\text{wir setzen } \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} = \psi(\alpha, t)\right)$

$$\left| \int_0^{t_2} F\, dt \int_0^{\alpha_2} \psi\, d\alpha - \int_0^{t_1} F\, dt \int_0^{\alpha_1} \psi\, d\alpha \right| = \left| \int_0^{t_2} F\, dt \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi\, d\alpha + \int_{t_1}^{t_2} F\, dt \int_0^{\alpha_1} \psi\, d\alpha \right| < \varepsilon,$$

wenn nur $t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2 > N(\varepsilon)$ sonst aber beliebig sind.

Zunächst

$$\int_0^{t_2} F\, dt \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha.$$

Für $t > 0$ gilt wie im Hilfssatz I

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha \right| \leqq \frac{2}{t} \frac{1}{\mu(\alpha_1)}$$

(wenn etwa $\alpha_2 > \alpha_1$),

$$< \frac{2}{t} \frac{1}{C \cdot \alpha_1},$$

wenn α_1 genügend groß ist.

$$\int_0^{t_2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}}^{t_2}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}}^{t_2} |F| dt \cdot \frac{2}{t \cdot C \cdot \alpha_1} < \frac{2}{C \cdot \sqrt{\alpha_1}} \int_0^{\infty} |F| dt = \eta\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}} F\, dt \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}} |F| k |\lg t| dt$$

$$< \sqrt{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}} |F|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}} k^2 (\lg t)^2 dt} = \eta\left(\frac{1}{\alpha_1}\right).$$

$\eta(\beta)$ ist allgemein die Bezeichnung für eine Funktion, für welche $\lim_{\beta \to 0} \eta(\beta) = 0$ ist.

Für das Integral

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{i\alpha t}}{\mu(\alpha)} d\alpha$$

gilt natürlich dieselbe Abschätzung wie in Hilfssatz I

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} dt\, F(t) \int_0^{\alpha_1} \psi(\alpha, t)\, d\alpha \right| < M \int_{t_1}^{\infty} |F(t)| dt = \eta\left(\frac{1}{t_1}\right),$$

da für große t_1 und t_2

$$\int_0^{\alpha_1} \psi(\alpha, t)\, d\alpha$$

unter einer festen Schranke bleibt (es geht für $t_1 \to \infty$ sogar gegen Null). Damit ist der Beweis erbracht.

Hilfssatz III. *Es sei* $K_0(t) = e^{-\alpha|t|}u(t)$ *eine Funktion, wie sie zu Beginn von § 2 definiert wurde* ($u(t)$ *bei* $t = 0$ *höchstens logarithmisch unendlich und für* $t > 0$ *beschränkt*).

$\eta(x, y)$ *genüge den Bedingungen* (B) *und* (C). *Wir betrachten das Integral*

$$I(x, A, B) = \int_A^B |K_0(t) \cdot \eta(x, x+t)|\, dt$$

und behaupten, es gibt von A *und* B *unabhängige Zahlen* $x_2 > 0$ *und* $C > 0$, *so daß*

$$I(x, A, B) \leqq \frac{C}{|x|^l}, \qquad |x| \geqq x_2.$$

Beweis. x_1 und l mögen die in (B) angegebene Bedeutung haben. Wir bestimmen zunächst x_2

$$(F) \quad \begin{cases} \text{a)} & x_2 \geqq \operatorname{Max}\left(2, 2x_1, \frac{2l}{a}\right), \\ \text{b)} & x_2 - \frac{l}{a}\lg x_2 \geqq \frac{x_2}{2}, \end{cases}$$

wegen $x_2 \geqq \frac{2l}{a}$ folgt leicht aus b)

$$|x| - \frac{l}{a}\lg|x| \geqq \frac{|x|}{2} \qquad (|x| \geqq x_2) \tag{4}$$

$\frac{2l}{a}$ ist nämlich die Stelle des Minimums von

$$\frac{|x|}{2} - \frac{l}{a}\lg|x|.$$

Es sei etwa $x \geqq x_2$, insbesondere also $x > x_1$

$$\frac{l}{a}\lg x = t^* > 0 \qquad (\text{da } x \geqq 2),$$

$$I = \int_A^B = \int_A^{-t^*} + \int_{-t^*}^{t^*} + \int_{t^*}^B = I_1 + I_2 + I_3,$$

soweit diese Integrale überhaupt in Erscheinung treten.

$$I_1 = \int_A^{-t^*} |K_0(t)\,\eta(x, x+t)|\, dt = \int_{t^*}^{-A} |u(t)|\, e^{-\alpha t}|\eta(x, x-t)|\, dt$$

$$= e^{-\alpha t^*} \int_{t^*}^{-A} e^{-\alpha(t-t^*)}|u(t) \cdot \eta(x, x-t)|\, dt.$$

Da $t^* \geqq \frac{l}{a}\lg 2$ ($x \geqq x_2 \geqq 2$) ist, so ist $|u(t)| \leqq N$ und wegen Bedingung (B) $|\eta| < C$.

Also ist

$$\left|\int_{t^*}^{-A}\right| \leqq N \cdot C \int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{NC}{a},$$

$$I_1 \leqq \frac{NC}{a} e^{-at^*} = \frac{NC}{a} x^{-l}.$$

I_3 schätzt sich ähnlich, sogar noch einfacher ab, da man jetzt $x+t$ statt $x-t$ hat. Hier ist sogar $|\eta| < \frac{C}{|x|^l}$.

$$I_3 = \int_{-t^*}^{+t^*} = \int_{-t^*}^{0} + \int_0^{t^*}$$

$$\int_0^{t^*} \leqq \frac{C}{|x|^l} \int_0^\infty |K_0(t)|\,dt < \frac{C_1}{|x|^l}.$$

Im anderen Intervall ist $x \geqq x+t \geqq x-t^*$ also nach Bedingung (B)

$$\int_{-t^*}^{0} |K_0(t) \cdot \eta(x,\, x+t)|\,dt \leqq \frac{C}{\left(x - \frac{l}{a}\lg x\right)^l} \int_0^\infty |K_0(t)|\,dt$$

$$< \frac{C_2}{x^l}, \text{ da } x - \frac{l}{a}\lg x \geqq \frac{x}{2}.$$

Also $I \leqq \frac{C}{|x|^l}$, w. z. b. w.

Wir bemerken zunächst, daß für das Quadrat des eben benutzten Integranden eine ganz ähnliche Abschätzung gilt, nur tritt statt l jetzt $2\,l$ auf. Es ist $K_0(t)^2 = e^{-2a|t|} u^2(t)$, wo jetzt $u^2(t)$ bei $t=0$ wie $(\lg t)^2$ unendlich werden kann; dies bringt natürlich keine Schwierigkeit herein. Es gilt also

$$\int_B^A K_0(t)^2 \eta^2(x, x+t)\,dt \leqq \frac{C}{|x|^{2l}}.$$

Dies benutzen wir zum Beweis der Vollstetigkeit des Kerns $K_1(x,y) = K_0(x,y)\,\eta(x,y)$.

Der Kern $K_1(x,y)$ ist vollstetig (vgl. Ca, S. 118), wenn für jede Folge quadratisch integrabler Funktionen $\{f_n(x)\}$, für welche

$$f_n(x) = 0 \text{ für } |x| > A_n \quad (A_n < \infty \text{ sonst beliebig}),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \int_{-A_n}^{A_n} f_n^2(x)\,dx \leqq 1$$

gilt,

$$\lim_{n\to\infty} \int\int K_1(x,y) f_n(x) f_n(y)\,dx\,dy = 0$$

ist. Nun ist

$$|\int K_1(x,y) f_n(y)\, dy| \leqq \sqrt{\int K_1^2(x,y)\, dy} \cdot \sqrt{\int f_n^2(y)\, dy}$$

$$\leqq \frac{C}{|x|^l} \text{ für } |x| \geqq x_2$$

für $|x| < x_2$ schreiben wir

$$\int K_1^2(x,y)\, dy = \int_{-x_1}^{x_1} K_1^2(x,y)\, dy + \int_{|y|>x_1} K_1^2(x,y)\, dy.$$

Nach Voraussetzung (C) ist der erste Posten unter einer nur von x_1 abhängigen Schranke. Im zweiten Posten ist wegen (B) $\eta^2 \leqq C^2$

$$\int_{|y|>x_1} K_1^2(x,y)\, dy \leqq 2C^2 \int_0 K_0^2(t)\, dt < C_1$$

gleichmäßig in x.

Also ist

$$|\int K_1(x,y) f_n(y)\, dy| \leqq g(x),$$

wo

$$g(x) = C_2 \qquad (|x| < x_2)$$

$$= \frac{C}{|x|^l} \qquad (|x| \geqq x_2)$$

gesetzt wurde.

$g(x)$ ist quadratisch integrierbar wegen $l > \frac{3}{2}$ und $\int f_n^2(x)\, dx \leqq 1$. Nach einem Satze von F. Riesz (vgl. Ca, S. 20, Nr. 8) darf man unter dem Integralzeichen zur Grenze gehen, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x)|\, g(x)\, dx = 0$$

w. z. b. w.

Aus der Vollständigkeit des Zusatzkerns $K_1(x,y)$ folgt, wie bereits erwähnt, die Gleichheit der Streckenspektra von K und K_0.

§ 4.

Die inhomogene Gleichung des Kerns $K_0(x-y)$ für einen Punkt des Spektrums.

Für die späteren Abschätzungen benötigen wir eine Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung

(5) $$\varphi(x) - \lambda \int K_0(x-y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

für einen Wert $\lambda > 1$ des Spektrums von K_0. Dies bietet natürlich keine besonderen Schwierigkeiten, jedoch ist mir eine für unseren Zweck ausreichende Behandlung dieses Falles nicht bekannt[6]).

Von der Funktion $f(x)$ in (5) setzen wir voraus, daß sie absolut und quadratisch in $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist. Wir ziehen nur solche Funktionen $\varphi(x)$ als Lösungen in Betracht, für welche $\varphi(x) - f(x)$ beschränkt ist.

Es sei zunächst $\lambda = \lambda^*$ komplex. Dann hat (5) bekanntlich eine quadratisch integrierbare Lösung (Ca, Kap. II, th. I_2, S. 55) und zwar nur eine, weil $K_0(x-y)$ als beschränkter Kern zur ersten Klasse gehört; dies bedeutet ja gerade, daß die homogene Gleichung für komplexe Werte von λ keine Lösung besitzt (vgl. Ca, Introduktion S. 4 und S. 78). Die Lösung $\varphi(x)$ läßt sich in bekannter Weise durch die Resolvente $R_\lambda(x-y)$ von $K_0(x-y)$ darstellen. Wir setzen demgemäß

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\alpha t}}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\,d\alpha = R_{\lambda^*}(t). \tag{6}$$

R_{λ^*} hat dieselben wesentlichen Eigenschaften wie $K_0(t) = e^{-a|t|}u(t)$. Dies erkennt man leicht durch Bildung der Differenz $R_{\lambda^*}(t) - K_0(t)$, deren Fourier-Transformierte gleich $\frac{\lambda^*}{\lambda(\alpha)(\lambda(\alpha)-\lambda^*)}$ ist. Andererseits kann der Integrationsweg in (6) von $ib - \infty$ bis $ib + \infty$ gelegt werden. Es muß allerdings $|b|$ so klein sein, daß in einem hinreichend großen β-Intervall $|J(\lambda(\beta + ib))| < |J(\lambda^*)|$ bleibt. Nun setzen wir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda^* \int R_{\lambda^*}(x-y)f(y)\,dy \tag{7}$$

und zeigen, daß dies in der Tat die Gleichung (5) befriedigt.

Wir setzen (7) in die linke Seite von (5) ein, wobei zu beachten ist, daß K_0 und R_{λ^*} bei festem x für $y \to \infty$ exponentiell abfallen und für $x = y$ höchstens logarithmisch unendlich werden. Da $f(x)$ auch quadratisch integrierbar ist, so folgt leicht aus der Schwarzschen Ungleichung, daß $\int R_{\lambda^*}(y-z)f(z)\,dz$ als Funktion von y zum mindesten beschränkt ist. Die folgenden Integrale haben also einen Sinn.

$$\begin{aligned} &f(x) + \lambda^* \int R_{\lambda^*}(x-y)f(y)\,dy - \lambda^* \int K_0(x-y)f(y)\,dy \\ &\quad - \lambda^{*2} \int K_0(x-y)\,dy \int R_{\lambda^*}(y-z)f(z)\,dz. \end{aligned} \tag{8}$$

---

[6]) Benutzt man Fourier-Transformation (Bo, Satz 34 und § 33_7), so muß man schärfere Voraussetzungen über die Transformierte von $K_0(t)$ machen. $\frac{1}{\lambda(\alpha)}$ müßte absolut integrabel sein, was z. B. in einem später behandelten Falle (S. 39, $\lambda(\alpha) = \alpha$ Ştg α), der physikalisch wichtig ist, nicht zutrifft.

Im letzten Integral können die Integrationen vertauscht werden. Dies folgt leicht aus dem Fubinischen Satz, wenn man bedenkt, daß das erste Integral auch noch bei absolut genommenen Funktionen existiert und daß die Funktion $K_0(x-y)\,R_{\lambda^*}(y-z)\,f(z) = \Phi(y,z)$ meßbar ist (Bo, S. 209 und 212). (8) erhält dann die Form

$$f(x) + \lambda^* \int f(y)\,dy\,\{R_{\lambda^*}(x-y) - K_0(x-y) - \lambda^* \int K_0(x-z)\,R_{\lambda^*}(y-z)\,dz\}.$$

Daß die geschweifte Klammer aber verschwindet, ergibt sich leicht durch Übergang zu den Fouriertransformierten, wenn man berücksichtigt, daß die Transformierte der Faltung gleich dem Produkt der Transformierten von K_0 und R_{λ^*} ist (Bo, § 13, insbesondere Satz 13).

Nun verlegen wir in (7) den Integrationsweg[7]). α laufe von $\pm ia - \infty$ bis $\pm ia + \infty$. Jetzt muß aber das Residuum hinzugefügt werden, indem wir annehmen, daß der Imaginärteil von λ^* genügend klein ist. Man erhält zunächst unter Benutzung von Hilfssatz II

$$\int R_{\lambda^*}(x-y)\,f(y)\,dy = \int dy\,f(y)\,\frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\alpha(x-y)}}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\int e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy.$$

Wir zerlegen

$$\int e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy + \int_{x} e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy.$$

Da im ersten Integral $x - y \geqq 0$ ist, so bekommen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\int_{-\infty}^{x} e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\int_{-\infty}^{x} e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy$$

$$+ 2\pi i\,\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha^*}}\int_{-\infty}^{x} e^{i\alpha^*(x-y)}\,f(y)\,dy.$$

---

[7]) Dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen Bedingung (A) die Integrale über die Verbindungswege, z. B.

$$\int_{\beta}^{\beta+ia} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*}\int_{-\infty}^{x} e^{i\alpha(x-y)}\,f(y)\,dy,$$

mit wachsendem β beliebig klein werden, da $e^{i\alpha(x-y)}$ wegen $\alpha > 0$ kleiner als 1 ist, und $f(y)$ absolut integrierbar ist.

Hierbei ist $\lambda(\alpha^*) = \lambda^*$ und $J(\alpha^*) > 0$. Wegen Voraussetzung (A) ist die Nullstelle von $\lambda(\alpha) - \lambda^*$ in der Tat einfach, und $\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha^*} \neq 0$, wenn λ^* genügend nahe an der reellen Achse liegt. Ähnlich erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*} \int_x^{} e^{i\alpha(x-y)} f(y)\,dy = \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*} \int_x^{} e^{i\alpha(x-y)} f(y)\,dy$$

$$- \frac{2\pi i}{\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{-\alpha^*}} \int_x^{} e^{-i\alpha^*(x-y)} f(y)\,dy$$

Da nun $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha)$, so bekommen wir schließlich

$$\lambda^* \int R_{\lambda^*}(x-y) f(y)\,dy = i \frac{\lambda^*}{\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha^*}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha^*|x-y|} f(y)\,dy$$

$$+ \frac{\lambda^*}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha|x-y|} f(y)\,dy$$

$$(9) \qquad \varphi(x) = f(x) + i\frac{\lambda^*}{\varrho^*} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha^*|x-y|} f(y)\,dy$$

$$+ \frac{\lambda^*}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)-\lambda^*} \int e^{i\alpha|x-y|} f(y)\,dy, \quad \varrho^* = \left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha^*}, \quad J(\alpha^*) > 0.$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für $\varphi(x)$, der es uns gestattet, den Übergang $\lambda^* \to \lambda_0$ (λ_0 reell > 1) zu vollziehen. Im letzten Integral kann man je nach Bedürfnis die Integrationen vertauschen. Man überzeugt sich unter Benutzung von $J(\alpha^*) > 0$, daß in der Tat $\varphi(x)$ quadratisch integrierbar ist. Dies wird sich aber im allgemeinen verlieren für $\lambda^* \to \lambda_0$. Wir schreiben analog

$$\alpha^* \to \alpha_0, \qquad \varrho^* \to \varrho_0.$$

Offenbar konvergiert der zweite Posten in (9) wegen der absoluten Integrierbarkeit von $f(x)$ gleichmäßig in jedem endlichen x-Intervall. Im letzten Integral vertauscht man zuerst die Integrationen und betrachtet die Differenz

$$\int f(y)\,dy \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{i\alpha|x-y|} \left(\frac{1}{\lambda(\alpha)-\lambda^*} - \frac{1}{\lambda(\alpha)-\lambda_0}\right) d\alpha$$

$$= (\lambda^* - \lambda_0) \int f(y)\,dy \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\alpha|x-y|}}{(\lambda(\alpha)-\lambda^*)(\lambda(\alpha)-\lambda_0)}\,d\alpha.$$

Dies konvergiert also sogar gleichmäßig für beliebige x. Der letzte Posten in (9) ist offenbar auch für $\lambda^* = \lambda_0$ noch quadratisch integrabel. Anders der zweite. Es ist

$$(10) \quad \frac{i\lambda_0}{\varrho_0}\int e^{i\alpha_0|x-y|} f(y)\,dy = \frac{i\lambda_0}{\varrho_0}\int \cos\alpha_0 (x-y) f(y)\,dy - \frac{i\lambda_0}{\varrho_0}\int \sin\alpha_0 |x-y| f(y)\,dy.$$

Das erste Glied, welches allein imaginär ist, stellt offenbar eine Lösung der homogenen Gleichung dar. Wir können es fortlassen. Es fragt sich nun, ob unter allen möglichen Lösungen eine quadratisch integrierbare vorhanden ist. Addieren wir eine Lösung der homogenen hinzu, nämlich

$$\frac{\lambda_0}{\varrho_0}\int \sin\alpha_0 (x-y) f(y)\,dy$$

so bekommen wir

$$(9a)\ \varphi(x) = f(x) + \frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\int_x \sin\alpha_0 (x-y) f(y)\,dy + \lambda_0 \int f(y) S(x-y)\,dy,$$

wenn wir noch

$$\frac{1}{2\pi}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{i\alpha|t|}}{\lambda(\alpha)-\lambda_0} d\alpha = S(t)$$

setzen. Nun geht $\int_x \sin\alpha_0 (x-y) f(y)\,dy$ gegen Null, wenn x gegen $+\infty$ strebt. Geht dagegen $x \to -\infty$, so erhalten wir etwa für $x = -\frac{n\pi}{\alpha_0}$

$$\int_x \sin\alpha_0 (x-y) f(y)\,dy = \pm \int_{x=\frac{n\pi}{\alpha_0}} \sin\alpha_0 y f(y)\,dy.$$

Dies verschwindet für $x \to -\infty$ nur, wenn $f(x)$ zur Funktion $\sin\alpha_0 y$ orthogonal ist. Allgemein ergibt sich, daß $\varphi(x)$ für $x \to -\infty$ keinem bestimmten Grenzwert zustrebt, sondern sich asymptotisch wie $C_1 \sin\alpha_0 x + C_2 \cos\alpha_0 x$ verhält. Das in Rede stehende Integral strebt dann und nur dann auch für $x \to -\infty$ gegen Null, wenn $f(x)$ zu den Lösungen der homogenen Gleichung orthogonal ist. Ist dies jedoch nicht der Fall, so geht $\varphi(x)$ nur nach einer Seite gegen Null, nach der anderen jedoch nicht. Man kann es also durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung nicht erreichen, daß $\varphi(x)$ quadratisch integrierbar wird. Dies ist ein gewisses Analogon zu gewissen Tatsachen bei nichtsingulären Integralgleichungen. Wenn aber $f(x)$ die Orthogonalitätsbedingung erfüllt, so wird es zwar eine Lösung geben, die nach beiden Seiten gegen Null geht, aber im allgemeinen noch nicht absolut oder quadratisch integrierbar ist. Dazu benötigt man speziellere Voraussetzungen über $f(x)$.

Daß schließlich jede Lösung $\overline{\varphi}(x)$ die Form von $\varphi(x)$ in (9a) besitzt, folgt daraus, daß aus der Beschränktheit von $\overline{\varphi} - f$ dasselbe für $\overline{\varphi} - \varphi$ folgt. Dies ist also eine beschränkte Lösung der homogenen Gleichung; nach Bo, Seite 137 (7) kann dies nur $\sin \alpha_0 x$ oder $\cos \alpha_0 x$ sein.

Wir haben somit folgenden Satz gewonnen:

Satz 1. *Die Gleichung* (5) *hat für Werte* $\lambda_0 > 1$ *des Spektrums sicher dann eine Lösung, wenn* $f(x)$ *absolut und quadratisch integrierbar ist. Die Lösung hat dann und nur dann Grenzwerte für* $|x| \to \infty$, *nämlich Null, wenn* $f(x)$ *zu den Lösungen der homogenen Gleichung orthogonal ist. Andernfalls nähert sich die Lösung nach wenigstens einer Seite asymptotisch einer Lösung der homogenen Gleichung. Sie ist in der Form* (9a) *darstellbar.*

In § 26 des Buches von Bochner wird bewiesen, daß die Bedingung, daß $\int^{x} f(x) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \alpha x\, dx = -\int_{x} f(x) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \alpha x\, dx$ absolut integrierbar ist (Satz 34, 2.), hinreicht für die Existenz einer absolut integrablen Lösung. Falls $f(x)$ außerdem quadratisch integrierbar ist, folgt aus (9a) auch die Notwendigkeit dieser Bedingung.

§ 5.

Existenz von Lösungen der Gleichung (3) für gewisse Punkte des Spektrums.

Wir müssen den Grundkern $K_0(t)$ nun noch zwei Forderungen unterwerfen, die offenbar nicht in der Natur der Sache liegen, sondern durch die Methode bedingt sind. Am Schluß wird noch auf eine Möglichkeit hingewiesen, diesen Mangel zu beseitigen, jedoch ist mir die vollständige Durchführung noch nicht gelungen.

(G) *Die Funktion* $S(t)$ *(vgl.* (9a)*) soll das Zeichen nicht wechseln.*

(H) *Für passende Werte* $\lambda_0 \geqq 1$ sei

$$\left| \frac{\lambda_0^2}{2} \int_0^\infty S(t)\, dt \right| < 1.$$

Die Bedingung (H) ist z. B. für $\lambda_0 = 2$ erfüllt, wenn *die Ableitung* $\frac{d\lambda(\alpha)}{d\alpha}$, die ja positiv ist, für $\alpha > 0$ *monoton wächst.* Dies wollen wir gleich beweisen.

$$\int_0 S(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0 dt \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{\lambda(\alpha) - \lambda_0} d\alpha.$$

Die Integrationen dürfen nach Hilfssatz II vertauscht werden, da sich im inneren Integral der Faktor e^{-at} abspalten läßt. Dann ergibt sich wegen $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha)$

$$\int S(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{d\alpha}{i\alpha(\lambda(\alpha)-\lambda_0)} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} \frac{d\alpha}{i\alpha(\lambda(\alpha)-\lambda_0)}.$$

Der Integrand hat bei $\alpha = 0$ und $\alpha = \pm\alpha_0$ je einen einfachen Pol. Aus der Berechnung der Residuen folgt leicht

$$\left|\frac{\lambda_0^3}{2}\int S(t)\,dt\right| = \left|\frac{\lambda_0^3}{4}\left[\frac{1}{1-\lambda_0} + \frac{2}{\alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}}\right]\right|.$$

Aus der Monotonie von $\lambda'(\alpha)$ folgt

$$\lambda(\alpha_0) = \lambda(0) + \alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\vartheta\alpha_0} = 1 + \alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\vartheta\alpha_0} < 1 + \alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}$$

und daraus

$$\left|\frac{\lambda_0^3}{4}\left[\frac{1}{1-\lambda_0} + \frac{2}{\alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}}\right]\right| < \frac{\lambda_0^3}{4}\,\frac{1}{\lambda_0 - 1}$$

Dies ist gleich 1 für $\lambda_0 = 2$. Daß wirklich das $<$ Zeichen und nicht $\leqq$ gilt, folgt aus dem Umstande, daß $\lambda'(0) = 0$ ist, und der Monotonie von $\lambda(\alpha)$. Damit ist aber die Behauptung bewiesen.

Nun sei $B_n > A$. Wir betrachten die Integralgleichungen

$$\varphi_n(x) - \lambda\int_A^{B_n} K(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy = 0. \tag{11}$$

Für $B_n \to \infty$ häufen sich die Eigenwerte dieser Integralgleichungen gegen alle Punkte des Spektrums von K_0. Aus einer schon herangezogenen Arbeit von Wiener und Hopf (a. a. O. [5])) ergibt sich nämlich, daß die „halbe" Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^{\infty} K_0(x-y)\,\varphi(y)\,dy \tag{12}$$

ebenfalls für jedes $\lambda > 1$ je eine beschränkte Lösung besitzt, die asymptotisch gleich einer gewissen Kombination der beiden Lösungen der „ganzen" Gleichung ist. Der Kern der Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda\int_A^{\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \tag{13}$$

unterscheidet sich offenbar wieder nur um einen vollstetigen Kern von dem Kern der vorigen Gleichung. Sein Streckenspektrum ist also dasselbe wie das von (12). Nun erhält man die Spektralfunktion von (13) durch Grenzübergang aus den Eigenfunktionen von (11) (vgl. Ca, S. 26 ff).

Wenn nun bei diesem Grenzübergang ein Intervall des Spektrums von (13) für immer größere n frei von Eigenwerten von (11) bliebe, so wäre dort die Spektralfunktion konstant bezüglich λ im Widerspruch zur Annahme, daß es sich um einen Teil des Streckenspektrums handeln sollte.

Aus unseren Betrachtungen wird sich nun die Existenz einer Lösung sowohl der Gleichung (13), sowie der vollen Gleichung (3) ergeben.

Aus Bedingung (E) folgt, daß eine Lösung von (11) für $x \neq \xi_\nu$ stetig ist. Wir normieren $\varphi_n(x)$ durch

$$\text{fin sup}_{x \neq \xi_\nu} |\varphi_n(x)| = 1. \tag{14}$$

Lassen wir nun λ eine Folge von Eigenwerten λ_n durchlaufen, die sich gegen ein $\lambda_0 > 1$ des Spektrums häufen, so erhalten wir für $x \neq \xi_\nu$ eine Folge von gleichgradig stetigen Funktionen. Es sei $\varphi(x)$ die Grenzfunktion einer passend ausgewählten Teilfolge. Dann ist zu zeigen, daß sie nicht identisch verschwindet.

Wir definieren $\varphi_n(x)$ über A und B_n hinaus durch die Festsetzung

$$\varphi_n(x) \equiv 0 \quad \begin{matrix} x < A \\ x > B_n \end{matrix} \tag{15}$$

und schreiben

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy = \lambda_n \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy \tag{16}$$

$$A \leqq x \leqq B_n.$$

Setzen wir

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy = f_n(x) \tag{16a}$$

so ist nach unserer Definition

$$f_n(x) = \lambda_n \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy, \quad A \leqq x \leqq B_n$$

sonst

$$= -\lambda_n \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy.$$

Offenbar ist im Äußeren des Intervalls $[A, B_n]$

$$|f_n(x)| \leqq \lambda_n \int_A^{B_n} |K_0(x-y)|\,dy$$

speziell für $x > B_n$

$$|f_n(x)| \leqq \lambda_n e^{-a(x-B_n)} \int_{-\infty}^{0} K_0(t)\,dt = \frac{\lambda_n e^{-a(x-B_n)}}{2}. \tag{17}$$

weil nach (2a) $K_0(t)$ positiv ist.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß für vorgegebenes ε, δ und beliebig großes x^* n so gewählt werden kann, daß

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon, \quad |x| > x^*, \quad |x - \xi_\nu| \geqq \delta. \tag{18}$$

Der Übersichtlichkeit halber sehen wir von den ξ_ν ab. Ihr Vorhandensein würde nur Korrekturen von der Größenordnung δ oder $\delta \log \delta$ bedingen, für $\delta = \varepsilon^2$ also von kleinerer Ordnung als ε.

Nun setzen wir die Abschätzung von $f_n(x)$ fort. Sei zunächst $x < A$. Für $A \leqq y \leqq x^*$ ist $|\varphi_n(x)| \leqq \varepsilon$. Wir zerspalten wie folgt

$$\lambda_n \int_A^{B_n} K_0(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy = \lambda_n \left\{ \int_A^{x^*} + \int_{x^*}^{B_n} \right\};$$

ähnlich wie vorher ergibt sich

$$\left| \int_A^{x^*} K_0(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy \right| \leqq \varepsilon \int_A^{x^*} K_0(x-y)\, dy \leqq \frac{\varepsilon}{2} e^{-a(A-x)}$$

$$\left| \int_{x^*}^{B_n} K_0(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy \right| \leqq \int_{x^*}^{B_n} K_0(x-y)\, dy \leqq e^{-a(x^*-x)} \int_{x^*}^{\infty} e^{-a(y-x^*)} u(x-y)\, dy$$

und hieraus

$$|f_n(x)| < C_1 \varepsilon e^{-a(A-x)} + C_2 e^{-a(x^*-x)} \tag{17a}$$
$$\leqq C_1 \varepsilon e^{-a(A-x)} + C_2 e^{-a(x^*-A)} \quad (x < A).$$

Bezeichnen wir allgemein nur von x^* abhängige Größen, die mit $\frac{1}{x^*}$ gegen Null gehen, mit $\bar{\varepsilon}$, so folgt, da A fest bleibt,

$$|f_n(x)| < C_1 \varepsilon + C_2 \bar{\varepsilon} \qquad (x < A). \tag{17b}$$

Wegen (17) und (17a) ist $f_n(x)$ absolut und quadratisch in $(-\infty, +\infty)$ integrierbar, $\varphi_n(x)$ also in der Form (9a) darstellbar. Da $\varphi_n(x)$ für große $|x|$ verschwindet, so muß $f_n(x)$ nach Satz 1 zu den Funktionen $\sin \alpha_n x$, $\cos \alpha_n x$ orthogonal sein. Wir nehmen natürlich an, daß n bereits so groß ist, daß $\lambda_n > 1$; λ_0 war ja größer als 1 vorausgesetzt.

Sei jetzt

$$A \leqq x \leqq B_n.$$

Wir können annehmen

$$x^* > x_2, |A|.$$

Für $|x| > x_2$ und x in $[A, B_n]$ ist nach Hilfssatz III

$$|f_n(x)| < \frac{C}{|x|^2}$$ [8])

[8]) C ist hier wie stets im folgenden Allgemeinbezeichnung für eine Konstante, die unabhängig von n ist.

für $|x| > x^*$ ist also $|f_n(x)| < C\bar{\varepsilon}$. Für $|x| \leqq x^*$ aber gilt

$$|f_n(x)| < \varepsilon \lambda_n \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,|\eta(x,y)|\,dy.$$

Aus den Voraussetzungen (B) und (C) folgt leicht, daß $\int_A^{B_n} K_0(x-y)\,|\eta(x,y)|\,dy$ unter einer von B_n und A unabhängigen Schranke liegt. Also ist schließlich

$$(19)\quad \begin{cases} |f_n(x)| < C_1\varepsilon + C_2\bar{\varepsilon} & (x \text{ in } [-\infty, B_n]) \\ \text{speziell} \\ |f_n(x)| < C\varepsilon,\ (|x| \leqq x^*);\ |f_n(x)| < C\bar{\varepsilon},\ (|x| > x^*) \\ |f_n(x)| < \dfrac{C}{|x|^l}\ \left(l > \dfrac{3}{2}\right)\quad (|x| > x_2). \end{cases}$$

Nun schätzen wir zunächst das dritte Glied von (9a) ab, wenn x in $[A, B_n]$ läuft

$$\lambda_n \int f_n(y)\,S(x-y)\,dy = \lambda_n\left(\int_{B_n}^{B_n} + \int_{B_n}^{\infty}\right)$$

$$(20)\quad |\lambda_n \int_{B_n}^{B_n} f_n(y)\,S(x-y)\,dy| < \lambda_n(C_1\varepsilon + C_2\bar{\varepsilon}) \int |S(t)|\,dt = C_1\varepsilon + C_2\bar{\varepsilon}$$

$$|\lambda_n \int_{B_n}^{\infty} f_n(y)\,S(x-y)\,dy| \leqq \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{B_n}^{\infty} e^{-a(y-B_n)}\,S(x-y)\,dy,$$

wenn wir etwa $S(t)$ nach (G) als positiv annehmen. Nun ist nach Definition $S(t)$ von der Form $e^{-a|t|}v(t)$. wo $v(t)$ für $t = 0$ höchstens logarithmisch unstetig wird.

Wegen $y \geqq B_n \geqq x$ erhalten wir

$$S(x-y) = e^{-a(y-x)}v(x-y) = e^{-a(y-B_n)-a(B_n-x)}v(x-y),$$

also schließlich wegen $|f_n(x)| < \frac{\lambda_n}{2}$ (vgl. (17)).

$$(21\,a)\quad |\lambda_n \int_{B_n}^{\infty} f_n(y)\,S(x-y)\,dy| \leqq \frac{\lambda_n^2}{2}\,e^{-a(B_n-x)} \int_{B_n}^{\infty} e^{-a(y-B_n)}\,v(x-y)\,dy$$

$$\leqq C\,e^{-a(B_n-x)},$$

da $v(t)$ für $t > 0$ beschränkt ist. Diese Abschätzung benötigen wir für kleine x. Wir brauchen nachher noch eine andere Abschätzung desselben Gliedes, die wir hier gleich mit ableiten wollen. Nach (17) ist für $y > B_n$

$$|f_n(y)| \leqq \frac{\lambda_n}{2},$$

also

$$|\lambda_n \int_{B_n}^{\infty} f_n(y)\, S(x-y)\, dy| \leqq \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{B_n}^{\infty} S(x-y)\, dy \leqq \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{x}^{\infty} S(x-y)\, dy$$

$$= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{0}^{\infty} S(t)\, dt \quad (x \text{ in } [A, B_n]).$$

Wegen $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda_0$ ist für hinreichend große n (alle $n > n_0$) nach Bedingung (H)

$$|\lambda_n \int_{B_n}^{\infty} f_n(y)\, S(x-y)\, dy| \leqq \frac{\lambda_n^2}{2} \int_{0}^{\infty} S(t)\, dt < 1. \tag{21 b}$$

In ganz analoger Weise wie (21 a) aus (17) folgt aus (17 b)

$$|\lambda_n \int_{-\infty}^{A} f_n(y)\, S(x-y)\, dy| \leqq (C_1 \varepsilon + C_2 \bar{\varepsilon})\, e^{-a(x-A)}, \tag{21 c}$$

Nun das Glied

$$\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{x} \sin \alpha_n (x-y) f(y)\, dy.$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$-\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{0} \sin \alpha_n y f(y)\, dy.$$

Andererseits hat es den Wert

$$\varphi_n(0) - f_n(0) - \lambda_n \int f_n(y)\, S(-y)\, dy.$$

Aus (19), (21 a), (21 c) und unserer Annahme folgt mithin

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{0} \sin \alpha_n y f(y)\, dy\right| < (1+C)\varepsilon + C^* e^{-a B_n} + C_1^* \varepsilon < C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon, \tag{22 a}$$

wenn B_n genügend groß ist. Ähnlich ergibt sich, indem man $x = \frac{\pi}{2\alpha_n}$ setzt,

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{\frac{\pi}{2\alpha_n}} \cos \alpha_n (y) f_n(y)\, dy\right| < C_1 \varepsilon + C_2 \bar{\varepsilon}.$$

α_n kann zwar beliebig klein sein, bleibt aber beim Grenzprozeß fest; man hat nur n genügend groß zu wählen und entsprechend x^*. Aus (19) folgt sofort

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{0}^{\frac{\pi}{2\alpha_n}} \cos \alpha_n y f_n(y)\, dy\right| < C\varepsilon$$

und schließlich

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_0^{\infty}\cos\alpha_n y\, f_n(y)\,dy\right| < C_1\varepsilon + C_2\bar{\varepsilon}. \tag{22b}$$

Nun schätzen wir dieselben Integrale für beliebiges x in $[A, B_n]$ ab. Da wir x^* und ε beliebig vorgeben dürfen, können wir es so einrichten, daß auch

$$x^*\cdot\varepsilon = \varepsilon_1$$

gegen Null strebt. Wir geben jetzt zunächst ε_1 und x^* vor; daraus erhält man $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{x^*}$, und wir können immer noch ein B_n bestimmen, so daß

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \qquad |x| \leqq x^*$$

Dann ist, falls $x \leqq x^*$

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_x^{x^*}\sin\alpha_n(x-y)\,f_n(y)\,dy\right| < C\,x^*\,\varepsilon = C_1\varepsilon_1. \tag{23a}$$

Für $x > x^*$ ist aber $|f_n(x)| < \frac{C}{|x|^l}$, also

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_{x^*}^{B_n}\sin\alpha_n(x-y)\,f_n(y)\,dy\right|$$

$$< \frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_{x^*}^{B_n}\frac{C}{x^l}\,dx = \frac{2\lambda_n C}{\varrho_n(l-1)}\left(\frac{1}{x^{*l-1}} - \frac{1}{B_n^{l-1}}\right) \leqq C\bar{\varepsilon}. \tag{23b}$$

Aus (22) und (23) folgt schließlich

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_{B_n}^{\infty}\sin\alpha_n(x-y)\,f_n(y)\,dy\right| < C_1\varepsilon_1 + C_2\bar{\varepsilon}. \tag{24}$$

Für ein beliebiges x in $[A, B_n]$ folgt aus (23) und (24)

$$\left|\frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_x\sin\alpha_n(x-y)\,f_n(y)\,dy\right| < C_1\varepsilon_1 + C_2\bar{\varepsilon}. \tag{25}$$

Aus (19), (20), (21c) und (25) ergibt sich

$$\left|f_n(x) + \frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_x\sin\alpha_n(x-y)\,f_n(y)\,dy + \lambda_n\int^{B_n} f_n(y)S(x-y)\,dy\right| \tag{26}$$

$$< C_1\varepsilon_1 + C_2\bar{\varepsilon}.$$

Wegen $\lambda_n \to \lambda_0$ können wir annehmen, daß etwa (vgl. (H))

$$\frac{\lambda_n^2}{2}\int_0 S(t)\,dt < 1-\eta, \quad n > n_0, \quad \eta > 0. \tag{27}$$

Da nun $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}$ mit wachsendem n gegen Null streben, die Konstanten C aber fest bleiben, so gibt es ein n_1, so daß für alle $n > n_1$

$$(26\,a)\quad \left| f_n(x) + \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_x^{B_n} \sin \alpha_n (x-y) f_n(y)\, dy + \lambda_n \int_x^{B_n} f_n(y) S(x-y)\, dy \right| < \frac{\eta}{2}, \qquad (x \text{ in } [A, B_n]).$$

Aus (9a), (27) und (21b) folgt dann

$$(27\,a)\quad |\varphi_n(x)| < 1 - \frac{\eta}{2}, \qquad (x \text{ in } [A, B_n])$$

im Widerspruch zur Annahme

$$\text{fin sup}\, |\varphi_n(x)| = 1.$$

Der Schluß gilt offenbar für *jedes* B_n, das größer als ein gewisses B_0 ist. Es gibt also ein festes x^*, so daß für *alle* $B_n > B_0$ die obere Grenze von $|\varphi_n(x)|$ für $|x| \leqq x^*$ größer als eine feste positive Zahl δ ist. Die Abschätzung (27a) gilt ebenso wie (26a) für *alle* x, auch wenn Stellen ξ_ν vorhanden sind. Damit ist endlich der Beweis erbracht, daß für keine konvergente Teilfolge die Grenzfunktion $\varphi(x)$ identisch verschwinden kann.

Es sei hier gleich auf einen speziellen Fall hingewiesen, in welchem die Bedingung (G) und (H) sicher erfüllt sind, wenn nämlich $\frac{1}{\lambda(\alpha) - \lambda}$ für $\lambda > 1$ den einzigen (reellen) Pol $\alpha = \alpha_0$ besitzt und sonst überall analytisch ist, z. B. $\lambda(\alpha) = 1 + \alpha^2$. Dies führt auf den Picardschen Kern $K_0(t) = e^{-|t|}$. Da man in $S(t)$ den Integrationsweg beliebig weit verschieben kann, folgt

$$S(t) \equiv 0.$$

Weitere Bemerkungen über diese Bedingungen folgen in einem besonderen Paragraphen über Anwendungen.

Der eben geführte Beweis gilt natürlich auch, wenn man die obere Grenze B festhält, und $A = A_n \to -\infty$ wandern läßt, oder wenn man beide Grenzen verschiebt. Im letzteren Falle ändert sich nur die Abschätzung (21c) etwas. Der Faktor von $e^{-\alpha(x-A)}$ braucht jetzt nicht gegen Null zu gehen, weil $-A$ ja auch wächst. Jedoch geht z. B. bei der Abschätzung für $x > x^*$ $e^{-\alpha(x^*-A)}$ stark gegen Null für $n \to \infty$. Analoges gilt, wenn $x < -x^*$.

Daß die Grenzfunktion wirklich die Integralgleichung befriedigt, ergibt sich leicht daraus, daß für festes x $K(x, y)$ exponentiell gegen Null abfällt, wenn $|y|$ wächst, in Verbindung mit der Tatsache, daß in jedem beliebigen endlichen Intervall, das keinen der Punkte ξ_ν enthält, $\varphi_n(x)$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ strebt.

§ 6.

Asymptotische Darstellung der Lösung.

Wir nehmen an, daß für $\lambda = \lambda_0 > 1$ die Integralgleichung

(3) $$\varphi(x) = \lambda \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

bzw.

(3a) $$\psi(x) = \lambda \int_A K(x, y)\, \psi(y)\, dy$$

eine beschränkte, stückweise stetige Lösung besitzt. Dann schreiben wir

$$\chi(x) - \lambda \int K_0(x - y)\, \chi(y)\, dy = \lambda \int K_0(x - y)\, \eta(x, y)\, \chi(y)\, dy = f(x).$$

Wir können hier auch den Fall (3a) einbegreifen durch die Festsetzungen

$$\left.\begin{aligned} \chi(x) &= 0, \\ f(x) &= -\lambda \int_A K_0(x - y)\, \chi(y)\, dy \end{aligned}\right\} \qquad x < A.$$

Es genügt die Betrachtung für große positive x. Nach Hilfssatz III ist $f(x) = O\left(\frac{1}{x^l}\right)$ und zwar im Falle (3) für negative und positive große x, während bei (3a) offenbar $f(x) = O(e^{-\alpha(A-x)})$ für $x < A$ ist. $f(x)$ ist also, wegen $l > \frac{3}{2}$ absolut und quadratisch integrierbar. Sei jetzt x positiv. Wenden wir die Darstellung (9a) an und betrachten zunächst (3a). Ist λ_0 ein Eigenwert und $\psi(x)$ eine quadratisch integrierbare Eigenfunktion, so wird ihre Darstellung offenbar schon durch (9a) geliefert, denn das erste und dritte Glied (Hilfssatz III) haben die Form $O\left(\frac{1}{x^l}\right)$ und das zweite, wie man durch rohe Abschätzung erkennt, die Form $O\left(\frac{1}{x^{l-1}}\right)\left(l - 1 > \frac{1}{2}\right)$. Im Falle, daß λ_0 kein Eigenwert ist, kommt noch eine gewisse Lösung der homogenen Gleichung $c_1 \cos \alpha_0 x + c_2 \sin \alpha_0 x$ hinzu. Analoges gilt für die Gleichung (3). Ist λ_0 kein Eigenwert, so gibt es aber hier zwei Möglichkeiten. Entweder ist $f(x)$ zu den Funktionen $\cos \alpha_0 x$ und $\sin \alpha_0 x$ orthogonal. Dann müssen wir eine passende (nicht näher bekannte) Kombination $c_1 \cos \alpha_0 x + c_2 \sin \alpha_0 x$ hinzufügen. $\varphi(x)$ ist dann asymptotisch bis auf quadratisch integrable Glieder von der Form $O\left(\frac{1}{x^{l-1}}\right)$ gleich $c_1 \cos \alpha_0 x + c_2 \sin \alpha_0 x$. Dies folgt wie bei (3a) aus (9a). Es könnte aber auch sein, daß $f(x)$ nicht orthogonal ist. Dann stellt eventuell (9a) bereits die Lösung dar, die an dem einen Ende gegen Null gehen würde, am anderen Ende aber asymptotisch gegen eine trigonometrische Funktion. Die verschwindenden Terme haben immer die Form $O\left(\frac{1}{x^{l-1}}\right)$, sind aber quadratisch integrierbar wegen $l > \frac{3}{2}$, oder es

kommt dennoch eine Lösung der homogenen hinzu. Dann strebt $\varphi(x)$ an beiden Enden gegen trigonometrische Funktionen, die aber dann verschieden ausfallen. Es ist mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob beide Möglichkeiten wirklich eintreten können.

Bezüglich der Koeffizienten der asymptotisch auftretenden trigonometrischen Funktionen läßt sich noch folgendes sagen.

Wir nehmen an, daß die Approximation in § 5 keine Eigenfunktionen erzeugt. Da $\varphi_n(x) = 0$ außerhalb $[A, B_n]$, so wird $\varphi_n(x)$ wie erwähnt, genau durch (9a) dargestellt. Da ein trigonometrisches Glied auftreten muß von einem Maximalbetrage $k > 0$, so können wir B_n so groß wählen, daß in einem beliebig großen Intervall $[A, x_3]$ $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, wenn $\varphi(x)$ die Grenzfunktion ist. Ist x_2 hinreichend groß und $x_3 > x_2$, so können wir es erreichen, indem wir die Spanne $B_n - x_3$ auch noch genügend groß machen, daß für $x_2 \leqq x \leqq x_3$ alle Summanden von (9a) insgesamt dort $< \varepsilon < \frac{k}{2}$ werden mit Ausnahme von

$$\frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{B_n}^{\infty} \sin \alpha_n (x - \eta) f_n(y)\, dy,$$

weil ja $f(y)$ für $y \geqq B_n$ nicht durchweg klein wird. Dieses Glied strebt dann also gegen das trigonometrische Glied $c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$, d. h.

$$c_1 = - \lim_{n \to \infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{B_n}^{\infty} \sin \alpha_n y f_n(y)\, dy,$$

$$c_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{B_n}^{\infty} \cos \alpha_n y f_n(y)\, dy.$$

Nehmen wir nun den Fall der vollen Gleichung also $B_n \to \infty$, $A_n \to -\infty$, und setzen wir der Einfachheit halber $A_n = -B_n$, dann ergibt sich für das andere Ende analog

$$\bar{c}_1 = + \lim_{n \to \infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{-\infty}^{-B_n} \sin \alpha_n y f_n(y)\, dy,$$

$$\bar{c}_2 = - \lim_{n \to \infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{-\infty}^{-B_n} \cos \alpha_n y f_n(y)\, dy.$$

Da (wegen $\varphi_n(x) = 0$ außerhalb $[-B_n, +B_n]$) z. B.

$$\int \sin \alpha_n y f_n(y)\, dy = 0,$$

so ist

$$\bar{c}_1 = -\lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\left(\int_{-B_n}^{B_n} + \int_{B_n}^{\infty}\right) \sin\alpha_n y f_n(y)\, dy,$$

c_1 und $\bar{c}_1$ unterscheiden sich also um

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_{-B_n}^{B_n} \sin\alpha_n y f_n(y)\, dy.$$

Berücksichtigt man, daß

$$f_n(x) = -\lambda_n \int_{-B_n}^{B_n} K_0(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy,$$

so erhält man

$$\int_{B_n}^{\infty} \sin\alpha_n y f_n(y)\, dy = -\lambda_n \int_{-B_n}^{B_n} \varphi_n(y)\, dy \int_{B_n}^{\infty} K_0(x-y) \sin\alpha_n x\, dx,$$

ersetzt man x durch $-x$ und y durch $-y$, so folgt da
$K_0(t) = K_0(-t)$

$$\int_{B_n}^{\infty} \sin\alpha_n y f_n(y)\, dy = +\lambda_n \int_{-B_n}^{B_n} \varphi_n(-y)\, dy \int_{-\infty}^{-B_n} K_0(x-y) \sin\alpha_n x\, dx.$$

Ganz Analoges ergibt sich für

$$\int_{B_n}^{\infty} \cos\alpha_n y f_n(y)\, dy,$$

nur, daß sich hier das Zeichen nicht ändert. Ist $\varphi_n(x)$ also eine gerade Funktion, so ist in der Tat

$$c_1 = -\bar{c}_1$$
$$c_2 = \bar{c}_2$$

und umgekehrt, wenn $\varphi_n(x)$ ungerade ist. Man kann diese Verhältnisse am besten für den Grundkern $K_0(t) = e^{-(t)}$ studieren, wenn man außerdem $\eta(x,y) = p(x)p(y)$ setzt, dann erhält man $\varphi(x)$ auch als Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Es wird sich wahrscheinlich ein Beispiel konstruieren lassen, wo die asymptotischen Ausdrücke für große positive und negative x durchaus verschieden ausfallen.

§ 7.

Lösung der Integralgleichung für beliebige Werte des Spektrums.

Wir führen den Beweis wieder für den Fall des einseitig ins Unendliche erstreckten Grundgebietes. Er beruht auf einem Induktionsschluß. Für einen Wert λ_0 sei die Existenz einer beschränkten stetigen Lösung

gesichert. Wir zeigen dann, daß für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ auch für $\lambda \pm \varepsilon$ eine solche vorhanden ist, desgleichen, wenn für eine Folge $\lambda_n \to \lambda_0$ Lösungen existieren, daß dann dasselbe für λ_0 gilt. Im ersteren Falle approximieren wir die Lösung durch Lösungen von Gleichungen mit Kernen der folgenden Art:

$$\lambda_0 K_n(x, y) = \lambda K(x, y) \qquad A \leqq x, y \leqq B_n,$$

sonst

$$= \lambda_0 K(x, y) \qquad (\lambda = \lambda_0 \pm \varepsilon).$$

Damit dieser Schluß aber einwandfrei wird, müssen wir weiter voraussetzen, daß auch die Gleichungen mit den $K_n(x, y)$ für $\lambda = \lambda_0$ lösbar sind, und beweisen, daß auch für λ die entsprechenden Gleichungen Lösungen besitzen. Zu diesem Zweck definieren wir allgemein symmetrische Kerne $K_\mu(x, y)$ des folgenden Typs:

(28) $$K_\mu(x, y) = K(x, y) + K_0(x - y) \cdot \mu(x, y) = K_0(x - y)\,(1 + \eta + \mu).$$

Die symmetrische Funktion $\mu(x, y)$ ist nur verschieden von Null, wenn sich beide Variablen im Inneren eines endlichen Intervalles (A, B) bewegen, und genügt denselben Bedingungen wie η, mit möglicherweise anderen Konstanten. Offenbar genügt dann auch $\eta + \mu = \bar{\eta}$ diesen Bedingungen. Man sieht sofort, daß die Kerne $K_n(x, y)$ sich dem eben definierten Typ unterordnen, wenn man

$$\mu = \pm \frac{\varepsilon}{\lambda_0}(1 + \eta) \quad \text{und} \quad B = B_n \text{ setzt.}$$

Wir machen nun die Annahme, *die Integralgleichung* (3) *sei für ein bestimmtes λ_0 bezüglich aller Kerne $K_\mu(x, y)$ lösbar, speziell also bezüglich der $K_n(x, y)$.*

Behauptet wird die Existenz eines ε, derart, *daß die Gleichung auch für $\lambda = \lambda_0 \pm \varepsilon$ bezüglich aller $K_\mu(x, y)$ lösbar ist. ε ist unabhängig von μ wählbar.*

Im folgenden bezeichnen wir Größen, die einen von μ unabhängigen Wert besitzen, als μ-frei; entsprechend sind die Ausdrücke n-frei und ε-frei zu verstehen.

Der Beweis in § 5 erfaßt offenbar alle K_μ, weil, wie bereits erwähnt, $\mu(x, y)$ auch den Bedingungen (A) bis (E) genügt, während sich (G) und (H) nur auf den Grundkern $K_0(t)$ beziehen.

Wir gehen von irgendeinem festen Kern $K_\mu(x, y)$ aus und betrachten die Integralgleichungen

(29) $$\varphi_\mu(x) - \lambda_0 \int_1 K_{\mu, n}(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = 0,$$

$$\lambda_0 K_{\mu, n}(x, y) = \lambda K_\mu(x, y) \qquad (A \leqq x, y \leqq B_n).$$

Sonst

$$= \lambda_0 K_\mu(x, y),$$
$$(n = 1, 2, \ldots, \lim_{n \to \infty} B_n = \infty).$$

Offenbar ist $K_{\mu, n} = K$, wenn x oder y größer als $\max(B, B_n)$ ist.

$\varphi_n(x) \not\equiv 0$ existiert und sei normiert durch $\operatorname{fin\,sup}_{x \neq \xi_\nu} |\varphi_n(x)| = 1$. Die Beweisführung ist wieder indirekt. Wir nehmen also an, daß

$$|\varphi_n(x)| < \delta \qquad A \leqq x \leqq x^*,$$

wo x^* und $1/\delta$ mit n gegen ∞ streben. Überhaupt bezeichnen wir im folgenden jede positive Größe, die bei wachsendem n unter alle Schranken herabsinkt, mit δ im Gegensatz zu ε, das fest bleibt. Es wird dann bewiesen, daß für alle x gilt

$$|\varphi_n(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon |\lg \varepsilon|, \tag{30}$$

wo C_1 und C_2 unabhängig von n und ε sind. C_2 ist außerdem μ-frei. Da δ gegen Null abfällt, so kann man durch passende Wahl von ε für große n etwa $|\varphi_n(x)| < \frac{1}{2}$ machen im Widerspruch zur Normierung.

Der Beweis zerfällt in drei Teile. Wir stellen $\varphi_n(x)$ auf zwei verschiedene Arten dar. Einmal als Lösung einer inhomogenen Gleichung mit dem Kern $K_0(x - y)$ im Intervall $[A, \infty)$ für den Wert λ_0, sodann als Lösung einer Gleichung mit demselben Kern aber jetzt im endlichen Intervall $[A, B_n]$ für den Wert λ. Daraus wird sich dann der Schluß von λ_0 auf $\lambda_0 \pm \varepsilon$ ergeben. In einem dritten Teil erledigen wir den Fall $\lambda_n \to \lambda_0$.

1. Teil.

λ_0-Darstellung von $\varphi_n(x)$.

Es genügt, den Fall $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ zu betrachten. Die Konstante B in der Definition von $K_\mu(x, y)$ läßt sich beliebig vergrößern. Wir können also

$$B_n > B > x_2$$

annehmen, wo x_2 gemäß Hilfssatz III in bezug auf die Funktion $\bar{\eta} = \eta + \mu$ bestimmt ist. Setzen wir

$$K_{\mu, n}(x, y) = K_0(x - y)\,(1 + \eta_n(x, y)),$$

so ist

$$\eta_n(x, y) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right)\bar{\eta}(x, y) + \frac{\varepsilon}{\lambda_0} \qquad A \leqq x, y \leqq B_n$$

sonst

$$= \eta(x, y) \qquad (\bar{\eta} = \eta + \mu)$$

dabei ist $\bar{\eta} = \eta$, wenn x oder $y \geqq B$ ist. Aus (29) folgt dann, wenn für $x < A$, $\varphi_n(x) = 0$ gesetzt wird,

$$\varphi_n(x) - \lambda_0 \int K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy = \lambda_0 \int_A K_0(x-y)\,\eta_n(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy = f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda_0 \int_A^{B_n} & K_0(x-y)\left[1+\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right]\bar{\eta}(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy \\ & + \varepsilon \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy \\ & + \lambda_0 \int_{B_n} K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy, \qquad x \text{ in } [A, B_n] \\ = \lambda_0 \int_A & K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy, \qquad x > B_n \\ = -\lambda_0 \int_A & K(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy \qquad x < A. \end{aligned} \tag{31}$$

Nun schätzen wir $f(x)$ ab. Offenbar kann

$$x^* > B$$

angenommen werden, da B fest bleibt.

a) $x > B_n$. $|f(x)| \leqq \frac{C}{|x|^t}$ (C n-frei) nach Hilfssatz III. Demnach ist $|f(x)|$ ein δ.

b) $x < A$. $|f(x)| \leqq \delta\, e^{-a(A-x)}$, was man ähnlich wie (17 b, c) beweist ($|\varphi_n(x)| < \delta$ in $[0, x^*]$).

c) $A \leqq x \leqq B$. Wegen $|\varphi_n(x)| < \delta$, und weil B fest ist, ist

$$\lambda_0 \int_A^B K_0(x-y)\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right)\bar{\eta}(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

ein δ. In

$$\lambda_0 \int_B^{x^*} K_0(x-y)\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right)\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

ist immer noch $|\varphi_n(x)| < \delta$. Berücksichtigt man, daß $K_0(x-y)$ im wesentlichen eine e-Funktion ist, so folgt, daß auch dies Integral ein δ ist. Im Restintegral $\int_{x^*}^{B_n}$ ist

$$K_0(x-y) = e^{-a(y-x)}\,u = e^{-a(x^*-x)} \cdot e^{-a(y-x^*)} \cdot u,$$

woraus erhellt, daß es wenigstens wie $e^{-a(x^*-B)}$ mit wachsendem x^* klein wird. Es kommt nun noch ein Summand der Form $C \cdot \varepsilon$ hinzu

(C n- und μ-frei) und schließlich $\lambda_0 \int_B^\infty K_0(x-y)\,\eta\,\varphi_n\,dy$. Dies erledigt sich genau so wie vorher $\int_{x^*}^{B_n}$; also ist

$$|f| < C_1\delta + C_2\varepsilon.$$

d) $B \leqq x \leqq B_n$. $\lambda_0 \int_A^{x^*} K_0(x-y)\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right)\bar{\eta}(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$ ist wegen $|\varphi_n| < \delta$ und wegen des Exponentialfaktors in K_0 ein δ. Da nun x_2 (vgl. Seite 457) kleiner als B ist, so ist im Integral $\int_{x^*}^{B_n}$ $|\eta| < \frac{C}{|x|^l}$ falls $x < x^*$. Wegen des Exponentialfaktors hat das Integral im wesentlichen die Form $C\frac{e^{-\alpha(x^*-x)}}{x^l}$. Dies ist offenbar wieder ein δ. Wegen $|\varphi_n| \leqq 1$ hängt C nicht von n ab. Ist $x \geqq x^*$, so ist $|\lambda_0 \int_{x^*}^{B_n}| \leqq \frac{C}{x^{*l}}$. Nun kommt wieder ein Glied von der Form $C\cdot\varepsilon$ (C n- und μ-frei) hinzu, und das Integral $\lambda_0 \int_{B_n}^\infty K_0(x-y)\,\eta\,\varphi_n\,dy$ ist wieder ein δ.

Als Fazit ergibt sich schließlich:

$f(x)$ ist absolut und quadratisch integrabel und genügt einer Abschätzung

(32) $$|f| \leqq C_1\delta + C_2\varepsilon$$

C_1, C_2 n-frei, C_2 μ-frei.

Nun können wir die Darstellung (9 a) anwenden

(33) $$\varphi_n(x) = f(x) + \frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\int_x^\infty \sin\alpha_0(x-y)\,f(y)\,dy + \lambda_0\int_A^\infty f(y)\,S(x-y)\,dy$$

eventuell kommt noch ein Summand

$$c_1\cos\alpha_0 x + c_2\sin\alpha_0 x = c\sin(\alpha_0 x + d) \qquad |d| < 2\pi$$

hinzu. Wir können aber zeigen, daß dann die Konstanten c_1 und c_2 klein werden. Es sei x^* größer als das x_2 von Hilfssatz III. Es sei

$$\bar{x} = \frac{\pi}{\alpha_0}\left[\frac{\alpha_0 x^* + d}{\pi}\right] - \frac{d}{\alpha_0}.$$

Wegen $\frac{\alpha_0\bar{x}+d}{\pi} = \left[\frac{\alpha_0 x^*+d}{\pi}\right]$ unterscheidet sich $\bar{x}$ von x^* um weniger als $\frac{\pi}{\alpha_0}$. Wir können also auch $\bar{x} > x_2$ annehmen. Aus den Abschätzungen von f folgt offenbar

(34) $$|\int_A^\infty f(y)\,S(x-y)\,dy| < C_1\delta + C_2\varepsilon$$

und da $|\varphi_n(\bar{x})| < \delta$ wegen $\bar{x} \leqq x^*$, so ergibt sich aus (33)

$$\left| \frac{2\lambda_0}{\varrho_0} \int_{\bar{x}}^{\infty} \sin \alpha_0 (\bar{x} - y) f(y)\, dy \right| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon .$$

Nun bestimmen wir ähnlich wie $\bar{x}$ in der Nachbarschaft von $\bar{x}$ zwei Werte $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ für welche einmal $\cos \alpha_0 x$ und einmal $\sin \alpha_0 x$ verschwindet. Da sich hierbei das Integral $\frac{2\lambda_0}{\varrho_0} \int_{\bar{x}}^{\infty} \sin \alpha_0 (x - y) f(y)\, dy$ nur um Integrale $\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}}, \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}}$ ändert, wo $|\bar{x} - \bar{x}_i|$ unter einer von n unabhängigen Schranke liegt, so ist wegen $|f(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon$, da wir $\left.\begin{matrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{matrix}\right\} < x^*$ annehmen können

$$\begin{aligned} c_1 &= C_1 \delta + C_2 \varepsilon , \\ c_2 &= C_1 \delta + C_2 \varepsilon . \end{aligned} \tag{35}$$

Daraus und aus den Abschätzungen von f folgt nun sofort unter abermaliger Benutzung von (33)

$$|\varphi_n(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon \qquad x \geqq B_n, \tag{36}$$

Ehe wir hier weitergehen, benötigen wir vorher noch eine andere Darstellung von $\varphi_n(x)$

2. Teil.

λ-Darstellung von $\varphi_n(x)$.

Unter Benutzung der soeben gewonnenen Abschätzung (36) werden wir jetzt zeigen, *daß*

$$|\varphi_n(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon + C_3 e^{-a(B_n - x)} \qquad (x \text{ in } [A, B_n]) \tag{37}$$

ist, woraus folgt, daß bis zu einem Abstand $\frac{1}{a} \lg \frac{1}{\varepsilon}$ *von* B_n, $|\varphi_n(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon$ *ist. Dasselbe gilt nach* (36) *auch für* $x \geqq B_n$. Es bleibt dann nur noch das Intervall $B_n - \frac{1}{a} |\lg \varepsilon| \leqq x \leqq B_n$. *In diesem Intervall werden wir unter Benutzung von* (33) *und* (37) *schließlich für* $\varphi_n(x)$ *die folgende Abschätzung gewinnen*

$$|\varphi_n(x)| \leqq C_1 \delta + C_2 \varepsilon\, |\lg \varepsilon|, \qquad B_n - a\, |\lg \varepsilon| \leqq x \leqq B_n, \tag{38}$$

wo alle Konstanten C_i *unabhängig von* n *und* ε *für* $\varepsilon \leqq 1$ *wählbar sind; die* C_2 *sind auch* μ*-frei. Durch passende Wahl von* ε *kann man dann endlich*

$$|\varphi_n(x)| < \tfrac{1}{2} \qquad (x \text{ beliebig, } \varepsilon\ \mu\text{-frei}) \tag{39}$$

erreichen, was unser Ziel war.

Nun zum Beweis von (37). Aus (29) folgt

$$(40)\quad \varphi_n(x) - \lambda \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

$$= \lambda \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy + \lambda_0 \int_{B_n} K_\mu(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

$$= f(x) + g(x) = h(x) \qquad (x \text{ in } [A, B_n]).$$

Außerhalb $[A, B_n]$ setzen wir $\varphi_n(x) = 0$. Dann ist dort

$$h(x) = -\lambda \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\varphi_n(y)\,dy.$$

Aus diesem Ausdruck folgt, daß $h(x)$ exponentiell abfällt, mithin absolut und quadratisch integrierbar ist. Nun wenden wir wieder (9a) an

$$(41)\qquad \varphi_n(x) = h(x) + \frac{2\lambda}{\varrho} \int_x \sin\alpha(x-y)\,h(y)\,dy + \lambda \int_x h(y)\,S(x-y)\,dy.$$

Ein trigonometrisches Glied kommt nicht hinzu, da $\varphi_n(x) = 0$ außerhalb $[A, B_n]$. h muß außerdem orthogonal zu $\cos\alpha x$ und $\sin\alpha x$ sein, damit $\varphi_n(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Wir schätzen zunächst $f(x)$ in $[A, B_n]$ ab, und können uns jetzt kurz fassen.

$$f(x) = \lambda \int_A^{B_n} K_0(x-y)\,\bar{\eta}(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

$\left|\int_A^{x^*}\right|$ ist offenbar ein δ. Der Rest $\left|\int_{x^*}^{B_n}\right|$ ist kleiner als $C \cdot e^{\alpha(x^*-x_2)}$, wenn $x \leqq x_2$, bzw. $< C\,\frac{e^{-\alpha(x^*-x)}}{x^l}$ $(x_2 \leqq x \leqq x^*)$ und $< \frac{C}{x^{*l}}$, wenn $x > x^*$.

Das Integral $\left|\int_{x^*}^{B_n}\right|$ ist also ein δ. Mithin ist

$$(42)\qquad |f(x)| < C \cdot \delta \qquad (C\ n\text{-frei}).$$

Wir brauchen noch, daß

$$(42a)\qquad |f(x)| \leqq \frac{C}{x^l} \quad (x > x_2) \qquad (C\ n\text{-frei}).$$

Dies folgt aus Hilfssatz III. Ist außerdem $x > B$, so ist C auch μ-frei. Aus (36) folgt, da $g(x) = \lambda_0 \int_{B_n} K_\mu(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy = \lambda_0 \int_{B_n} K(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy$

$$(43)\qquad |g(x)| \leqq (C_1\delta + C_2\varepsilon)\,e^{-\alpha(B_n - x)} \qquad (C_i\ n \text{ und } \mu\text{-frei}),$$

denn für $y \geqq B_n$ $(> x_1$ vgl. Bedingung $(C))$ ist $\eta(x,y)$, das in $K(x,y)$ vorkommt, beschränkt.

Es fehlt noch $h(x)$ für x außerhalb $[A, B_n]$. Für $x < A$ ist nach (17 b, c) h ein δ und fällt außerdem exponentiell ab.

Für $x > B_n$ können wir nur erhalten

$$|h(x)| < C\, e^{-\alpha(x-B_n)}.$$

Nun zunächst das dritte Glied in (41) $\lambda \int_{-\infty}^{B_n} h(y) \cdot S(x-y)\, dy$. Es ist offenbar ebenso wie $h(x)$ von der Form $C_1\delta + C_2\varepsilon$

$$|\lambda \int_{B_n} h(y) S(x-y)\, dy| < C\, e^{-\alpha(B_n - x)} \qquad \begin{pmatrix} x \text{ in } [A, B_n] \\ C\ n\text{- und } \mu\text{-frei} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Hieraus und aus der Abschätzung von h in $[A, B_n]$ ergibt sich ähnlich wie in § 5, indem man $x = 0$ bzw. $= \frac{\pi}{2\alpha}$ setzt, daß die Integrale des mittleren Gliedes von (41)

$$\int_0 \sin \alpha y h(y)\, dy, \quad \int_0 \cos \alpha y h(y)\, dy$$

absolut kleiner als $C_1\delta + C_2\varepsilon$ sind, wo C n-frei ist. Um eine Schranke für $\int_x \sin \alpha(x-y)\, h(y)\, dy$ (x beliebig in $[A, B_n]$) zu gewinnen, betrachten wir

$$\int_0^x |h(y)|\, dy \leqq \int_0^x |f(y)|\, dy + \int_0^x |g(y)|\, dy.$$

Sei jetzt $x_3 > \begin{cases} x_2 \\ B \end{cases}$ so gewählt, daß $|f(x_3)| < \frac{C}{x_3^{l-1}} \leqq \varepsilon$ ist. x_3 hängt also von ε, aber ebenso wie dieses nicht von n ab. C ist nach einer Bemerkung zu (42 a) μ-frei. Da ε fest bleibt, so ist $\int_0^{x_3} |f(y)|\, dy$ ein δ.

$$\int_{x_3}^x |f(y)|\, dy \leqq \frac{C}{l-1}\left(\frac{1}{x_3^{l-1}} - \frac{1}{x^{l-1}}\right) \leqq \frac{2\varepsilon}{l-1} \qquad \text{(bzw. } = 0, \text{ wenn } x < x_3)$$

$$\int_0^x |g|\, dy \leqq (C_1\delta + C_2\varepsilon) \int_0^x e^{-\alpha(B_n - y)}\, dy \leqq \frac{C_1}{a}\delta + \frac{C_2}{a}.$$

Daraus folgt

$$|\int_x \sin \alpha(x-y)\, h(y)\, dy| < C_1\delta + C_2\varepsilon. \tag{45}$$

Aus (42), (43), (44) und (45) folgt endlich die gewünschte Abschätzung (37), in welcher nur C_1 möglicherweise von ε und μ abhängt. Wie bereits erwähnt, folgt aus (37)

$$|\varphi_n(x)| < C_1\delta + C_2\varepsilon, \qquad A \leqq x \leqq B_n - \frac{1}{a}|\lg \varepsilon|.$$

Wir benutzen jetzt wieder die Darstellung (33). Nach (32), (34), (35) ist

$$|f(x) + \lambda_0 \int_A f(y) S(x-y)\, dy + c_1 \cos\alpha_0 x + c_2 \sin\alpha_0 x| \leqq C_1\delta + C_2\varepsilon.$$

Aus (32) folgt aber durch ganz rohe Abschätzung, wenn

$$B_n - \frac{1}{a}|\lg\varepsilon| \leqq x \leqq B_n$$

$$\left|\frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\int_x^{B_n} \sin\alpha_0(x-y)\, f(y)\, dy\right| \leqq \frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\frac{1}{a}|\lg\varepsilon|\,(C_1\delta + C_2\varepsilon)$$

$$\leqq C_1\delta + C_2\varepsilon|\lg\varepsilon|$$

$$\left|\frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\int_{B_n} \sin\alpha_0(x-y)\, f(y)\, dy\right| \leqq \frac{2\lambda_0}{\varrho_0}\int_{B_n} \frac{C}{x^l}\, dx \leqq \frac{C}{B_n^{l-1}}.$$

(Hilfssatz III auf $f(x)$ angewandt). C ist n-frei. Da $\frac{1}{B_n^{l-1}}\left(l > \frac{3}{2}\right)$ ein δ ist, so folgt schließlich (38) und (39). Damit ist die Existenz von Lösungen für hinreichend benachbarte λ bewiesen bezüglich aller Kerne $K_\mu(x, y)$.

3. Teil.

Wir haben noch zu zeigen, *daß für λ_0 eine Lösung existiert, wenn λ_0 Grenzwert einer Folge von λ-Werten ist, für welche Lösungen existieren.*

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_A K_{\mu_n}'(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = 0,$$

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_A K_0(x-y)\, \varphi_n(y)\, dy = \lambda_n \int_A K_0(x-y)\, \bar{\eta}(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy = f_n(x),$$

$$x \geqq A$$

$$\varphi_n(x) = 0,\ f_n(x) = -\lambda_n \int_A^\infty K_0(x, y)\, \varphi_n(y)\, dy,\ x < A$$

Es ist $|f_n(x)| \leqq \frac{C}{x^l}$ nach Hilfssatz III, wo C μ-frei, wenn $x > B$. Außerdem kann C auch als unabhängig von λ_n angenommen werden in einer nicht zu großen Nachbarschaft von λ_0

$$\varphi_n(x) = f_n(x) + \frac{2\lambda_n}{\varrho_n}\int_x \sin\alpha_n(x-y)\, f_n(y)\, dy + \lambda_n \int f_n(y) S(x-y)\, dy$$

$$+ c_1^{(n)} \cos\alpha_n x + c_2^{(n)} \sin\alpha_n x,$$

$$\left|\int_x \sin\alpha_n(x-y)\, f_n(y)\, dy\right| \leqq \frac{C}{x^{l-1}} \quad (x > x_2).$$

Wir nehmen wieder an, daß $|\varphi_n(x)| < \delta$ für $A \leqq x \leqq x^*$. Es folgt ähnlich wie früher, daß

$$|f_n(x)| < C\delta$$

für alle x und

$$|\int f(y)\,S(x-y)\,dy| < C\,\delta.$$

Man schließt wie früher, daß

$$C_1^{(n)\,2} + C_2^{(n)\,2} \leqq C\,\delta^2.$$

Da nun natürlich wieder die $\varphi_n(x)$ normiert sind

$$\operatorname*{fin\,sup}_{x \neq \xi_\nu} |\varphi_n(x)| = 1,$$

so müßte für $x > x^*$ $|\varphi_n(x)|$ einmal gleich 1 werden. x^* soll aber nach der Annahme über alle Grenzen wachsen. Andererseits ist für $x > x_2$

$$|\varphi_n(x)| \leqq \left| \frac{C}{x^{l-1}} + c_1^{(n)} \cos \alpha_n x + c_2^{(n)} \sin \alpha_n x \right| < 1$$

von einem hinreichend großen aber festen $x_3 > x_2$ an. Die Annahme $|\varphi_n(x)| < \delta$ in $[A, x^*]$, $x^* \to \infty$, $\delta \to 0$ ist also falsch und die Existenz einer nichttrivialen Lösung durch das Auswahlprinzip gesichert. Daß die Grenzfunktion tatsächlich die Integralgleichung erfüllt, beweist nun ohne Schwierigkeit wie in § 5. Aus dem Beweis folgt nichts näheres über die Grenzfunktion. Sie könnte möglicherweise auch quadratisch integrierbar, d. h. eine Eigenfunktion sein.

Damit haben wir also schließlich folgendes gezeigt:

Satz II. *Ist für irgend einen Wert $\lambda_0 > 1$ die Existenz einer Lösung gesichert, sowohl für den Kern $K(x, y)$ als auch für alle $K_\mu(x, y)$, so gibt es zu allen von 1 verschiedenen Werten des Spektrums nichttriviale Lösungen.*

Nach den Bemerkungen am Beginn dieses Paragraphen ergibt sich als Folgerung aus Satz II.

Satz III. *Sind die Bedingungen* (G) *und* (H) *erfüllt, so existieren für jeden Wert $\lambda > 1$ nichttriviale Lösungen der Integralgleichung.*

§ 8.

Über die Existenz von beschränkten Lösungen für $\lambda = 1$.

Um in diesem Falle zu einem Resultat zu gelangen, müssen wir besondere Voraussetzungen machen [9]).

1. Es sei $l > 2$ (vgl. Bedingung (B)).

2. Für eine Folge $\lambda_n \to 1$ sollen Lösungen existieren, die asymptotisch für negative und positive x gleich $c_n \cdot \cos \alpha x$ $(c_n \neq 0)$ sind.

---

[9]) Wir beschränken uns auf den Fall des nach beiden Seiten ins Unendliche reichenden Grundgebietes.

Für ein solches λ hat $\varphi(x)$ die Form

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{2\lambda}{\varrho}\int_x^{\infty} \sin\alpha(x-y) f(y)\,dy + \lambda\int S(x-y) f(y)\,dy + c\cos\alpha x$$

$$= \varphi_1(x) + c\cdot\cos\alpha x,$$

$$f(x) = \lambda\int K_0(x-y)\,\eta(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Wie früher sei $\operatorname{fin\,sup}_{x=\pm\infty} |\varphi(x)| = 1$. Wir nehmen wieder an

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad |x| > x^*,$$
$$(\varepsilon \to 0,\ x^* \to \infty).$$

Für das folgende ist wesentlich, daß die zweite Ableitung von $\lambda(\alpha)$ für $\lambda = 1$ $(\alpha = 0)$ nicht verschwindet.

Aus

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = 2\int_0^{\infty} K_0(t)\cos\alpha t\,dt$$

folgt nämlich

$$a_2 = \lambda''(0) = 2\int_0^{\infty} t^2 K_0(t)\,dt > 0,$$

weil $K_0(t)$ positiv ist (vgl. die Bemerkung zu den Gleichungen (2)). Also ist $\varrho(\alpha) = \frac{d\lambda}{d\alpha} = \alpha a_2 + \alpha^3\varrho_1(\alpha)$.

Zunächst folgt sofort aus der Annahme und Hilfssatz III

$$f(x) < \frac{C}{|x|^l},\ (|x| \geqq x_2); \quad |f(x)| < C\cdot\varepsilon$$

(C unabhängig von α wählbar).

Wir zeigen, daß aus unserer Annahme folgt

$$|\varphi_1(x)| < \beta,$$

wo β mit α gegen Null geht. Dies gilt offenbar schon für den ersten und dritten Posten von $\varphi_1(x)$. Wir haben es also im wesentlichen nur mit

$$\int_x^{\infty} \frac{\sin\alpha(x-y)}{\varrho(\alpha)} f(y)\,dy$$

zu tun.

Nun folgt aus der Voraussetzung über das asymptotische Verhalten

$$\int \sin\alpha(x-y) f(y)\,dy = 0.$$

Wir können uns also auf die Abschätzung für positive x beschränken. Es ist

$$\frac{\sin\alpha(x-y)}{\varrho} = \frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha a_2 + \alpha^3\varrho_1(\alpha)} = \frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha a_2} + \alpha^3\sin\alpha(x-y)\,\varrho_2(\alpha).$$

Für das letzte Glied ist wegen des Faktors α^2 nichts zu beweisen. Nun ist in $\int_x \frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha} f(y)\,dy$ wegen $y \geqq x$

$$\left|\frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha}\right| \leqq y-x.$$

Für $x > x_2$ folgt also

$$\left|\int_x \frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha} f(y)\,dy\right| \leqq \int_x (y-x)\frac{C}{y^l}\,dy$$

$$= \frac{C}{(l-1)(l-2)} \cdot \frac{1}{x^{l-2}} = \frac{C_1}{x^{l-2}}.$$

Wir setzen zuerst

$$x_3^{l-2} = \frac{C_1}{\varepsilon_1} \qquad (\varepsilon_1 \text{ beliebig klein}).$$

Dann ist der fragliche Ausdruck für $x \geqq x_3$ kleiner als ε_1. Nun nehmen wir λ so nahe bei 1, daß $x^* > x_3$ und ε so klein ist, daß $\frac{\varepsilon x_3^2}{2} < \varepsilon_1$. Eine rohe Abschätzung liefert dann sofort für $x \leqq x_3 (< x^*)$

$$\int_x^{x_3} \frac{\sin\alpha(x-y)}{\alpha} f(y)\,dy \leqq C\varepsilon \int_x^{x_3} (y-x)\,dy \leqq C\varepsilon\frac{x_3^2}{2} < C\varepsilon_1.$$

Damit ist aber das gewünschte Resultat erzielt. Aus der für alle x geltenden Ungleichung

$$|\varphi_1(x)| < \beta$$

folgt z. B. für $\beta < \frac{1}{2}$, daß in der Darstellung $\varphi(x) = \varphi_1(x) + c\cos\alpha x$

$$c < \tfrac{1}{2}$$

bleiben muß für $\alpha \to 0$. Dann ist aber z. B. für $x = 0$

$$|\varphi(x)| > \tfrac{1}{2} - \beta > 0$$

entgegen der Annahme $\lim_{\lambda \to 1} \varphi(o) = 0$. Nun können wir wieder durch Auswahl für $\lambda = 1$ eine Lösung finden, die sich asymptotisch einem bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert nähert.

§ 9.

Spezielle Typen.

Eine besondere Art von Grundkernen $K_0(t)$ erhält man in der Form

(46) $$\int_{\mu_0} e^{-\mu|t|}\,dg(\mu) \qquad (g(\mu) \text{ monoton steigend}).$$

Aus $\int_0 K_0(t) = \frac{1}{2}$ folgt

(46 a) $$\int_{\mu_0} \frac{dg(\mu)}{\mu} = \frac{1}{2}.$$

Es ergibt sich sofort

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\alpha t} K_0(t)\,dt = \int_{\mu_0} dg(\mu)\,\frac{2\mu}{\mu^2+\alpha^2}. \tag{47}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingung (G) erfüllt ist. Indem wir auf die Definition des Stieltjesintegrals zurückgreifen, genügt es, den Beweis für eine Treppenfunktion zu führen. Es sei also

$$K_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n|t|}}{b_n}, \quad \frac{1}{\lambda(\alpha)} = 2\sum \frac{a_n}{b_n(a_n^2+\alpha^2)}.$$

Nun ist

$$2\pi S(t) = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\alpha|t|}}{\lambda(\alpha)-\lambda_0}\,d\alpha.$$

$\frac{1}{\lambda(\alpha)-\lambda_0}$ hat außerhalb der reellen Achse nur noch Pole auf der imaginären Achse.

Wir setzen

$$\frac{1}{\lambda(\alpha)} = \frac{1}{\lambda(i\beta)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n(a_n^2-\beta^2)} \quad (\alpha = i\beta).$$

Die Pole sind einfach. $\frac{1}{\lambda(i\beta)}$ nimmt in der Umgebung von jeden a_n alle reellen Werte an. Die positiven Pole von $\frac{1}{\lambda(i\beta)-\lambda_0}$ seien β_n.

Dann ist offenbar

$$2\pi S(t) = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n|t|}}{\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{i\beta_n}},$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_{i\beta_n} = \frac{1}{i}\frac{d\lambda(i\beta)}{d\beta} = \frac{-\lambda^2}{i}\beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{b_m(a_m^2-\beta_n^2)^2},$$

$$S(t) = -\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n|t|}}{4\beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{b_m(a_m^2-\beta_n^2)^2}}.$$

$S(t)$ ist also durchweg negativ.

Die Bedingung (H) ist nun leider nicht ohne weiteres erfüllt. $g(\mu)$ ist abgesehen von den bisherigen Bedingungen nicht willkürlich. Es ergab sich zu Beginn von § 5 für $\frac{\lambda_0}{2}\int_0 S(t)\,dt$ der Ausdruck

$$\frac{\lambda_0^2}{4}\left[\frac{2}{\alpha_0\left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)_0} - \frac{1}{\lambda_0-1}\right].$$

Wir bestimmen den Grenzwert dieses Ausdruckes für $\lambda_0 = 1$. Setzen wir $\lambda(\alpha) - 1 = f(\alpha)$ so ist wegen $\lambda(\alpha) \to 1$ der folgende limes auszuwerten:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{4} \frac{2 f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)}{\alpha f(\alpha) f'(\alpha)},$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} f''(0) + \frac{\alpha^4}{4!} f^{\mathrm{IV}}_{(0)}$$

(wegen $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha)$) und $\lambda'(0) = 0$. Es ergibt sich leicht der folgende Ausdruck

$$-\frac{1}{24} \frac{f^{\mathrm{IV}}_{(0)}}{f''^2_{(0)}} = -\frac{1}{24} \frac{\lambda^{\mathrm{IV}}_{(0)}}{\lambda''^2_{(0)}}.$$

Um (H) zu erfüllen, fordern wir, daß dies absolut kleiner als 1 sei. Dann gilt dies auch noch in einer kleinen Umgebung

$$|\lambda^{\mathrm{IV}}_{(0)}| < 24\, \lambda''^2_{(0)}$$

$\lambda''_{(0)}$ und $\lambda^{\mathrm{IV}}_{(0)}$ lassen sich aber aus $K_0(t)$ bestimmen. Aus (47) ergibt sich

$$\lambda''_0 = 4 \int_{\mu_0} \frac{d g(\mu)}{\mu^3},$$

$$\lambda^{\mathrm{IV}}_{(0)} = 2 \lambda''^2_{(0)} - 48 \int_{\mu_0} \frac{d g(\mu)}{\mu^5}.$$

Daraus folgt sofort die folgende Bedingung

$$\int_{\mu_0} \frac{d g(\mu)}{\mu^5} < \frac{26}{3} \left(\int_{\mu_0} \frac{d g \mu}{\mu^3} \right)^2 \tag{48}$$

die allgemein nicht erfüllt zu sein braucht. Unter dieser Bedingung ist also die dargelegte Theorie in Geltung.

Ein besonderer Fall von (46) ist der physikalisch interessante Fall

$$K_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n |t|}}{a_n} \qquad a_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Auf die physikalische Bedeutung kommen wir im nächsten Paragraphen zu sprechen und untersuchen hier nur das Erfülltsein der Bedingungen. Für $\lambda(\alpha)$ erhält man den Ausdruck

$$\lambda(\alpha) = \alpha \mathfrak{Rtg}\, \alpha.$$

Wir beweisen die Monotonie von $|\lambda(\alpha)|^2$ für $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, wenn

$$\alpha_1 \to +\infty.$$

$$|\alpha|^2 \mathfrak{Rtg}^2 \alpha = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\mathfrak{Cof}^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2}{\mathfrak{Cof}^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2}.$$

Die Ableitung nach α_1 hat den Wert

$$2\alpha_1 \frac{\mathfrak{Cof}^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2}{\mathfrak{Cof}^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2} - \frac{2\,\mathfrak{Cof}\,\alpha_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_1\,(\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2)}{(\mathfrak{Cof}^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2).$$

Der zweite Summand geht aber gegen Null, wenn $\alpha_1 \to \infty$. Für große α_1 ist also die Ableitung positiv. Wir haben noch zu zeigen, daß $\frac{\lambda_0^2}{2}\int_0^\infty S(t)\,dt$ kleiner als 1 ist für geeignete λ.

Um das Erfülltsein von (H) zu zeigen, genügt es, die Monotonie der ersten Ableitung zu beweisen (vgl. § 5)

$$\lambda(\alpha) = \alpha\,\mathfrak{Rtg}\,\alpha, \quad \lambda'(\alpha) = \mathfrak{Rtg}\,\alpha - \frac{\alpha}{\mathfrak{Sin}^2 \alpha}, \quad \lambda''(\alpha) = \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 \alpha}(\lambda(\alpha) - 1).$$

Aus der Monotonie von $\lambda(\alpha)$ folgt

$$\lambda''(\alpha) \geqq 0.$$

§ 10.

Eine potentialtheoretische Randwertaufgabe.

Es handelt sich um das folgende gemischte Randwertproblem [10]):

In der σ, t-Ebene ist eine harmonische Funktion $u(\sigma, t)$ zu bestimmen, die in dem Streifen $0 < \sigma < 1$ regulär ist und den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma} - k(t)\,u|_{\sigma=1} = 0, \quad k(t) \geqq 0$$

genügt.

Für den Fall eines konstanten k ist die Aufgabe schon vielfach behandelt worden. Eine besondere Rolle spielt dabei die Frage der Eindeutigkeit und das qualitative Verhalten der Lösung. Insbesondere interessieren die im Unendlichen beschränkten Lösungen. Nach A. Weinstein [10]) läßt sich das Problem in folgender Weise auf eine Integralgleichung unseres Typs zurückführen. $G(\sigma, t; \bar{\sigma}, \bar{t})$ sei die Greensche Funktion, die für $\sigma = 0$ verschwindet, während für $\sigma = 1$ die Normalableitung Null ist. Man gewinnt sie nach Hamel wie folgt. Die Funktion

$$\frac{1}{2}\lg \frac{\overline{PP_3}\,\overline{PP_4}}{\overline{PP_2}\,\overline{PP_1}} = H(P, P_1)$$

---

[10]) Es betrifft dies die Potentialströmung in einem Kanal von endlicher Tiefe, die invariant gegenüber Verschiebungen senkrecht zu einem vertikalen Längsschnitt ist. u ist der Winkel der Geschwindigkeitsrichtung. Vgl. Levi-Civita, Détermination des ondes permanentes., Math. Annalen 93. Vgl. A. Weinstein, Rend. Acc. Naz. dei Lincei Vol. V. sér. 6a (1927), S. 259. G. Hoheisel, Jahresber. D. M. V. 39 (1930), S. 54—58; Bo S. 167.

erfüllt dieselbe Bedingung im ersten Quadranten einer z-Ebene, wenn P_1 der Pol und P_2, P_3, P_4 seine Bilder in den anderen Quadranten sind.

Durch die Transformation

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}s}, \quad s = \sigma + it$$

erhält man G.

Wendet man die Greensche Formel an,

$$u(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial u}{\partial n}G - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds,$$

erstreckt über die Graden $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ und setzt $\sigma = 1$ in $u(\sigma, t)$, so folgt aus den Randbedingungen die Integralgleichung

$$u(1, t) = \psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int k(t)\,K(t, \bar{t})\,\psi(\bar{t})\,d\bar{t},$$

wo

$$K(t, \bar{t}) = G(1, t; 1, \bar{t}) = \lg\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}t} + e^{\frac{\pi}{2}\bar{t}}}{e^{\frac{\pi}{2}t} - e^{\frac{\pi}{2}\bar{t}}}\right)^2$$

ist. Entwickelt man den Logarithmus, so findet man

$$\frac{1}{2\pi}K(t, \bar{t}) = K_0(t - \bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n|t-\bar{t}|}}{a_n} \qquad \left(a_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Wir fordern, daß $k(t)$ für $t \to \pm\infty$ demselben Grenzwert λ zustrebt. Setzen wir demgemäß

$$\sqrt{k(t)} = \lambda(1 + p(t)),$$
$$\psi(t)(1 + p(t)) = \varphi(t),$$

so bekommen wir schließlich

$$\varphi(t) - \lambda\int K_0(t - \bar{t})(\eta(t, \bar{t}) + 1)\varphi(\bar{t})\,d\bar{t},$$

wenn noch

$$(1 + p(t))(1 + p(\bar{t})) = 1 + \eta(t, \bar{t})$$

gesetzt wird. Ist $p(t) = O\left(\frac{1}{t^l}\right)$, $l > \frac{3}{2}$ und im übrigen stückweise stetig, so erfüllt der Kern

$$K(t, \bar{t}) = K_0(t - \bar{t})(1 + \eta(t, \bar{t}))$$

unsere Bedingungen. Die Lösung ist stückweise stetig und nähert sich für große $|t|$ im allgemeinen gewissen trigonometrischen Funktionen, deren Amplitude für große positive oder negative t nicht notwendig dieselbe sein muß. Die Lösung hat also im allgemeinen nicht den Charakter einer Einzelwelle. Dies kann nur für einen Eigenwert eintreten, also nur für eine nirgends dichte Menge von λ-Werten. Allerdings weiß man nichts

über das Vorhandensein uneigentlicher Lösungen, die in der Spektralform nicht enthalten sind[11]). Sie sind jedenfalls nicht quadratisch integrierbar.

Dies war zunächst $u(1, t)$. $u(\sigma, t)$ gewinnt man am besten als verallgemeinertes Fourierintegral.

Dem Randwertproblem kann man nun eine komplexe Fassung geben, die es auf die Lösung einer gewissen komplexen funktionalen Differentialgleichung zurückführt[12]) mit nicht konstanten Koeffizienten. Soweit mir bekannt, sind nur solche mit ganz rationalen Koeffizienten behandelt worden (Hoheisel, Zeitschr. 14 (1922)). Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß $k(t)$ die Werte einer ganzen transzendenten Funktion $f(s)$ darstellt, die für $\sigma = 1$ reell ist. Dann betrachten wir die Funktion

$$w'(s) - f(s)\,w(s) = W(s), \quad s = \sigma + it,$$

$$w = u + iv; \quad f = f_1 + if_2, \quad f_1(1, t) = f(1 + it) = k(t), \tag{49}$$

$$u(0, t) = 0, \qquad k(t) = \lambda[1 + O(t^{-l})], \quad l > \tfrac{3}{2}.$$

Verlangen wir, daß der Realteil von $W(s)$ für $\sigma = 1$ verschwindet, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} - k(t)\,u\,|_{\sigma=1} = 0.$$

Mit Hilfe von (49) kann man übrigens das Problem durch Übergang zur Fourierschen Transformierten behandeln, was für gewisse Fälle ($k(t)$ ein Polynom) von Vorteil ist. Wir gehen jetzt einen anderen Weg.

Das Verfahren ist dem von Hoheisel (a. a. O.) soweit angängig nachgebildet.

Wegen $u(0, t) = 0$ ergibt sich

$$w(s) = -\overline{w(-\bar{s})} \tag{50}$$

und $w(s)$ ist in $-1 < \sigma < +1$ definiert. Die Funktion $f(s)$ ist durch $f(1 + it) = k(t)$ eindeutig festgelegt. Offenbar ist

$$f(s) = \overline{f(2 - \bar{s})}. \tag{51}$$

$W(s)$ ist rein imaginär für $s = 1 + it$. Falls also $W(s)$ noch für $\sigma = 1$ stetig ist bezüglich t, so gilt

$$W(s) = -\overline{W(2 - \bar{s})}. \tag{52}$$

---

[11]) Vgl. Weyl Dissertation, Göttingen 1908, Einleitung und § 15 (Der Kern $\frac{1}{s+t}$).

[12]) Vgl. hierzu Hoheisel a. a. O.[10]). Dort ist bei konstantem k etwas Ähnliches ganz im Reellen gemacht. Bei variablem k kommt man ohne das Komplexe nicht aus.

Daraus folgt

$$w'(s) - f(s)\,w(s) = -\overline{(w'(s))}_{2-\bar{s}} + \overline{f(2-s)} \cdot \overline{w(2-\bar{s})}.$$

Nun ist offenbar

$$\overline{(w'(s))}_{2-\bar{s}} = w'(s-2).$$

Also bekommen wir schließlich

$$w'(s) + w'(s-2) - f(s)\,w(s) + f(s)\,w(s-2) = 0. \tag{53}$$

Für diese funktionale Differentialgleichung erhalten wir also durch Auflösung unserer Integralgleichung eine Lösung, falls diese fortsetzbar ist in $1 \leqq \sigma < 3$. Man kann dann beweisen, durch sukzessive Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, daß $w(s)$ in der ganzen Ebene analytisch fortsetzbar ist.

(Eingegangen am 19. Oktober 1936.)

Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.

(Zweiter Abschnitt.)

Von

Georg Tautz in Breslau.

Das Fouriertheorem.

§ 1.

Vorbemerkungen.

In diesem Abschnitt machen wir etwas schärfere Voraussetzungen, um die stetige Ableitung der Spektralfunktion sicherzustellen und die Gleichheit mit unseren Lösungen zu zeigen. Es ist ja noch nicht sicher, daß wir mit unseren Lösungen alles erfaßt haben. An sich wäre es noch denkbar, daß außerdem noch Differentiallösungen existierten, die keine Ableitungen besäßen und mit den bisherigen Lösungen nichts zu tun hätten.

Wir setzen also voraus:

J) *Für jeden Wert $\lambda > 1$ des Spektrums sollen die approximierenden Funktionen $\varphi_n(x)$ des § 5 bei derselben Normierung wie dort ($|\varphi_n(x)| \leqq 1$) Anlaß zu einer nichttrivialen Lösung geben. Und zwar soll für keine Teilfolge der Fall eintreten $\varphi_n(x) \to 0$.*

Dies ist z. B. erfüllt für alle Kerne, für welche $S(t) \equiv 0$ [13]), so bei dem Grundkern

$$K_0(t) = e^{-|t|}.$$

(K) *Für den Fall des nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckten Grundgebietes sollen die Lösungen sich asymptotisch derselben trigonometrischen Funktion nähern.*

Bedingung (K) ist sicher erfüllt, wenn der Kern „gerade" ist. Das soll bedeuten

$$K(x, y) = K(-x, -y).$$

---

[13]) Aus der Annahme $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ in $[A, x^*]$ bzw. in $[-x^*, +x^*]$ würde dann nämlich folgen $|\varphi_n| < 1$ in $[A, B_n]$ bzw. in $[A_n, B_n]$, weil das Glied

$$\lambda \int_A^\infty f(y) S(x-y)\, dy,$$

welches die eigentlichen Schwierigkeiten macht, jetzt wegfällt.

In diesem Fall gibt es höchstens zwei unabhängige Lösungen, soweit sie keine Eigenfunktionen sind, denn man kann alle nicht quadratisch integrablen Lösungen durch zwei kombinieren, die asymptotisch gleich $\cos \alpha x$ bzw. $\sin \alpha x$ sind.

Wir beschränken uns zur Durchführung auf den in Bedingung (K) vorausgesetzten Fall. Zunächst werden einige Hilfssätze bewiesen, die etwas aussagen über die Größe des Normierungsfaktors der $\varphi_n(x)$ und die Anzahl der Eigenwerte bei den approximierenden Gleichungen in einem gegebenen λ-Intervall.

§ 2.

Einige Hilfssätze.

Da die eventuellen Eigenwerte der gegebenen Integralgleichung nirgends dicht liegen, können wir uns auf Intervalle beschränken, die weder im Inneren noch auf dem Rande einen Eigenwert enthalten. Dies wird in den folgenden Betrachtungen durchweg festgehalten.

$\varphi(x, \alpha)$ sei eine Lösung in dem gegebenen Intervall. Wir normieren für den Augenblick so wie früher

$$\inf_{x \neq \xi_\nu} \sup |\varphi(x, \alpha)| = 1.$$

Asymptotisch nähert sich $\varphi(x, \alpha)$ für $|x| \to \infty$ einer trigonometrischen Funktion

$$c(\alpha) \cdot \cos(\alpha x + \delta).$$

Es wird behauptet

$$c(\alpha) > k > 0$$

im abgeschlossenen Intervall. Anderenfalls gäbe es eine Folge $\varphi(x, \alpha_i)$ mit $c(\alpha_i) \to 0$ und $\operatorname{Max} |\varphi(x, \alpha_i)| = 1$. Dies würde aber Anlaß zu einer Eigenfunktion geben, was wir ausgeschlossen haben. Wir können also jetzt $\varphi(x, \alpha)$ im ganzen Intervall so normieren, daß $c(\alpha) = 1$ wird, $\varphi(x, \alpha)$ aber trotzdem im ganzen Intervall beschränkt bleibt. Nun beweisen wir den

Hilfssatz IV. *$\overline{\varphi}_n(x)$ sei eine Folge von Näherungslösungen wie in* § 5. *Dann ist*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_{-B_n}^{B_n} \overline{\varphi}_n^2(x)\, dx}{\alpha_0 B_n} = 1, \qquad (\overline{\varphi}_n(x) \to \varphi(x, \alpha))$$

wenn die Eigenwerte λ_n gegen $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0)$ streben.

Aus der Darstellung (9a) ergab sich für $\varphi_n(x)$ der folgende Ausdruck

$$(54) \qquad \varphi_n(x) = \frac{2\lambda_n}{\varrho_n} \int_x \sin \alpha_n (x - y) f_n(y)\, dy + p(x) + q(x) e^{-a(B_n - x)}$$

x in $[0, B_n]$.

$q(x)$ ist eine beschränkte stetige Funktion, $p(x)$ ist absolut kleiner als $\frac{C}{|x|^{l-1}}$, wo C unabhängig von B_n gewählt werden kann. Wir können es sogar für das ganze betrachtete λ-Intervall als fest annehmen. Nach der Voraussetzung (J) und den zu Beginn des Paragraphen gemachten Bemerkungen, muß von einem gewissen n ab, der Maximalbetrag des ersten Summanden in (54) größer als $\frac{k}{2} > 0$ sein. Wenn wir also $\varphi_n(x)$ in folgender Weise neu normieren,

$$\overline{\varphi_n}(x) = \cos(\alpha_n x + \delta) + p(x) + q(x)\, e^{-a(B_n - x)}\ ^{14}),$$

so bleibt das über $p(x)$ und $q(x)$ Gesagte in Geltung.

Für das folgende können wir $\delta = 0$ wählen, was nur auf eine Verschiebung hinausläuft.

$$\int_{-B_n}^{B_n} \overline{\varphi_n}^2(x)\, dx = \int_{-B_n}^{B_n} \cos \alpha_n^2 x\, dx + 2 \int \cos \alpha_n x\, p(x)\, dx$$

$$+ 2 \int \cos \alpha_n x\, q(x)\, e^{-a(B_n - x)}\, dx + \int p^2(x)\, dx + \int q^2(x)\, e^{-2a(B_n - x)}\, dx.$$

Es macht für das folgende nichts aus, $-B_n$, B_n durch die nächstgelegenen Nullstellen von $\sin \alpha_n x$ zu ersetzen.

$$B_n \sim \frac{m\pi}{\alpha_n}.$$

Dann ist der erste Summand bis auf Größen, die kleiner als $\frac{\pi}{\alpha_n}$ sind, gleich

$$m\pi \sim \alpha_n B_n.$$

Der zweite und dritte Posten ist wegen $|p(x)| < \frac{C}{x^{l-1}}$ höchsten von der Ordnung $B_n^{2-l} \leqq B_n^{1/2}$, der dritte bleibt sogar beschränkt und ebenso wegen des Exponentialfaktors der letzte Posten. Daraus ergibt sich aber schon die Behauptung.

Hilfssatz V. *Es seien $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$, $\lambda_3^{(n)}$ aufeinander folgende Eigenwerte der n-ten Approximation, $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\alpha_3^{(n)}$ die durch $\lambda = \lambda(\alpha)$ zugeordneten α-Werte. Dann ist*

$$\liminf B_n(\alpha_3^{(n)} - \alpha_1^{(n)}) = N\pi \quad (N \text{ ganzzahlig} \geqq 1).$$

Wir werden sogar genauer zeigen, daß man aus den drei Zahlen $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, $\alpha_3^{(n)}$ zwei herausgreifen kann, etwa $\alpha^{(n)}$ und $\beta^{(n)}$, so daß

$$\lim B_n(\beta^{(n)} - \alpha^{(n)}) = \pi.$$

---

14) Vgl. hierzu die Schlußbemerkungen von § 6 (S. 454).

Für den Beweis lassen wir den Index n fort. $\varphi_i(x)$ sei wieder durch Max $|\varphi_i(x)| = 1$ normiert.

$$\varphi_i(x) = c_i \cos \alpha_i x + d_i \sin \alpha_i x + \eta_i(x).$$

Die Bedeutung von c_i, d_i, η_i ergibt sich aus (54). Jetzt benutzen wir die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-B_n}^{B_n} \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0.$$

Es folgt

$$(55) \qquad \int_{-B_n}^{B_n} \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = (c_i c_k + d_i d_k) \frac{\sin(\alpha_i - \alpha_k)}{\alpha_i - \alpha_k} B_n + R(B_n),$$

wo $R(B_n)$ aus Gliedern besteht, die sich genau so zusammensetzen und abschätzen wie in Hilfssatz IV. $R(B_n)$ ist also höchstens von der Ordnung $B_n^{1/2}$. Wir nehmen zunächst an, es gebe eine Kombination (i, k), so daß

$$c_i c_k + d_i d_k > l > 0.$$

Wenn nun lim inf $|\alpha_i - \alpha_k| B_n = 0$ wäre, so gäbe es eine Folge n_k und einen Index n_0, so daß für $n_k > n_0$ etwa

$$\frac{\sin(\alpha_i - \alpha_k) B_n}{\alpha_i - \alpha_k \cdot B_n} > \frac{1}{2}.$$

Bleibt $c_i c_k + d_i d_k > l > 0$, so bleibt das erste Glied von (55) größer als $\frac{l}{2} B_n$. Da die restlichen Glieder kleiner als $C B_n^{1/2}$ sind (C unabhängig von n), so könnte von einem gewissen Index an die Orthogonalität nicht mehr erfüllt sein; es ist also etwa

$$(56) \qquad |\alpha_i^{(n)} - \alpha_k^{(n)}| = \frac{C_n}{B_n}, \qquad (C_n > l_1 > 0).$$

Würde nun aber der Zähler des ersten Gliedes in (55) über einer Schranke verbleiben, so würde dennoch wegen (56) das erste Glied wie B_n anwachsen. Es muß also gelten:

$$(57) \qquad (\alpha_i^{(n)} - \alpha_k^{(n)}) B_n = N_n \pi + r_n \qquad (r_n \to 0).$$

Damit ist für diesen Fall der Satz bewiesen. Nun haben wir noch zu zeigen, daß es ein die Annahme befriedigendes Paar (i, k) geben muß.

Aus der in diesem Paragraphen festgehaltenen Voraussetzung folgt nun, daß von einem Index n_0 an

$$c_i^{(n)2} + d_i^{(n)2} = e^{(n)2} > l > 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ n > n_0 \end{matrix}$$

sein muß. Wir setzen demgemäß

$$\frac{c_i^{(n)}}{l^{(n)}} = \cos \beta_i^{(n)}; \qquad \frac{d_i^{(n)}}{l^{(n)}} = \sin \beta_i^{(n)}$$

Wäre von einem Index an $|c_i^{(n)} c_k^{(n)} + d_i^{(n)} d_k^{(n)}| < \varepsilon^{(n)}$, so wäre

$$\beta_i - \beta_k = (N_j + \tfrac{1}{2})\,\pi + \delta_j \qquad (i, j, k) = (1, 2, 3) \tag{58}$$

und etwa von einem Index an

$$\delta_j < \frac{\pi}{6}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn aus zwei der Gleichungen (58) folgt für die dritte

$$\delta_j > \frac{\pi}{6}.$$

Damit ist Hilfssatz V bewiesen.

Aus den Beweis der Hilfssätze ergibt sich übrigens noch eine Aussage über den Grad der Konvergenz. Wie groß muß man n wählen, damit sich z. B. $B_n(\alpha_3^{(n)} - \alpha_1^{(n)})$ um weniger als eine vorgeschriebene Zahl von $N\,\pi$ unterscheidet?

Der Fehler wird bedingt durch die Zusatzglieder

$$r(x) = p(x) + q(x)\, e^{-\alpha(B_n - x)}$$

in der Darstellung (54). Bei der Abschätzung von $r(x)$ kommen aber nur von n-unabhängige Ausdrücke ins Spiel, die man auch noch in jedem endlichen α-Intervall als fest ansehen kann, weil sie sich nur durch einen Faktor λ oder λ^2 im wesentlichen unterscheiden. Der Fehler hängt also nur ab vom maximalen Absolutbetrag des ersten Gliedes in (54) und ist um so größer, je kleiner dieses ist. Kann man aber beweisen, daß dieser Absolutbetrag für alle $n > n_0$ in einem abgeschlossenen α-Intervall größer als eine feste Zahl L ist, so kann man n_1 für das ganze Intervall so bestimmen, daß sich die in den Hilfssätzen betrachteten Größen um weniger als eine beliebige feste Zahl von ihren Grenzen unterscheiden. Wäre nun die Annahme über die Existenz der Zahlen n_0 und L nicht erfüllt, so könnte man eine Folge von Eigenwerten $\lambda^{(n)}$ angeben, die gegen ein λ_0 des Intervalls konvergieren, während die zugehörigen Funktionen $\varphi_n(x)$ gegen eine quadratisch integrable Funktion streben. λ_0 wäre also entgegen der Annahme dieses Paragraphen ein Eigenwert.

§ 3.

Die Ableitung der Spektralfunktion.

Die Spektralfunktion des Kerns $K(x, y)$ erhält man durch Approximation (vgl. Ca, S. 26) in folgender Weise. Seien $\varphi_i^{(n)}(x)$ die Eigenfunktionen des Kerns

$$K_n(x, y) = K(x, y) \qquad |x|, |y| \leqq B_n$$

sonst

$$= 0.$$

$\varphi_i^{(n)}(x)$ sei zunächst so normiert, daß

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \cos(\alpha_i^{(n)} x + \delta_i^{(n)}) + \eta_i^{(n)}(x).$$

Sei

$$c_i^{(n)2} = \Big[\int_{-B_n}^{B_n} \varphi_i^{(n)2}(x)\, d\,x\Big]^{-1}$$

und

$$c_i^{(n)}\, \varphi_i^{(n)}(x) = \psi_i^{(n)}(x)$$

die normierte Eigenfunktion im gewöhnlichen Sinne. Es sei nun $\Delta\,\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ ein samt seinen Randpunkten von Eigenwerten freies Intervall.

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 1,$$

$\Delta = \Delta\,\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ sei das entsprechende α-Intervall. Nach der Bemerkung am Schluß des vorigen Paragraphen sind von einem für das ganze Intervall geltenden n_0 an die $\eta_i^{(n)}(x)$ unter einer von n und i unabhängigen Schranke, falls $\alpha_1 \leqq \alpha_i^{(n)} \leqq \alpha_2$ ist.

Wir halten nun λ_1 fest und lassen $\Delta\,\lambda$ gegen Null gehen. Der Einfachheit halber machen wir zunächst die folgende Annahme: $S_\delta^{(n)}$ sei die Schwankung von $\delta_i^{(n)}$ in $\Delta\,\lambda$. S_δ sei der lim sup von $S_\delta^{(n)}$ für $n \to \infty$. Es sei

$$\lim_{\Delta \to 0} S_\delta = 0.$$

Dann existiert für jede Folge $\lambda_i^{(n)} \to \lambda_1$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \delta_i^{(n)} = \delta.$$

In diesem Falle konvergieren (ohne Auswahl!) die zugehörigen $\varphi_i^{(n)}(x)$ gegen die Lösung $\varphi(x, y_1) = \cos(\alpha_1 x + \delta) + \eta(x)$; anderenfalls müßte es nämlich eine Eigenfunktion geben.

Jetzt bilden wir nach Carleman die Funktion

$$\Delta\,\Theta_n(x, y\,|\,\lambda) = \Theta_n(x, y\,|\,\lambda) - \Theta_n(x, y\,|\,\lambda_1)$$

$$= \sum_i \psi_i^{(n)}(x)\, \psi_i^{(n)}(y) = \sum_i c_i^{(n)2}\, \varphi_i^{(n)}(x)\, \varphi_i^{(n)}(y)$$

und betrachten die Differenz

$$c_i^{(n)}\, \varphi(x, \lambda_1) - \psi_i^{(n)}(x).$$

In jedem endlichen x-Intervall, das aber für $n \to \infty$ festgehalten wird, ist nun

$$|\,\varphi(x, \lambda_1) - \varphi_i^{(n)}(x)\,| < \varepsilon_\Delta,$$

wo ε_Δ eine Größe ist, die zusammen mit Δ und $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. ε_Δ soll gleichzeitig für beliebige $n > n_0$ und für alle $\varphi_i^{(n)}(x)$ in Δ gelten, deren es ja nur endlich viele gibt. Würde ε_Δ nicht gegen Null gehen, so gäbe es eine Indexfolge n_k, $i_k\,(\lambda_{i_k}^{(n_k)} \to \lambda_1)$ und eine Folge x_k, die in einem festen Intervall gelegen ist, so daß $|\,\varphi(x_k, \lambda_1) - \varphi_{i_k}^{(n_k)}(x_k)\,| > \varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{\Delta \to 0} S_\delta = 0$ könnte man wiederum eine Teilfolge $\varphi^{(m)}(x)$ aus $\varphi_{i_k}^{(n_k)}(x)$

auswählen, so daß $\lim_{m \to \infty} \varphi^{(m)}(x) - \varphi(x, \lambda_1)$ eine nicht-identisch verschwindende Eigenfunktion wäre.

Da nun nach Hilfssatz IV und den Schlußbemerkungen des vorigen Paragraphen

$$c_i^{(n)} < \frac{C}{\sqrt{B_n}}$$

ist, wo C von i und n unabhängig ist[15]), so folgt

$$|c_i^{(n)} \varphi(x, \lambda_1) - \psi_i^{(n)}(x)| < \varepsilon_\Delta \frac{C}{\sqrt{B_n}},$$

$$|c_i^{(n)2} \varphi(x, \lambda_1) \varphi(y, \lambda_1) - \psi_i^{(n)}(x) \psi_i^{(n)}(y)| < M \varepsilon_\Delta \frac{C^2}{B_n}.$$

und

$$\left| \varphi(x, \lambda_1) \varphi(y, \lambda_1) \sum_i^{} c_i^{(n)2} - \sum \psi_i^{(n)}(x) \psi_i^{(n)}(y) \right| < M \varepsilon_\Delta \frac{C^2}{B_n} \cdot z_n.$$

z_n ist die Anzahl der in Δ liegenden Eigenwerte; sie ist nach Hilfssatz V nicht größer als

$$\Delta\alpha \cdot \frac{2 B_n}{\pi}.$$

Weil nun ε_Δ unabhängig von $n > n_0$ gewählt ist, so gilt die Ungleichung

$$\left| \varphi(x, \lambda_1) \varphi(y, \lambda_1) \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_i^{} c_i^{(n)2} - \frac{1}{\Delta\alpha} \sum \psi_i^{(n)}(x) \psi_i^{(n)}(y) \right| \tag{59}$$

$$< M \varepsilon_\Delta \frac{C^2}{B_n} \cdot \frac{z_n}{\Delta\alpha} = \frac{2 M C^2}{\pi} \varepsilon_\Delta,$$

für alle $n > n_0$ bei festem Δ. Man kann nun n so groß wählen, daß in einem festen x, y-Gebiet

$$|\Delta\Theta(x, y|\lambda) - \Delta\Theta_n(x, y|\lambda)| < \varepsilon_\Delta \cdot \Delta\alpha \text{ [16])}$$

ist, d. h. es ist

$$\left| \varphi(x, \lambda_1) \varphi(y, \lambda_1) \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_i^{} c_i^{(n)2} - \frac{\Delta\Theta(x, y|\lambda)}{\Delta\alpha} \right| < \left(\frac{2 M C^2}{\pi} + 1 \right) \varepsilon_\Delta \tag{60}$$

$$(n > n_0).$$

Da nun die Spektralfunktion von beschränkter Schwankung ist, so existiert für ein festes Paar (x, y) fast überall die Ableitung

$$\frac{\partial\Theta(x, y|\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\Theta(x, y|\lambda(\alpha))}{\partial\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda'(\alpha)}.$$

---

[15]) Weil nämlich $\lambda_1 > 1$, so ist $\alpha_1 > 0$ und

$$c_i^{(n)2} < \frac{1}{B_n} \left(\frac{1}{\alpha_1} + r \right), \qquad (r \to 0 \text{ für } n \to \infty).$$

[16]) Unser Kern $K(x, y)$ ist als beschränkter Kern von der ersten Klasse, für welche die Spektralfunktion eindeutig festgelegt ist (vgl. Ca, S. 81—82). Dann muß aber $\Theta_n(x, y|\lambda)$ gegen $\Theta(x, y|\lambda)$ konvergieren.

Wählen wir nun eine Folge $\Delta_m \alpha \to 0$ und zu jedem $\Delta_m \alpha$ ein n_m so daß (60) erfüllt ist, so folgt für irgendwelche festen Werte x_0, y_0, für welche nur $\varphi(x_0, \lambda_1)\, \varphi(y_0, \lambda_1) \neq 0$ sein soll, die Existenz des limes

$$\varphi(x_0, \lambda_1)\, \varphi(y_0, \lambda_1) \cdot \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\Delta_m \alpha} \sum_i c_i^{(n_m)\,2} = \frac{\partial\, \Theta(x_0, y_0 | \lambda_1)}{\partial\, \alpha},$$

wenn die rechte Seite existiert. Wir setzen

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\Delta_m \alpha} \sum_i c_i^{(n_m)\,2} = c^2(\lambda_1).$$

Es sei nun

$$\left| c^2(\lambda_1) - \frac{1}{\Delta_m \alpha} \sum_i c_i^{(n_m)\,2} \right| < \bar{\varepsilon}_{\Delta_m},$$

wo auch $\lim\limits_{\Delta_m \to 0} \bar{\varepsilon}_{\Delta_m} = 0$. Dann folgt aus (60) für alle x, y eines festen Bereiches

$$\left| \varphi(x, \lambda_1)\, \varphi(y, \lambda_1)\, c^2(\lambda_1) - \frac{\Delta_m \Theta(x, y|\lambda)}{\Delta_m \alpha} \right| < \frac{2\, M\, C^2 + 1}{\pi}\, \varepsilon_{\Delta_m} + C_1\, \bar{\varepsilon}_{\Delta_m}$$

und hieraus die Existenz der Ableitung

$$\frac{\partial\, \Theta(x, y|\lambda)}{\partial\, \lambda}$$

für alle x, y.

Nun ist noch der Fall zu erledigen, daß $\lim\limits_{\Delta \to 0} S_\vartheta > 0$. Jetzt ergeben sich offenbar für λ_1 zwei linear unabhängige Lösungen $\varphi_1(x, \lambda_1)$, $\varphi_2(x, \lambda_1)$, die wir etwa so festlegen können

(61) $\varphi_1(x, \lambda_1) = \cos \alpha_1 x + \eta_1(x, \lambda_1)$; $\varphi_2(x, \lambda_1) = \sin \alpha_1 x + \eta_2(x, \lambda_1)$.

$\varphi_i^{(n)}(x) = \bar{c}_i^{(n)} \cos \alpha_i^{(n)} x + \bar{d}_i^{(n)} \sin \alpha_i^{(n)} x + \eta_i^{(n)}(x)$ $(\bar{c}_i^{(n)\,2} + \bar{d}_i^{(n)\,2} = 1)$ sei eine der approximierenden Lösungen;

$$\psi_i^{(n)}(x) = c_i^{(n)} \cos \alpha_i^{(n)} x + d_i^{(n)} \sin \alpha_i^{(n)}(x) + \eta_i^{(n)}(x)$$

die entsprechende normierte Lösung.

Man findet genau wie vorher

(62a) $$\left| c_i^{(n)}\, \varphi_1(x, \lambda_1) + d_i^{(n)}\, \varphi_2(x, \lambda_1) - \psi_i^{(n)}(x) \right| < \varepsilon_\Delta \frac{C}{\sqrt{B_n}}.$$

(62b) $$\left| c_i^{(n)\,2}\, \varphi_1(x, \lambda_1)\, \varphi_1(y, \lambda_1) + d_i^{(n)\,2}\, \varphi_2(x, \lambda_1)\, \varphi_2(y, \lambda_1) + c_i^{(n)}\, d_i^{(n)} [\varphi_1(x, \lambda_1)\, \varphi_2(y, \lambda_1) + \varphi_2(x, \lambda_1)\, \varphi_1(y, \lambda_1)] - \psi_i^{(n)}(x)\, \psi_i^{(n)}(y) \right| < M\, \varepsilon_\Delta \frac{C^2}{B_n}$$ [17]).

---

[17]) Man wird allgemein nicht nachweisen können, daß das gemischte Glied verschwindet, weil man ebenso wenig zeigen kann, daß etwa die $\varphi_i^{(n)} x$ in asymptotische Typen $\cos \alpha_i^{(n)} x$ und $\sin \alpha_i^{(n)} x$ zerfallen. Vgl. dagegen den im nächsten Paragraphen behandelten Fall.

$$(62\,c)\qquad \Big| C^{(n)2}\,\varphi_1(x,\lambda_1)\,\varphi_1(y,\lambda_1) + D^{(n)2}\,\varphi_2(x,\lambda_1)\,\varphi_2(y,\lambda_1) + E^{(n)}\,[\varphi_1(x,\lambda_1)\,\varphi_2(y,\lambda_1) + \varphi_2(x,\lambda_1)\,\varphi_1(y,\lambda_1)] - \frac{\Delta\,\Theta(x,y|\lambda)}{\Delta\,\alpha}\Big| < \Big(\frac{2\,M\,C^2}{\pi} + 1\Big)\,\varepsilon_\Delta \qquad (n > n_0).$$

Nun können wir annehmen, daß für die gleich zu definierenden endlich vielen Wertepaare (x, y) die Ableitung $\frac{\partial\,\Theta(x,y|\lambda_1)}{\partial\,\alpha}$ existiert.

Es seien nämlich x_1 und x_2 so bestimmt, daß

$$1.\ \varphi_1(x_1,\lambda_1) \neq 0, \quad \varphi_2(x_1,\lambda_1) = 0,$$
$$2.\ \varphi_1(x_2,\lambda_1) = 0, \quad \varphi_2(x_2,\lambda_1) \neq 0,$$

was immer zu erreichen ist, wenn man x_1 und x_2 hinreichend groß wählt. $\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\alpha}$ soll für alle Kombinationen (x_i, x_k) existieren. Indem man der Reihe nach $x = y = x_1$, $x = y = x_2$, $\begin{matrix} x = x_1 \\ y = x_2 \end{matrix}$ setzt, ergibt sich die Existenz der limites

$$\lim_{n\to\infty} C^{(n)2} = c^2(\lambda_1), \quad \lim_{n\to\infty} D^{(n)2} = d^2(\lambda_1), \quad \lim_{n\to\infty} E^{(n)} = e(\lambda_1).$$

Genau wie vorher beweist man die Existenz von $\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\alpha}$ für alle x, y, und es gilt

$$(63)\qquad c^2(\lambda_1)\,\varphi_1(x,\lambda_1)\,\varphi_1(y,\lambda_1) + d^2(\lambda_1)\,\varphi_2(x,\lambda_1)\,\varphi_2(y,\lambda_1) + e(\lambda_1)\,[\varphi_1(x,\lambda_1)\,\varphi_2(y,\lambda_1) + \varphi_2(x,\lambda_1)\,\varphi_1(y,\lambda_1)] = \frac{\partial\,\Theta(x,y|\lambda(\alpha))}{\partial\,\alpha}.$$

Man überzeugt sich übrigens leicht, daß für einen festen endlichen x, y-Bereich im ganzen α-Intervall der Differenzenquotient $\frac{\Delta\,\Theta}{\Delta\,\alpha}$ beschränkt ist. $\Delta\,\Theta(x, y|\lambda)$ ist also das unbestimmte Integral der linken Seite in (63) nach α. Dies gilt in allen Intervallen, die keine Eigenwerte enthalten. Die linken Seiten in (63) existieren bis in beliebige Nähe eines Eigenwertes.

§ 4.

Gerade Kerne; das Fouriertheorem.

Wir machen jetzt ausdrücklich die *Annahme*

$$(\mathrm{L})\qquad K(x,y) = K(-x,-y).$$

Dann wollen wir zeigen, daß von selbst

$$c^2 \equiv d^2 \equiv \frac{1}{\pi}, \quad e \equiv 0$$

sein muß.

Aus der Annahme ergibt sich für die approximierenden Funktionen $\varphi_i^{(n)}(x)$ bei geeigneter Normierung folgendes.

Ist $\lambda_i^{(n)}$ ein einfacher Eigenwert, so ist entweder

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \cos \alpha_i^{(n)}(x) + \eta_i^{(n)}(x) + \zeta_i^{(n)}(x),$$

oder

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \sin \alpha_i^{(n)}(x) + \eta_i^{(n)}(x) + \zeta_i^{(n)}(x)$$

mit

$$\lim_{|x| \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \eta_i^{(n)}(x) \right) = 0 \text{ und } |\zeta_i^{(n)}(x)| < \frac{C}{B_n^{l-1}}.$$

$\zeta_i^{(n)}(x)$ ist eine eventuell hinzutretende trigonometrische Funktion, im ersten Falle $c_i^{(n)} \sin \alpha_i^{(n)} x$, im zweiten $c_i^{(n)} \cos \alpha_i^{(n)} x$. Es muß nämlich $\varphi_i^{(n)}(x)$ entweder gerade oder ungerade sein; sonst bekämen wir in $\varphi_i^{(n)}(-x)$ eine zweite Eigenfunktion. Ist z. B. $\varphi_i^{(n)}(x)$ gerade, so muß gelten

$$\begin{aligned} \eta_i^{(n)}(x) - \eta_i^{(n)}(-x) &= \zeta_i^{(n)}(-x) - \zeta_i^{(n)}(x) \\ &= -2 c_i^{(n)} \sin \alpha_i^{(n)} x. \end{aligned}$$

Nun hatte $\eta_i^{(n)}(x)$ die Form (vgl. Hilfssatz IV)

$$O\left(\frac{1}{x^{l-1}}\right) + q(x) e^{-a(B_n - x)}.$$

Wählen wir m so, daß $(m - \frac{1}{2}) \pi \leqq \frac{B_n}{2} \leqq (m + \frac{1}{2}) \pi$ und setzen etwa $\alpha_i^{(n)} \xi = (m + \frac{1}{2}) \pi$ so ergibt sich für hinreichend große n sofort für $|\zeta_i^{(n)}(x)|$ die gewünschte Abschätzung.

Für die Grenzfunktion $\varphi(x, \lambda_1)$ folgt daraus eine der Darstellungen

$$\cos \alpha_1 x + \eta(x, \lambda_1),$$
$$\sin \alpha_1 x + \eta(x, \lambda_1).$$

Dasselbe kann man auch erreichen, wenn $\lambda_i^{(n)}$ ein doppelter Eigenwert ist. Als Eigenfunktionen wählen wir dann eine gerade und eine ungerade Lösung, die in dem Intervall $[-B_n, +B_n]$ offenbar orthogonal sind. Dann gelten genau dieselben Überlegungen. Setzen wir

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda_1) &= \cos \alpha_1 x + \eta_1(x, \lambda_1), \\ \varphi_2(x, \lambda_1) &= \sin \alpha_1 x + \eta_2(x, \lambda_1), \end{aligned} \tag{64}$$

so nimmt (63) die einfache Form an

$$\frac{\partial \Theta(x, y | \lambda_1(\alpha))}{\partial \alpha} = c^2(\lambda_1) \varphi_1(x, \lambda_1) \varphi_1(y, \lambda_1) + d^2(\lambda_1) \varphi_2(x, \lambda_1) \varphi_2(y, \lambda_1). \tag{65}$$

Nun ist zu zeigen, daß

$$c^2 = d^2 = \frac{1}{\pi}$$

ist.

Wir verfahren ganz analog wie Carleman beim Beweis von Theorem V_3 (S. 101, vgl. auch S. 93—99). Nur fassen wir nicht wie dort das ganze Spektrum ins Auge, sondern nur ein Intervall $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, das einschließlich seiner Endpunkte keinen Eigenwert enthält. Danach gilt folgendes:

Ist $\omega_1(x,\lambda)$, $\omega_2(x,\lambda)$ ein System von Differentiallösungen, derart, daß

$$\int \Delta\,\omega_1(x,\lambda)\cdot\Delta\,\omega_2(x,\lambda)\,dx = 0 \tag{66a}$$

ist, und für welches jede Differentiallösung $\Omega(x,\lambda)$, die zu beiden orthogonal ist,

$$\int \Delta\,\Omega(x,\lambda)\,\Delta\,\omega_i(x,\lambda)\,dx = 0 \qquad i = 1,2 \tag{66b}$$

sich auf eine nur von x (nicht λ) abhängige Funktion reduziert, so ist

$$\sum_{i=1,2}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\frac{d\,\omega_i(x,\lambda)\,d\,\omega_i(y,\lambda)}{d\,\varrho_i(\lambda)} = \Delta\,\Theta(x,y|\lambda) = \Theta(x,y|\lambda_2)-\Theta(x,y|\lambda_1). \tag{67}$$

Für das links auftretende Hellingersche Integral ergibt sich aber, falls wir

$$\omega_1(x,\lambda) = \int_{\alpha_1}^{\alpha}\varphi_1(x,\alpha)\,d\alpha, \quad \omega_2(x,\lambda) = \int_{\alpha_1}^{\alpha}\varphi_2(x,\alpha)\,d\alpha \tag{68}$$

$$(\lambda(\alpha_1) = \lambda_1, \quad \lambda(\alpha) = \lambda)$$

setzen, daß

$$\Delta\,\varrho_i = \int(\Delta\,\omega_i(x,\lambda))^2\,dx = |\alpha''-\alpha'|\,\pi \tag{69}$$

bis auf Größen höherer Ordnung ist. Daraus folgt dann leicht die gewünschte Beziehung.

Wir wollen vorerst zeigen, daß $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ stetig in α, daher auch in λ, sind, und daß ihre Integrale nach α wirklich ein vollständiges System von Differentiallösungen bilden.

Aus einigen Bemerkungen beim Beweis von Hilfssatz IV[18]) folgt, daß in den Formeln (64) die Funktionen $\eta_i(x,\lambda)$ einer Abschätzung

$$|\eta_i(x,\lambda)| < \frac{C}{|x|^l} \qquad (l > \tfrac{3}{2},\ \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2) \tag{70}$$

genügen. Hätte für irgend ein x innerhalb des Stetigkeitsbereiches von φ_i die Folge $\varphi_i(x,\lambda_n)$ ($\lambda_n \to \lambda_0$ in $[\lambda_1,\lambda_2]$) mehrere Häufungspunkte, so folgt aus der gleichgradigen Stetigkeit die Existenz einer zweiten Lösung von demselben asymptotischen Verhalten. Wegen (70) ist die Differenz beider Lösungen eine Eigenfunktion entgegen der Annahme.

[18]) Vgl. auch den Beginn von § 2 dieses Abschnittes.

Die Konvergenz ist offenbar gleichmäßig in jeden endlichen x-Intervall
Wegen (70) ist in $[\lambda_1, \lambda_2]$ (vgl. (68))

$$|\omega_i(x, y)| < \frac{C}{|x|}. \tag{71}$$

Die Funktionen $\omega_i(x, \lambda)$ sind also quadratisch integrierbar.

Ihre Orthogonalität (66 a) folgt sofort daraus, daß ω_1, ω_2 ebenso wie φ_1 und φ_2 gerade bzw. ungerade sind. Viel tiefer liegt dagegen der Beweis des Nullwerdens von $\Delta\Omega$. Wir brauchen nur zu zeigen, daß aus (66 b)

$$\int \Delta\Omega(x, y)\, \Delta\Theta(x, y \mid \lambda)\, dx = 0 \tag{72}$$

folgt; denn für jede Differentiallösung hat die linke Seite von (72) den Wert $\Delta\Omega(x, y)$[19]). Wir geben y einen festen Wert und setzen

$$c^2(\lambda)\, \varphi_1(y, \lambda) = g_1(\lambda), \quad d^2(\lambda)\, \varphi_2(y, \lambda) = g_2(\lambda)$$

Die linke Seite von (72) schreibt sich dann in der Form

$$\int dx\, \Delta\Omega(x, \lambda) \int_{\alpha'}^{\alpha''} \sum_{i=1,2} \varphi_i(x, \lambda)\, g_i(\lambda)\, d\alpha \qquad (\lambda = \lambda(\alpha)) \tag{73}$$

Dabei ist $\Delta\Omega(x, \lambda) = \Omega(x, \lambda'') - \Omega(x, \lambda')$.

(73) wiederum kann man in zwei Summanden zerspalten von der Form

$$\int dx \int_{\lambda'}^{\lambda''} g_i(\lambda)\, d\tau_i(x, \lambda), \tag{74}$$

$$\tau_i(x, \lambda) = \Delta\Omega(x, \lambda) \int_{\lambda'}^{\lambda} \varphi_i(x, \lambda)\, d\alpha.$$

Da der Faktor $\Delta\Omega(x, \lambda)$, der nur von x abhängt, quadratisch integrierbar ist, und z. B. in $\varphi_1 = \cos\alpha\, x + \eta_1(x, \alpha)$ auch η_1 quadratisch integrabel ist (gleichmäßig bezüglich α), so folgert man leicht, daß für die totale Variation $\| \tau_i(x, \lambda) \|$ von τ_i das Integral $\int \| \tau_i(x, \lambda) \|\, dx$ existiert. Wir setzen zunächst die $g_i(\lambda)$ als stetige Funktionen an. Dann kann man in (74) die Integrationen vertauschen[20])

$$\int dx \int_{\lambda'}^{\lambda''} g_i(\lambda)\, d\tau_i(x, \lambda) = \int_{\lambda'}^{\lambda''} g_i(\lambda)\, d \int \tau_i(x, \lambda)\, dx.$$

Da aber nach (66 b) $\int \tau_i(x, \lambda)\, dx$ gleich Null ist, so auch (72) w. z. b. w.
Offenbar genügt auch bloß stückweise Stetigkeit für die $g_i(\lambda)$. Um sich auch davon zu befreien, braucht man sie nur durch Treppenfunktionen $\bar{g}$

---

[19]) Vgl. Ca (125), S. 89. $\sigma(x, y|\lambda)$ ist der stetige Teil von $\Theta(x, y|\lambda)$. In unserem Falle ist also $\Delta\sigma = \Delta\Theta$.

[20]) Vgl. Ca, Theorem I, S. 8.

zu approximieren, derart, daß $\int |\varphi_i| g_i - \bar{g}_i| \, d\alpha < \varepsilon$ ist, wo ε unabhängig von x ist. Dies ist möglich, weil die φ_i nach Seite 54 in Δ unabhängig von x und λ beschränkt sind. Daraus folgt zuerst für hinreichend große x_1, daß $\int_{-x_1}^{x_1} dx \, \Delta\Omega \int_{\alpha'}^{\alpha''} \sum_{i=1,2} \varphi_i g_i \, d\alpha$ beliebig klein ist, und daraus dasselbe für (73).

Es bleibt noch die Berechnung von (67) bzw. (69). Man erhält z. B. für ω_1

$$\Delta \varrho_1 = \int (\Delta \omega_1)^2 \, dx = \int dx \Big[\int_{\alpha'}^{\alpha''} (\cos \alpha \, x + \eta_1) \, d\alpha \Big]^2$$

$$= \int dx \left\{ \frac{1}{x^2} [\sin^2 \alpha'' \, x + \sin^2 \alpha' \, x - 2 \sin \alpha'' \, x \sin \alpha' \, x] \right.$$

$$\left. + 2 \tilde{\eta}_1 \frac{(\alpha'' - \alpha')}{x} (\sin \alpha'' \, x - \sin \alpha' \, x) + \tilde{\eta}_1^2 (\alpha'' - \alpha')^2 \right\},$$

wo $\tilde{\eta} = \eta(x, \tilde{\alpha})$ ein gewisser Mittelwert ist, der aber immer noch die Form $0\left(\frac{1}{x^{l-1}}\right)$ besitzt.

Das erste Glied liefert unter Benutzung der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} = \frac{\pi}{2}$$

den Beitrag

$$|\alpha'' - \alpha'| \pi.$$

Da die asymptotische Form von η bzw. $\tilde{\eta}$ nicht von α abhängt, so ist

$$\lim_{x^* \to \infty} \int_{x^*} \frac{\eta(x, \alpha)}{x} dx = 0$$

gleichmäßig in α. Wählen wir also $x^* = |\alpha'' - \alpha'|^{-\frac{1}{2}}$, so geht mit $|\alpha'' - \alpha'| \to 0$ dies Glied gegen Null.

Andererseits ist

$$|\sin \alpha'' \, x - \sin \alpha' \, x| = |2 \sin \frac{\alpha'' - \alpha'}{2} x \cos \frac{\alpha'' - \alpha'}{2} x|$$

$$\leqq |\alpha'' - \alpha'|^{\frac{1}{2}}, \text{ wenn } |x| < |\alpha'' - \alpha'|^{-\frac{1}{2}}.$$

Dies zeigt, daß im zweiten Gliede der Faktor von $\alpha'' - \alpha'$ mit $|\alpha'' - \alpha'|$ klein wird. Das dritte Glied wird, weil $\tilde{\eta}^2$ absolut integrabel ist ($l > \frac{3}{2}$), klein wie $(\alpha'' - \alpha')^2$. Es ist also

(75) $$\Delta \varrho_i = |\alpha'' - \alpha'| (\pi + \varepsilon),$$

wo ε mit $|\alpha'' - \alpha'|$ gegen Null geht. Aus den Betrachtungen folgt, daß ε gleichmäßig für alle Punkte des ursprünglichen Intervalls $[\alpha_1, \alpha_2]$ klein wird. Wir bekommen also schließlich aus (67) und (75)

$$(76) \qquad \Delta\Theta(x, y \mid \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (\varphi_1(x, \alpha)\, \varphi_1(y, \alpha) + \varphi_2(x, \alpha)\, \varphi_2(y, \alpha))\, d\alpha,$$

und dies war das Ziel unserer Betrachtungen. Soweit nur eine einzige Lösung existiert, ist natürlich einer der Summanden fortzulassen.

Aus (76) folgt für eine quadratisch integrable Funktion $h(y)$, wenn die Eigenwerte sich nirgends im Endlichen häufen, die Darstellung (vgl. Ca (148), S. 102)

$$(77) \qquad \int K(x, y)\, h(y)\, dy = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p} \varphi_p(x) \int \varphi_p(y)\, h(y)\, dy$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_0 \frac{d\alpha}{\lambda(\alpha)} [\varphi_1(x, \alpha) \int \varphi_1(y, \alpha)\, h(y)\, dy + \varphi_2(x, \alpha) \int \varphi_2(y, \alpha)\, h(y)\, dy].$$

Ist $h(y)$ sogar absolut integrabel, und setzt man

$$\int K(x, y)\, h(y)\, dy = f(x),$$

so ergibt sich, indem man in den inneren Integralen $\varphi_i(y, \alpha)$ durch

$$\lambda(\alpha) \int K(y, z)\, \varphi_i(z, \alpha)\, dz$$

ersetzt und die Integrationen vertauscht[21]). Die Fourierdarstellung

$$(77\,a) \quad f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x) \int \varphi_p(y) f(y)\, dy + \frac{1}{\pi} \int_0 dx \Big[\varphi_1(x, \alpha) \int \varphi_1(y, \alpha) f(y)\, dy$$
$$+ \varphi_2(x, \alpha) \int \varphi_2(y, \alpha) f(y)\, dy\Big]^{22}).$$

Wir formulieren noch einmal die Resultate des letzten Abschnittes.

Satz IV. *Unter den Bedingungen* (J) *und* (K) *existiert in allen von Eigenwerten freien Intervallen fast überall die Ableitung der Spektralfunktion* $\Theta(x, y \mid \lambda)$ *nach* α *und ist gleich einer Bilinearform der Lösungen*

$$\varphi_1(x, \alpha) = \cos \alpha x + \eta_1(x, \alpha), \quad \varphi_2(x, \alpha) = \sin \alpha x + \eta_2(x, \alpha)$$

mit von α *abhängigen Koeffizienten* (63). *Ist der Kern gerade, so ist*

$$\pi \frac{\partial \Theta(x, y \mid (\alpha))}{\partial \alpha} = \varphi_1(x, \alpha)\, \varphi_1(y, \alpha) + \varphi_2(x, \alpha)\, \varphi_2(y, \alpha).$$

Jede in der Form (78) *durch eine absolut integrable Funktion* $h(y)$ *dargestellte Funktion* $f(x)$ *ist in der Fourierschen Weise* (77 a) *entwickelbar.*

---

[21]) In dem Integral $\int dy\, h(y) \int K(y, z)\, \varphi_i(z, \alpha)\, dz$ ist nach Hilfssatz III $\int |K(y, z)\, \varphi_i(z, \alpha)|\, dz = O\left(\frac{1}{|y|^l}\right)$, nach dem Fubinischen Satz die Vertauschung also gestattet.

[22]) Vgl. hierzu auch Weyl, Dissertation § 9, S. 46.

Schlußbemerkungen.

Aus den Entwicklungen des zweiten Abschnittes erheben sich Fragen, deren Klärung im Interesse einer Abrundung sehr wünschenswert ist. So z. B. die Frage des Auftretens von Eigenwerten, insbesondere, wenn diese keine Häufungspunkte im Endlichen haben. Sodann die Anzahl linear unabhängiger Lösungen, soweit sie keine Eigenfunktionen sind. Es werden vor allem die Fälle zu charakterisieren sein, in welchen es für alle $\lambda > 1$ genau zwei Lösungen gibt. Offen ist auch noch die Frage, ob die Ableitung der Spektralfunktion stetig ist. Wünschenswert wären auch weitere Kriterien für das Erfülltsein der Bedingungen (J) und (K). Gesichert sind die Ergebnisse des zweiten Abschnittes für gerade Kerne mit dem Grundkern

$$K_0(t) = e^{-\alpha|t|}.$$

Von dieser letzteren Einschränkung, sowie von den schärferen Voraussetzungen über die Grundkerne (vor allem (G) und (H)) sich befreien zu können, erscheint durchaus nicht aussichtslos. Es sei hier nur noch kurz eine Andeutung über den leitenden Gedanken gemacht. Es würde dann überhaupt der ganze Existenzbeweis des ersten Abschnittes durch einen einheitlichen Beweisgang ersetzt werden können.

Es sei also $K_0(t)$ ein Grundkern, der in der Form $2\int \frac{\cos \alpha t}{\lambda(\alpha)} d\alpha$ mit monotonen $\lambda(\alpha)$ darstellbar ist. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß für den Kern $K(x,y) = K_0(x-y)(1+\eta(x,y))$ (η wie früher definiert) die „bilineare Formel" gilt

$$K(x,y) = \int_1 \frac{d_\lambda \Theta(x,y \mid \lambda)}{\lambda},$$

z. B. wenn K ein positiver Kern ist. Wir können auch schreiben

$$K(x,y) = \int_1 \frac{d_\alpha \Theta(x,y \mid \lambda(\alpha))}{\lambda(\alpha)},$$

wo $\frac{1}{\lambda(\alpha)}$ die Transformierte von $K_0(t)$ ist.

Nun ersetzen wir den Nenner $\lambda(\alpha)$ durch eine andere Funktion $\mu(\alpha)$ und fragen uns, ob wir so wieder einen Kern

$$K_\mu(x,y) = \int \frac{d_\alpha \Theta(x,y \mid \lambda(\alpha))}{\mu(\alpha)}$$

unserer Klasse, nur mit einem anderen Grundkern bekommen. Es ließe sich dann alles auf die Betrachtung nur eines Grundkerns z. B. $e^{-\alpha|t|}$ zurückführen. Hier wäre etwa folgender Weg einzuschlagen.

Die Spektralform $\Theta(x, y \mid \lambda)$ läßt sich durch die Umkehrformel von Stieltjes aus der Lösung der inhomogenen Gleichung berechnen. Ist für $\lambda = \lambda_0 + i\varepsilon$

$$\varphi(x, \lambda) - \lambda \int K(x, y)\, \varphi(x, \lambda)\, dy = f(x),$$

so gilt (vgl. Ca, S. 82)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\lambda} \left[\frac{\varphi(x, \mu + i\varepsilon)}{\mu + i\varepsilon} - \frac{\varphi(x, \mu - i\varepsilon)}{\mu - i\varepsilon} \right] d\mu$$

$$= -\frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2} \int [\Theta(x, s \mid \lambda_0 + 0) + \Theta(x, s \mid \lambda_0 - 0)]\, f(s)\, ds.$$

$f(s)$ setzt man etwa in der Umgebung von y gleich C, und sonst Null. Daraus erhält man für $C \cdot \Delta s = 1$ und $\Delta s \to 0$ die Funktion $\Theta(x, y \mid \lambda)$. Man gewinnt daraus Θ in der Form

$$\Theta(x, y \mid \lambda) = \frac{\sin \alpha (x - y)}{x - y} + \Theta_1(x, y \mid \lambda).$$

Wenn man nun zeigen kann, daß der Kern

$$\int \frac{d_\alpha \Theta_1(x, y \mid \lambda)}{\mu(\alpha)}$$

ein vollstetiger Kern ist von der Art $K_0(x - y)\, \eta(x, y)$, so ist alles gemacht. Diese Darstellung von Θ führt allerdings auf sehr umständliche Rechnungen und Abschätzungen, die aber durchaus als durchführbar erscheinen.

(Eingegangen am 19. Oktober 1936.)

On the Absolute Summability of the Allied Series of a Fourier Series.

By

L. S. Bosanquet in London and J. M. Hyslop in Glasgow.

1. Introduction.

1.1. Some theorems have been obtained recently[1]) concerning the absolute Cesàro summability of a Fourier series. It has also been shown recently[2]) that absolute Cesàro summability (summability $|C, \alpha|$) is equivalent to absolute Rieszian summability of type n (summability $|R, n, \alpha|$). It therefore seems to be of interest to investigate the analogous problem for the Allied series, using Rieszian means throughout. We begin with a summary of some of the known results concerning the ordinary and absolute Cesàro summability of Fourier series, in order to show what new results are to be expected.

1.2. We suppose throughout that $f(t)$ is periodic with period 2π, and Lebesgue integrable in $(-\pi, \pi)$. We write

$$(1.2\,1)\quad \begin{cases} \varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}, \quad \psi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}, \\ \theta(t) = \frac{2}{\pi}\int_t^\infty \frac{\psi(u)}{u}\,du\,^3), \end{cases}$$

and suppose throughout that $t > 0$. We also write

$$(1.2\,2)\quad \begin{cases} \Phi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)\,du, & \alpha > 0, \\ \Phi_0(t) = \varphi(t), & \\ \varphi_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)\,t^{-\alpha}\Phi_\alpha(t), & \alpha \geqq 0. \end{cases}$$

We employ $\Psi_\alpha(t)$, $\psi_\alpha(t)$, $\Theta_\alpha(t)$, $\theta_\alpha(t)$ with similar meanings.

---

[1]) Bosanquet, 6, 7.

[2]) Hyslop, 15.

[3]) Here and elsewhere $\int_t^\infty$ means $\lim_{\xi\to\infty}\int_t^\xi$. The function $\theta(t)$ exists in this sense, since $\psi(u)$ is odd and periodic. Also $\theta(t)$ is Lebesgue integrable in any range $(0, \eta)$, $\eta > 0$. Cf. Hardy, 9.

There will be no loss of generality if we suppose the Fourier series of $f(t)$ to be

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{1.23}$$

The Fourier series of $\varphi(t)$ is then

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt, \tag{1.24}$$

where $c_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$. The Allied series is

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt), \tag{1.25}$$

and the Fourier series of $\psi(t)$ is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n \sin nt, \tag{1.26}$$

where $\bar{c}_n = b_n \cos nx - a_n \sin nx$.

We shall be concerned only with the summability of the series at the point $t = x$. Accordingly we write s_n^α and $\bar{s}_n^\alpha$ for the n-th Cesàro means of order α of the series Σc_n and $\Sigma \bar{c}_n$ respectively[4]). We write, for $\alpha > -1$, $\omega \geqq 0$,

$$C_\alpha(\omega) = \omega^{-\alpha} A_\alpha(\omega) = \sum_{n<\omega} \left(1 - \frac{n}{\omega}\right)^\alpha c_n, \tag{1.27}$$

and define $\bar{C}_\alpha(\omega)$, $\bar{A}_\alpha(\omega)$ in a similar way. We also write

$$B_\alpha(\omega) = \sum_{n<\omega} (\omega - n)^\alpha n c_n, \tag{1.28}$$

and define $\bar{B}_\alpha(\omega)$ in a similar way.

1.3. Definition 1. The series Σc_n is said to be *absolutely summable* (C, α), or *summable* $|C, \alpha|$, where $\alpha \geqq 0$, if $\Sigma |s_n^\alpha - s_{n-1}^\alpha|$ converges. The sequence $s_n = c_1 + \ldots + c_n$ is also said to *converge* $|C, \alpha|$ *to the limit* $\lim s_n^\alpha$.

Definition 2. The series Σc_n is said to be *absolutely summable* (R, n, α), or *summable* $|R, n, \alpha|$, where $\alpha \geqq 0$, if

$$\int_1^{\infty} |d C_\alpha(\omega)| < \infty \text{ [5])} \tag{1.31}$$

---

[4]) Thus, for $\alpha > -1$, $s_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^\alpha c_\nu$, where, for $|x| < 1$, $(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x^\nu$.

[5]) We write $\int_a^b |dg(x)| = \int_a^b dG(x) = G(b) - G(a)$, where $G(x)$ denotes the total variation of $g(x)$ in some closed interval $[c, x]$, c being independent of x.

In particular, summability $|C, 0|$ and $|R, n, 0|$ are the same as absolute convergence.

1.4. The equivalence of Cesàro and Riesz absolute summability is expressed by the following lemma.

Lemma 1[6]). *A necessary and sufficient condition for a series to be summable* $|C, \alpha|$, *where* $\alpha \geqq 0$, *is that it be summable* $|R, n, \alpha|$.

The consistency theorem for absolute Cesàro summability is as follows.

Lemma 2[7]). *If a series is summable* $|C, \alpha|$, *where* $\alpha \geqq 0$, *then it is summable* $|C, \beta|$, *for* $\beta > \alpha$.

The next two lemmas contain some important identities[8]).

Lemma 3. *If* $\alpha \geqq 0$, *then*

$$\theta_\alpha(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^\infty \frac{\psi_\alpha(u)}{u} \, du.$$

Lemma 4. *If* $\alpha \geqq 0$, *then*

$$\psi_{\alpha+1}(t) = \tfrac{1}{2}\pi(\alpha+1)\{\theta_{\alpha+1}(t) - \theta_\alpha(t)\}.$$

From Lemma 4 and the consistency theorem for Cesàro limits of functions[9]) we obtain the following result.

Lemma 5[10]). *If* $\alpha \geqq 0$, *then necessary and sufficient conditions that* $\theta_\alpha(t) \to s$ *as* $\alpha \to 0$ *are that* $\psi_{\alpha+1}(t) \to 0$ *and* $\theta_\lambda(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *for some positive* λ.

1.5. Concerning the Cesàro summability of a Fourier series and its Allied series at the point $t = x$ we have the following six theorems[11]).

Theorem A[12]). *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\varphi_\alpha(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *then* Σc_n *is summable* $(C, \alpha + \delta)$ *to* s, *for every* $\delta > 0$.

Theorem B[13]). *If* $\alpha \geqq 0$ *and* Σc_n *is summable* (C, α) *to* s, *then* $\varphi_{\alpha+1+\delta}(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *for every* $\delta > 0$.

In particular, we have the following theorem of Hardy and Littlewood[14]).

---

[6]) Hyslop, 15.

[7]) Kogbetliantz, 16. The analogous result concerning summability $|R, n, \alpha|$ was given by Obreschkoff, 17.

[8]) Bosanquet, 3.

[9]) Cf. Bosanquet, 1.

[10]) Paley, 18.

[11]) For a list of references see Bosanquet, 3.

[12]) Given, for $\alpha = 0$, by M. Riesz, Chapman, W. H. Young and Gronwall; for $\alpha = 1$, by W. H. Young; for $0 < \alpha < 1$, by Hardy and Littlewood; for $\alpha > 1$, by Paley, Verblunsky, Wiener and Bosanquet.

[13]) Given by Paley, Verblunsky, Wiener and Bosanquet. The result still holds when $-1 \leqq \alpha < 0$.

[14]) Hardy and Littlewood, 10, were the first to investigate theorems of this type.

Theorem C. *A necessary and sufficient condition that* Σc_n *should be summable* (C) *to* s, *is that* $\varphi_\lambda(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *for some positive* λ.

Theorem D[15]). *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\psi_\alpha(t) \to 0$ *as* $t \to 0$ *and* $\theta_\lambda(t) \to$ *as* $t \to 0$, *for some positive* λ, *then* $\Sigma \bar{c}_n$ *is summable* $(C, \alpha + \delta)$ *to* s, *for every* $\delta > 0$.

Theorem E[16]). *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\Sigma \bar{c}_n$ *is summable* (C, α) *to* s, *then* $\theta_{\alpha+\delta}(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *for every* $\delta > 0$.

When $\alpha \geqq 1$ the hypotheses in Theorem D are, by Lemma 5, equivalent to $\theta_{\alpha-1}(t) \to s$ *as* $t \to 0$. Thus, in particular, we have the following theorem of Hardy and Littlewood[14]).

Theorem F. *A necessary and sufficient condition that* $\Sigma \bar{c}_n$ *should be summable* (C) *to* s *is that* $\theta_\lambda(t) \to s$ *as* $t \to 0$, *for some positive* λ.

It has been shown, when $\alpha = 0$, that Theorems A, B, D and E are false for $\delta = 0$.

1.6. Concerning the absolute Cesàro summability of a Fourier series we have the following three theorems[18]).

Theorem G. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\varphi_\alpha(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$, *then* Σc_n *is summable* $|C, \alpha + \delta|$ *for every* $\delta > 0$.

Theorem H. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* Σc_n *is summable* $|C, \alpha|$, *then* $\varphi_{\alpha+1+\delta}(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$ *for every* $\delta > 0$.

In particular we have the following theorem.

Theorem I. *A necessary and sufficient condition that* Σc_n *should be summable* $|C|$ *is that* $\varphi_\lambda(t)$ *should be of bounded variation in* $(0, \pi)$, *for some positive* λ.

1.7. It is now only natural to expect the truth of the following theorem.

Theorem J. *A necessary and sufficient condition that* $\Sigma \bar{c}_n$ *should be summable* $|C|$ *is that* $\theta_\lambda(t)$ *should be of bounded variation in* $(0, \pi)$, *for some positive* λ.

We may also expect the truth of the following more precise theorems.

Theorem K. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\psi_\alpha(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$ *and* $\theta_\lambda(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$[19]), *for some positive* λ, *then* $\Sigma \bar{c}_n$ *is summable* $|C, \alpha + \delta|$, *for every* $\delta > 0$.

---

[15]) Given by Paley.

[16]) Given by Paley.

[17]) Hardy and Littlewood, 11.

[18]) Bosanquet, 6, 7.

[19]) Since $\theta_\lambda(t)$ is an integral, except possibly at $t = 0$, it is certainly of bounded variation in any interval (η, π), where $0 < \eta < \pi$. We call a function $h(t)$ an *integral* when it is of the form $\int_c^t g(u)\,du$, $g(u)$ being Lebesgue integrable.

Theorem L. *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\Sigma \bar{c}_n$ *is summable* $|C, \alpha|$, *then* $\theta_{\alpha+\delta}(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$, *for every* $\delta > 0$.

1.8. We shall show now that, when $\alpha \geqq 1$, the hypotheses in Theorem K are equivalent to $\theta_{\alpha-1}(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \pi)$. Since, by Lemma 3, $\theta_{\alpha-1}(t)$ is an integral for $t > 0$, except possibly at $t = 0$, and $\frac{1}{2}\pi\theta'_{\alpha-1}(t) = \psi_{\alpha-1}(t)/t$, except possibly in a set of measure zero, the condition may also be expressed in the form

$$\int_0^\pi \frac{|\psi_{\alpha-1}(u)|}{u}\,du < \infty. \tag{1.8 1}$$

Further we shall show that, if (1. 8 1) is written in the form

$$\int_0^\pi \frac{|d\,\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha} < \infty\ ^{20}), \tag{1.8 2}$$

the equivalence still holds when $0 < \alpha < 1$, provided we make the additional hypothesis that $\Psi_\alpha(+0) = 0$ [21]).

---

[20]) We write, if $h(x) > 0$,

$$\int_a^b h(x)\,|d\,g(x)| = \int_a^b h(x)\,dG(x),$$

where $G(x)$ is defined as in [5]).

An integral like (1. 8 2) is to be interpreted in the first instance as $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\pi$, where it is assumed that $\Psi_\alpha(t)$ is of bounded variation in every interval (ε, π), where $0 < \varepsilon < \pi$. But, writing

$$\Psi^*_\varepsilon(t) = \int_\varepsilon^t u^{-\alpha}\,|d\,\Psi_\alpha(u)|,$$

we observe that, if $\alpha > 0$,

$$\int_\varepsilon^\pi |d\,\Psi_\alpha(u)| = \int_\varepsilon^\pi u^\alpha |u^{-\alpha}\,d\,\Psi_\alpha(u)| \leqq [t^\alpha\,\Psi^*_\varepsilon(t)]_\varepsilon^\pi + \alpha \int_\varepsilon^\pi u^{\alpha-1}\,\Psi^*_\varepsilon(u)\,du = O(1),$$

uniformly in ε. Hence $\Psi_\alpha(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ and (1. 8 2) exists as an ordinary Lebesgue-Stieltjes integral.

[21]) The necessity of the last condition may be seen by taking $\psi(t) = t^{-\alpha}$ in $(0, \pi)$, where $0 < \alpha < 1$. For, if $t > 0$,

$$\Psi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} u^{-\alpha}\,du = \Gamma(1-\alpha),$$

and hence the integral in (1. 8 2) is zero. But

$$\bar{c}_n \sim \frac{2}{\pi} \cos\frac{1}{2}\pi\alpha\,\Gamma(1-\alpha)\,n^{\alpha-1},$$

and so $\Sigma \bar{c}_n$ is not summable.

Lemma 6[22]). *If* $\alpha \geqq 0$ *and* $\varphi_\alpha(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \eta)$, *where* $\eta > 0$, *then* $\varphi_\beta(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \eta)$, *where* $\beta > \alpha$.

Lemma 7. *If* $\alpha \geqq 0$, *then necessary and sufficient conditions that* $\theta_\alpha(t)$ *should be of bounded variation in* $(0, \eta)$, *where* $\eta > 0$, *are that* $\psi_{\alpha+1}(t)$ *and* $\theta_\lambda(t)$ *should be of bounded variation in* $(0, \eta)$, *for some* $\lambda > 0$.

This follows from Lemmas 4 and 6.

Lemma 8[23]). *If* $\alpha > 0$ *and* (i) $\Phi_\alpha(t)$ *is of bounded variation in an interval* $(0, \eta)$, *where* $\eta > 0$, (ii) $\Phi_\alpha(+0) = 0$, *then*

$$\Phi_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^t dv \int_0^v (v-u)^{\beta-\alpha-1} \, d\Phi_\alpha(u) \tag{1.83}$$

in $(0, \eta)$, *for* $\beta > \alpha$.

Lemma 9. *If* $\alpha > 0$, $\Phi_\alpha(+0) = 0$ *and*

$$\Gamma(\alpha) \int_0^\eta \frac{|d\,\Phi_\alpha(u)|}{u^\alpha} \leqq A, \tag{1.84}$$

then the same is true if α *is replaced by* $\beta > \alpha$.

This may be deduced from Lemma 8[24]).

We can now establish the following lemma.

Lemma 10. *If* $\alpha > 0$, $\eta > 0$, *then necessary and sufficient conditions that*

$$\int_0^\eta \frac{|d\,\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha} < \infty \tag{1.85}$$

and $\Psi_\alpha(+0) = 0$, *are that* $\psi_\alpha(t)$ *and* $\theta_\lambda(t)$ *should be of bounded variation in* $(0, \eta)$, *for some positive* λ.

The case $\alpha \geqq 1$ is equivalent to Lemma 7, and so, in proving Lemma 10, we may confine ourselves to the case $0 < \alpha < 1$.

The conditions are necessary. For, if (1.85) holds and $\Psi_\alpha(+0) = 0$, it follows from Lemma 9 that

$$\int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(u)|}{u} \, du < \infty, \tag{1.86}$$

---

[22]) Bosanquet, 4, 7.

[23]) Bosanquet, 5

[24]) Cf. Bosanquet, 4, p. 13 and 5, p. 119 — 120. Lemma 9 is essentially the same as Lemma 6.

and the necessity follows from[25])

$$(1.87) \qquad \int_0^\eta |d\,\psi_\alpha(u)| \leqq \Gamma(\alpha+1) \int_0^\eta \frac{|d\,\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha} + \alpha \int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(u)|}{u}\,du.$$

The conditions are sufficient. For suppose that $\psi_\alpha(t)$ and $\theta_\lambda(t)$ are of bounded variation in $(0, \eta)$, for some positive λ. Then, since by Lemma 6 $\psi_{\alpha+1}(t)$ is of bounded variation in $(0, \eta)$, it at once follows from Lemma 4 that $\theta_\alpha(t)$ is of bounded variation in $(0, \eta)$ and therefore (1.86) holds. We now obtain (1.85) from[26])

$$(1.88) \qquad \Gamma(\alpha+1) \int_0^\eta \frac{|d\,\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha} \leqq \int_0^\eta |d\,\psi_\alpha(u)| + \alpha \int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(u)|}{u}\,du.$$

Finally, since $\psi_\alpha(t)$ is of bounded variation in $(0, \eta)$, $\psi_\alpha(+0)$ is finite. Hence $\Psi_\alpha(t) = O(t^\alpha)$ and so $\Psi_\alpha(+0) = 0$.

2.

2.1. Since we deal with Rieszian means we shall require some properties of the functions $\gamma_\alpha(x)$, $\bar{\gamma}_\alpha(x)$ and their derivatives, where

$$(2.11) \qquad \gamma_\alpha(x) + i\bar{\gamma}_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} e^{ixt}\,dt, \quad (x \geqq 0,\ \alpha > 0),$$

and it is convenient to summarise them here.

It is easy to see that $\gamma_\alpha(x)$, $\bar{\gamma}_\alpha(x)$ and their derivatives are bounded in $(0, \infty)$, and also that $\bar{\gamma}_\alpha(x) = O(x)$ for small values of x[27]). It is well known, moreover, that, when x is large,

$$(2.12) \qquad \gamma_\alpha(x) + i\bar{\gamma}_\alpha(x) = \frac{i}{x} + \frac{\Gamma(\alpha)\, e^{i\left(x-\frac{1}{2}\pi\alpha\right)}}{x^\alpha} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right),$$

while asymptotic expansions for the derivatives of $\gamma_\alpha(x)$ and $\bar{\gamma}_\alpha(x)$ are obtained by formally differentiating (2.12). In particular we note that, if $\varkappa = \min(\alpha, h+2)$,

$$(2.13) \qquad |\gamma_\alpha^{(h)}(x)| \leqq A(1+x)^{-\varkappa},$$

---

[25]) Cf. Pollard. 19, who shows that

$$\int_a^b |d\{f(x)\,g(x)\}| \leqq \int_a^b |f(x)|\,|d\,g(x)| + \int_a^b |g(x)|\,|d\,f(x)|.$$

[26]) That is, from the formula,

$$\int_a^b |f(x)|\,|d\,g(x)| \geqq \int_a^b |d\{f(x)\,g(x)\}| + \int_a^b |g(x)|\,|d\,f(x)|.$$

[27]) Cf. Lemma 11.

and, if $\lambda = \min(\alpha, h+1)$,

$$|\bar{\gamma}_\alpha^{(h)}(x)| \leqq A(1+x)^{-\lambda}, \tag{2.14}$$

for all values of $x \geqq 0$[28]).

Lemma 11. *If* $\alpha > 0$, *then*

$$x\,\bar{\gamma}_{1+\alpha}(x) = 1 - \alpha\gamma_\alpha(x), \tag{2.15}$$

and

$$x\,\gamma_{1+\alpha}(x) = \alpha\,\bar{\gamma}_\alpha(x). \tag{2.16}$$

For

$$ix\int_0^1 (1-t)^\alpha e^{ixt}\,dt = [(1-t)^\alpha e^{ixt}]_0^1 + \alpha\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} e^{ixt}\,dt.$$

Lemma 12. *If* $\alpha > 0$, *then*

$$\bar{\gamma}_{1+\alpha}(x) - \bar{\gamma}_\alpha(x) = \gamma'_\alpha(x). \tag{2.17}$$

For

$$\int_0^1 \{(1-t)^\alpha - (1-t)^{\alpha-1}\}\sin xt\,dt = -\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\,t\sin xt\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\cos xt\,dt.$$

2.2. It is also convenient to give here the following two lemmas.

Lemma 13[29]). *If* $\alpha > -1$, *then*

$$A_\beta(\omega) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^\omega (\omega-u)^{\beta-\alpha-1} A_\alpha(u)\,du, \tag{2.21}$$

for $\beta > \alpha$.

Lemma 14. *If* $\alpha > 1$, *then, for all positive values of* ω,

$$C'_\alpha(\omega) = \alpha\,\omega^{-\alpha-1} B_{\alpha-1}(\omega) = \alpha\,\omega^{-1}\{C_{\alpha-1}(\omega) - C_\alpha(\omega)\} \tag{2.22}$$

If $0 < \alpha \leqq 1$, (2.22) *still holds when* ω *is not an integer.*

If $\alpha > 0$, and ω is not an integer,

$$\frac{d}{d\omega}\sum_{n<\omega}\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^\alpha c_n = \frac{\alpha}{\omega^2}\sum_{n<\omega}\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^{\alpha-1} n\,c_n$$

$$= \frac{\alpha}{\omega}\sum_{n<\omega}\left\{\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^{\alpha-1} - \left(1-\frac{n}{\omega}\right)^\alpha\right\} c_n.$$

If $\alpha > 1$, $C_\alpha(\omega)$ is the integral of a continuous function and the formula holds for all $\omega > 0$.

---

[28]) Here and elsewhere A denotes some positive number independent of the variable or variables under consideration, and is not necessarily the same at each occurrence.

[29]) Hardy and Riesz, 12.

3.

3.1. In this section we prove a theorem which, by Lemmas 3 and 7, is equivalent to the case $\alpha \geqq 1$ of Theorem K.

Theorem 1. *If* $\alpha \geqq 0$, *and if*

$$\int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t} dt < \infty, \tag{3.11}$$

where $\eta > 0$, *then the Allied series is summable* $|C, \beta|$ *at the point* $t = x$, *for* $\beta > \alpha + 1$.

3.2. It was shown by B. N. Prasad [30]) that if (3.11) holds when $\alpha = 0$ or, more generally, when $\alpha = 1$, then the Allied series is summable $|A|$[31]). A sufficient condition for summability $|A|$ was also given by Takahashi [32]) which is essentially that $\theta_1(t)$ *is of bounded variation in* $(0, \eta)$. Since a series which is summable $|C|$ is also summable $|A|$[33]) our theorem generalises these results.

3.3. We first prove the following lemma.

Lemma 15. *If* $0 \leqq h = [\alpha] \leqq \alpha < \beta - 1 \leqq h + 1$, *and*

$$J(\omega, u) = \frac{(-1)^{h+1} \omega^{h+1} u^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(h+1-\alpha)} \int_u^\eta (t-u)^{h-\alpha} \gamma_\beta^{(h+2)}(\omega t)\, dt, \tag{3.31}$$

where $\eta > 0$, *then, for* $\omega \geqq 0$, $0 \leqq u \leqq \eta$,

$$|J(\omega, u)| \leqq A\, \omega^\alpha u^{\alpha+1} (1 + \omega u)^{-\beta}.$$

Suppose $u + \omega^{-1} < \eta$, and let

$$\int_u^\eta (t-u)^{h-\alpha} \gamma_\beta^{(h+2)}(\omega t)\, dt = \int_u^{u+\omega^{-1}} + \int_{u+\omega^{-1}}^\eta = J_1 + J_2.$$

Then

$$\begin{aligned} |J_1| &\leqq A \int_u^{u+\omega^{-1}} (t-u)^{h-\alpha} (1 + \omega t)^{-\beta}\, dt \\ &\leqq A (1 + \omega u)^{-\beta} \int_u^{u+\omega^{-1}} (t-u)^{h-\alpha}\, dt \\ &= A\, \omega^{\alpha-h-1} (1 + \omega u)^{-\beta}, \end{aligned}$$

---

[30]) Prasad, 20.

[31]) The series Σc_n is said to be *absolutely summable* (A), or *summable* $|A|$, if $\Sigma c_n x^n$ converges for $0 \leqq x < 1$ and is of bounded variation in $(0, 1)$. Whittaker, 23.

[32]) Takahashi, 21.

[33]) Fekete, 8.

and, by the second mean value theorem,

$$|J_2| \leqq A\,\omega^{\alpha-k} \max_{\zeta > u+\omega^{-1}} \Big| \int_{u+\omega^{-1}}^{\zeta} \gamma_\beta^{(k+2)}(\omega t)\,dt \Big|$$

$$\leqq A\,\omega^{\alpha-k-1}(1+\omega u)^{-\beta}.$$

When $u + \omega^{-1} \geqq \eta$ the integral need not be split up and the analysis is simpler.

3.4. **Proof of Theorem 1.** We have[34], for $\beta > 0$,

$$\bar{C}_\beta(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \bar{\gamma}_{1+\beta}(\omega t)\,\psi(t)\,dt, \tag{3.4 1}$$

and hence, by Lemmas 14 and 12, for $\beta > 1$,

$$-\tfrac{1}{2}\pi\beta^{-1}\bar{C}'_\beta(\omega) = \int_0^\infty \{\bar{\gamma}_{1+\beta}(\omega t) - \bar{\gamma}_\beta(\omega t)\}\,\psi(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \gamma'_\beta(\omega t)\,\psi(t)\,dt \text{ [35]}$$

$$= \int_0^\eta + \int_\eta^\infty$$

$$= I_1(\omega) + I_2(\omega).$$

Now, if $\varrho = \min(\beta, 3)$,

$$|I_2(\omega)| \leqq A\,\{\int_{\eta}^{\pi} + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{(2s+1)\pi}\}\,(\omega t)^{-\varrho}|\psi(t)|\,dt$$

$$\leqq A\,\omega^{-\varrho}\{\eta^{-\varrho} + \sum_{s=1}^{\infty}[(2s-1)\pi]^{-\varrho}\} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t)|\,dt$$

$$\leqq A\,\omega^{-\varrho},$$

and hence

$$\int_1^\infty |I_2(\omega)|\,d\omega < \infty,$$

provided only $\beta > 1$.

---

[34]) Verblunsky, 22.

[35]) Alternatively we may argue from (3.4 1),

$$\bar{C}'_\beta(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{d\omega}\{\omega\,\bar{\gamma}_{1+\beta}(\omega t)\}\,\psi(t)\,dt = \frac{-2\beta}{\pi}\int_0^\infty \gamma'_\beta(\omega t)\,\psi(t)\,dt,$$

by Lemma 11, provided we justify the differentiation under the integral sign.

By Lemma 2 there will be no loss of generality if we suppose that β is defined as in Lemma 15. Integrating $I_1(\omega)$ by parts $h+1$ times, where $h = [\alpha]$, we obtain

$$I_1(\omega) = [\sum_{\nu=1}^{h+1} (-1)^{\nu-1} \omega^{\nu-1} \Psi_\nu(t) \gamma_\beta^{(\nu)}(\omega t)]_0^\eta + (-1)^{h+1} \omega^{h+1} \int_0^\eta \gamma_\beta^{(h+2)}(\omega t) \Psi_{h+1}(t)\, dt$$

$$= I_{1,1}(\omega) + I_{1,2}(\omega).$$

Now

$$I_{1,1}(\omega) = O(\omega^{h-\beta}),$$

and therefore

$$\int_1^\infty |I_{1,1}(\omega)|\, d\omega < \infty,$$

since $\beta > h+1$.

Also

$$I_{1,2}(\omega) = \frac{(-1)^{h+1} \omega^{h+1}}{\Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^\eta \gamma_\beta^{(h+2)}(\omega t)\, dt \int_0^t (t-u)^{h-\alpha} \Psi_\alpha(u)\, du$$

$$= \frac{(-1)^{h+1} \omega^{h+1}}{\Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^\eta \Psi_\alpha(u)\, du \int_u^\eta (t-u)^{h-\alpha} \gamma_\beta^{(h+2)}(\omega t)\, dt \text{ [36]}$$

$$= \int_0^\eta \frac{\psi_\alpha(u)}{u} J(\omega, u)\, du,$$

where $J(\omega, u)$ is given by (3.3 1), and hence

$$\int_1^\infty |I_{1,2}(\omega)|\, d\omega \leqq \int_1^\infty d\omega \int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(u)|}{u} |J(\omega, u)|\, du$$

$$= \int_0^\eta \frac{|\psi_\alpha(u)|}{u} du \int_1^\infty |J(\omega, u)|\, d\omega.$$

But

$$\int_1^\infty |J(\omega, u)|\, d\omega = O\{\int_1^{u^{-1}} u^{\alpha+1} \omega^\alpha\, d\omega\} + O\{\int_{u^{-1}}^\infty u^{\alpha+1-\beta} \omega^{\alpha-\beta}\, d\omega\}$$

$$= O(1) + O(1),$$

---

[36]) The inversion of the order of integration is justified by Fubini's Theorem. Cf. Hobson, 13, p. 631.

uniformly for $u > 0$ since $\beta > \alpha + 1$, and it therefore follows from (3.1 1) that

$$\int_1^\infty |\overline{C}'_\beta(\omega)|\, d\omega < \infty.$$

Since $\overline{C}_\beta(\omega)$ is an integral the theorem is proved.

4.

4.1. In this section we consider the summability $|C, \beta|$ of the Allied series when $0 < \beta \leqq 1$. The formula (3.4 1) is only valid when $\beta > 0$, and the formula for $\overline{C}'_\beta(\omega)$, deduced from it, is only valid when $\beta > 1$. Therefore we need a different method of investigation in this section. We again confine ourselves to Rieszian means, but we also indicate an alternative treatment using Cesàro means.

4.2. The following theorem is equivalent to the case $0 < \alpha < 1$ of Theorem K.

Theorem 2. *If* $0 < \alpha < 1$, $\Psi_\alpha(+0) = 0$, *and*

$$\int_0^\pi \frac{|d\,\Psi_\alpha(t)|}{t^\alpha} < \infty, \tag{4.2 1}$$

then the Allied series is summable $|C, \beta|$ *at the point* $t = x$, *for* $\beta > \alpha$.

4.3. We first prove the following two lemmas.

Lemma 16. *If* $0 < \alpha < 1$, *and*

$$G_\alpha(\omega, t) = \sum_{n < \omega - 1} (\omega - n)^{\alpha - 1} \cos nt, \tag{4,3 1}$$

then, for $\omega \geqq 1$, $0 < t < \pi$,

$$|G_\alpha(\omega, t)| \leqq A\,\omega^\alpha (1 + \omega t)^{-\alpha}, \tag{4.3 2}$$

and

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha(\omega, t)\right| \leqq A\,\omega^{\alpha+2} t (1 + \omega t)^{-\alpha-1} \tag{4.3 3}$$

It will be sufficient to prove (4.3 3) since the proof of (4.3 2) is similar.

We have, if $0 < \omega t < 1$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha(\omega, t)\right| \leqq \left|\sum_{n < \omega - 1} (\omega - n)^{\alpha - 1} n \sin nt\right| \leqq t \sum_{n < \omega - 1} n^2 (\omega - n)^{\alpha - 1}$$

$$< t \int_0^\omega x^2 (\omega - x)^{\alpha - 1}\, dx \leqq A\,\omega^{\alpha+2} t,$$

while, if $\omega t \geqq 1$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} G_\alpha(\omega, t)\right| \leqq \Big|\sum_{n \leqq \omega - t^{-1}} (\omega - n)^{\alpha-1} n \sin nt\Big| + \Big|\sum_{\omega - t^{-1}}^{\omega - 1} (\omega - n)^{\alpha-1} n \sin nt\Big|$$

$$< \omega t^{1-\alpha} \max_{N, N'} \Big|\sum_{N}^{N'} \sin nt\Big| + \omega \int_{\omega - t^{-1}}^{\omega} (\omega - x)^{\alpha-1} dx$$

$$\leqq A \omega t^{-\alpha}.$$

Lemma 17. *If* $0 < \alpha < \beta \leqq 1$, *and*

$$(4,34) \quad K(\omega, u) = \frac{\omega^{-\beta-1} u^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_u^\pi (t-u)^{-\alpha} \Big\{\sum_{n<\omega} (\omega - n)^{\beta-1} n \sin nt\Big\} dt$$

then, for $\omega \geqq 1$, $0 < u < \pi$,

$$(4.35) \quad |K(\omega, u)| \leqq A \omega^{\alpha-1} u^\alpha (1 + \omega u)^{-\beta} + A [\omega]^{\alpha-\beta-1} (\omega - [\omega])^{\beta-1}.$$

Writing $N = [\omega]$, we have

$$\int_u^\pi (t-u)^{-\alpha} \Big\{\sum_{n<\omega} (\omega - n)^{\beta-1} n \sin nt\Big\} dt$$

$$= -\Big\{\int_u^{u+\omega^{-1}} + \int_{u+\omega^{-1}}^{\pi}\Big\} (t-u)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial t} G_\beta(\omega, t)\, dt$$

$$+ (\omega - N)^{\beta-1} N \Big\{\int_u^{u+N^{-1}} + \int_{u+N^{-1}}^{\pi}\Big\} (t-u)^{-\alpha} \sin Nt\, dt$$

$$= K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

Then, as in the proof of Lemma 15, we obtain

$$|K_1| + |K_2| \leqq A \omega^{\alpha+\beta} (1 + \omega u)^{-\beta}.$$

Again

$$|K_3| + |K_4| = (\omega - N)^{\beta-1} N \Big[O\Big\{\int_u^{u+N^{-1}} (t-u)^{-\alpha} dt\Big\}$$

$$+ O\Big\{N^\alpha \max_{\xi} \Big|\int_{u+N^{-1}}^{\xi} \sin Nt\, dt\Big|\Big\}\Big]$$

$$= (\omega - N)^{\beta-1} N \{O(N^{\alpha-1}) + O(N^{\alpha-1})\},$$

from which the lemma follows.

4.4. *Proof of Theorem* 2. There will be no loss of generality if we suppose that β is defined as in Lemma 17. We have

$$(4.41) \quad \bar{c}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \sin nt\, dt.$$

Hence, if ω is not an integer,

$$\tfrac{1}{2}\pi \bar{B}_{\beta-1}(\omega) = \int_0^\pi \psi(t)\,\{\sum_{n<\omega}(\omega-n)^{\beta-1} n \sin nt\}\,dt,$$

and, by Lemmas 14 and 8, since $\Psi_\alpha(+0) = 0$,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi\beta^{-1}\bar{C}'_\beta(\omega) &= \frac{\omega^{-\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\pi \{\sum_{n<\omega}(\omega-n)^{\beta-1} n\sin nt\}\,dt \int_0^t (t-u)^{-\alpha}\,d\Psi_\alpha(u)\\ &= \frac{\omega^{-\beta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\pi d\Psi_\alpha(u)\int_u^\pi (t-u)^{-\alpha}\{\sum_{n<\omega}(\omega-n)^{\beta-1} n\sin nt\}\,dt\ ^{37})\\ &= \int_0^\pi K(\omega,u)\,\frac{d\Psi_\alpha(u)}{u^\alpha},\end{aligned}$$

where $K(\omega,u)$ is given by (4.34). We now have, since $\bar{C}_\beta(\omega)$ is an integral and, in particular, is continuous at the integer points,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\pi\beta^{-1}\int_0^\infty |d\bar{C}_\beta(\omega)| &\leqq \int_1^\infty d\omega \int_0^\pi |K(\omega,u)|\,\frac{|d\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha}\\ &= \int_0^\pi \frac{|d\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha}\int_1^\infty |K(\omega,u)|\,d\omega.\end{aligned}$$

Also, by Lemma 17,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty |K(\omega,u)|\,d\omega &= O\{\int_1^{u^{-1}} u^\alpha \omega^{\alpha-1}\,d\omega\} + O\{\int_{u^{-1}}^\infty u^{\alpha-\beta}\omega^{\alpha-1-\beta}\,d\omega\}\\ &\quad + O\{\int_1^\infty [\omega]^{\alpha-\beta-1}(\omega-[\omega])^{\beta-1}\,d\omega\}\\ &= O(1)+O(1)+O\{\sum_{N=1}^\infty N^{\alpha-\beta-1}\int_N^{N+1}(\omega-N)^{\beta-1}\,d\omega\}\\ &= O(1),\end{aligned}$$

uniformly for $0 < u < \pi$, since $\beta > \alpha$. The theorem now follows from (4.21).

4.5. Owing to the singular character of $\bar{C}'_\beta(\omega)$ in the neighbourhood of the integer points, when $0 < \beta \leqq 1$, it seems advisable to show briefly how we can prove Theorem 2 using Cesàro means only.

---

37) By the analogue for Stieltjes integrals of Fubini's Theorem. Cf. Bosanquet, 5.

Alternative proof of Theorem 2. Writing $\bar{\tau}_n^\alpha$ and $g^\alpha(n,t)$ for the n-th Cesàro means of order α of the sequences $n\bar{c}_n$ and $2\pi^{-1}\cos nt$ respectively, we have, from (4.4 1),

$$\bar{\tau}_n^\beta = -\int_0^\pi \psi(t)\frac{d}{dt}g^\beta(n,t)\,dt = -\int_0^\pi L(n,u)\,\frac{d\,\Psi_\alpha(u)}{u^\alpha},$$

where

$$L(n,u) = \frac{u^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_u^\pi (t-u)^{-\alpha}\frac{d}{dt}g^\beta(n,t)\,dt. \tag{4.5 1}$$

Then, using the facts that

$$|g^\beta(n,t)| \leqq A(1+nt)^{-\beta}, \qquad (u+n^{-1} \leqq t \leqq \pi),$$

$$\left|\frac{d}{dt}g^\beta(n,t)\right| \leqq A\,n(1+nt)^{-\beta}, \qquad (u \leqq t \leqq u+n^{-1}),$$

where $0 < \beta \leqq 1$, we show as in Lemma 15, that

$$|L(n,u)| \leqq A\,n^\alpha u^\alpha (1+nu)^{-\beta}.$$

We now have[38])

$$\sum|\bar{s}_n^\beta - \bar{s}_{n-1}^\beta| = \sum n^{-1}|\bar{\tau}_n| \leqq \int_0^\pi \frac{|d\,\Psi_\alpha(u)|}{u^\alpha}\sum n^{-1}|L(n,u)|$$

and, if $0 < \alpha < \beta \leqq 1$,

$$\begin{aligned}\sum n^{-1}|L(n,u)| &= \sum_{n\leqq u^{-1}} n^{-1}O(n^\alpha u^\alpha) + \sum_{n>u^{-1}} n^{-1}O(n^{\alpha-\beta}u^{\alpha-\beta})\\ &= O(1)+O(1).\end{aligned}$$

The result then follows from (4.2 1).

5.

5.1. In this section we consider the converse problem. The theorem that we prove contains slightly more than Theorem L.

Theorem 3. *If*[39]) $\alpha \geqq 0$ *and the Allied series is summable* $|C,\alpha|$ *at the point* $t = x$, *then*

$$\int_0^\infty \frac{|\psi_\beta(t)|}{t}\,dt < \infty, \tag{5.1 1}$$

for $\beta > \alpha$.

5.2. As in the previous sections it is convenient to state and prove constituent parts of the main theorem in the form of lemmas.

Lemma 18. *If* $\alpha > 0$, $h = [\alpha] \leqq \alpha < \beta \leqq h+1$, *and*

$$P(v,t) = \frac{(-1)^{h+1}\beta\,t^h}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(h+1-\alpha)}\int_v^\infty (u-v)^{h-\alpha}\bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\,du, \tag{5.2 1}$$

---

[38]) Kogbetliantz, 15.

[39]) The case $\alpha = 0$ is discussed separately in Section 6.

then, for $t > 0$, $v \geqq 0$,

$$|P(v,t)| \leqq A t^{\alpha-1}(1+vt)^{-\beta}. \tag{5.22}$$

This may be proved by an argument[40]) similar to that used in Lemma 15.

Lemma 19. *Under the same conditions as Lemma* 18, *if*

$$Q(v,t) = \int_0^v x^{\alpha-1} P(x,t)\,dx, \tag{5.23}$$

then

$$|Q(v,t)| \leqq A t^{\alpha-1} v^{\alpha}(1+vt)^{-\beta}. \tag{5.24}$$

We first prove that, for every fixed positive t, $Q(v,t) \to 0$ as $v \to \infty$. We have[41])

$$\begin{aligned} Q(\infty,t) &= \frac{(-1)^{h+1}\beta t^h}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,dx \int_x^{\infty} (u-x)^{h-\alpha}\,\bar{\gamma}_{\beta}^{(h+1)}(ut)\,du \\ &= \frac{(-1)^{h+1}\beta t^h}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^{\infty} \bar{\gamma}_{\beta}^{h+1}(ut)\,du \int_0^{u} x^{\alpha-1}(u-x)^{h-\alpha}\,dx \\ &= \frac{(-1)^{h+1}\beta t^h}{\alpha\,\Gamma(h+1)} \int_0^{\infty} u^h\,\bar{\gamma}_{\beta}^{(h+1)}(ut)\,du \\ &= \frac{\beta}{\alpha\Gamma(h+1)}\Big[\sum_{\nu=0}^{h} (-1)^{h+1-\nu}\binom{h}{\nu} u^{h-\nu} t^{h-\nu-1}\,\bar{\gamma}_{\beta}^{(h-\nu)}(ut)\Big]_{u=0}^{\infty}. \end{aligned}$$

The terms all vanish at $u = 0$, while, for large values of u,

$$u^{h-\nu}\,\bar{\gamma}_{\beta}^{(h-\nu)}(ut) = u^{h-\nu} O(u^{\nu-h-1}) = o(1), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, h),$$

and

$$u^h \bar{\gamma}_{\beta}^{(h)}(ut) = u^h O(u^{-\beta}) = o(1),$$

for every fixed positive t. Hence $Q(\infty,t) = 0$.

It therefore follows that

$$Q(v,t) = Q(v,t) - Q(\infty,t) = -\int_v^{\infty} x^{\alpha-1} P(x,t)\,dx,$$

and hence, by Lemma 18,

$$\begin{aligned} |Q(v,t)| &\leqq \int_v^{\infty} x^{\alpha-1}|P(x,t)|\,dx \\ &\leqq A\int_v^{\infty} x^{\alpha-\beta-1} t^{\alpha-\beta-1}\,dx \\ &\leqq A t^{\alpha-\beta-1} v^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

[40]) For an alternative proof see Bosanquet, 2.

[41]) The justification of the inversion of the repeated integral is similar to one that we shall give in the proof of Theorem 3.

On the other hand

$$|Q(v,t)| \leqq \int_0^v x^{\alpha-1}|P(x,t)|\,dx$$

$$\leqq A\int_0^v x^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\,dx$$

$$\leqq A\,t^{\alpha-1}v^{\alpha}.$$

From these inequalities (5.2 4) follows.

Lemma 20. *Under the same conditions as Lemma* 18, *if*

$$R(v,t) = \int_0^v x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)\,dx, \tag{5.2 5}$$

then

$$|R(v,t)| \leqq A\,t^{\alpha-1}v^{\alpha}(1+vt)^{-\beta}. \tag{5.2 6}$$

We have, on integration by parts,

$$R(v,t) = [x\ P(x,t)]_0^v - \alpha\int_0^v x^{\alpha-1}P(x,t)\,dx$$

$$= v^{\alpha}P(v,t) - \alpha Q(v,t)$$

and (5.2 6) then follows from Lemmas 18 and 19.

5.3. *Proof of Theorem* 3. Since the Fourier series of $\psi(t)$ is given by (1.2 6) and $(1-u)^{\beta-1}$ is of bounded variation in $(0, 1-\varepsilon)$, where $0<\varepsilon<1$, we have[42])

$$\psi_{\beta,\varepsilon}(t) = \beta\int_0^{1-\varepsilon}(1-u)^{\beta-1}\psi(tu)\,du$$

$$= \beta\sum_1^{\infty}\bar{c}_n\int_0^{1-\varepsilon}(1-u)^{\beta-1}\sin ntu\,du$$

$$= \beta\sum_1^{\infty}\bar{c}_n\,\overline{\gamma}_{\beta,\varepsilon}(nt).$$

If $\beta \geqq 1$, the same is true with $\varepsilon = 0$, and we therefore have

$$\psi_{\beta}(t) = \beta\sum_1^{\infty}\bar{c}_n\,\overline{\gamma}_{\beta}(nt). \tag{5.3 1}$$

If $0<\beta<1$, it may be shown that $\overline{\gamma}_{\beta}(x) - \gamma_{\beta,\varepsilon}(x)$ is $O(\varepsilon^{\beta})$ for $x \geqq 0$ and is $O(x^{-\beta})$ for large values of x. Hence, for every fixed positive t,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_1^{\infty}{}_n\{\overline{\gamma}_{\beta}(nt) - \overline{\gamma}_{\beta,\varepsilon}(nt)\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\{O(\sum_1^N|\bar{c}_n|\varepsilon^{\beta}) + O(\sum_{N+1}^{\infty}|\bar{c}_n|n^{-\beta})\}$$

$$= O(\sum_{N+1}^{\infty}|\bar{c}_n|n^{-\beta}).$$

---

[42]) By a theorem of Hardy and W. H. Young. Hobson 14, p. 583.

Now the left hand side is independent of N, and also, since $\Sigma \bar{c}_n$ is summable $|C, \alpha|$, the series $\Sigma |\bar{c}_n| n^{-\alpha}$ is convergent[43]). It follows that, for $0 \leqq \alpha < \beta < 1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_{\beta,\varepsilon}(t) = \beta \sum_1^\infty \bar{c}_n \bar{\gamma}_\beta(nt). \tag{5.3 2}$$

Thus (5.3 1) is true for all $\beta > \alpha$ provided the integral for $\psi_\beta(t)$ is interpreted in the Cauchy sense.

By Lemma 9 there will be no loss of generality in supposing that β is defined as in Lemma 18. Since $\bar{s}_n = o(n^\sigma)$, where $\sigma = \min(\alpha, 1)$, and, for every fixed positive t, $\bar{\gamma}_\beta(nt) = O(n^\tau)$, where $\tau = \min(\beta, 1)$, we have, by partial summation,

$$\sum_1^\infty \bar{c}_n \bar{\gamma}_\beta(nt) = -t \sum_1^\infty \bar{s}_n \int_n^{n+1} \bar{\gamma}'_\beta(ut)\, du = -t \int_0^\infty \bar{\gamma}'_\beta(ut)\, \bar{A}_0(u)\, du.$$

Integrating by parts h times, where $h = [\alpha]$, we obtain

$$\int_0^\infty \bar{\gamma}'_\beta(ut)\, \bar{A}_0(u)\, du = \Big[\sum_{\nu=1}^{h} (-1)^{\nu-1} \{\Gamma(\nu+1)\}^{-1} \bar{A}_\nu(u)\, \bar{\gamma}_\beta^{(\nu)}(ut)\Big]_{u=0}^\infty + \frac{(-1)^h t^h}{\Gamma(h+1)} \int_0^\infty \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, \bar{A}_h(u)\, du.$$

Now $\bar{A}_\nu(0) = 0$, and, for every fixed positive t, as u tends to infinity,

$$\bar{A}_\nu(u)\, \bar{\gamma}_\beta^{(\nu)}(ut) = o(u^{\nu+1}) O(u^{-\nu-1}) = o(1), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, h-1),$$
$$\bar{A}_h(u)\, \bar{\gamma}_\beta^{(h)}(ut) = O(u^\alpha) O(u^{-\beta}) = o(1).$$

Hence the integrated terms all vanish, and we have, by Lemma 13,

$$\frac{\psi_\beta(t)}{t} = \frac{(-1)^{h+1} \beta t^h}{\Gamma(h+1)} \int_0^\infty \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, \bar{A}_h(u)\, du$$

$$= \frac{(-1)^{h+1} \beta t^h}{\Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^\infty \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, du \int_0^u (u-v)^{h-\alpha}\, d\bar{A}_\alpha(v)$$

$$= \frac{(-1)^{h+1} \beta t^h}{\Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(h+1-\alpha)} \int_0^\infty d\bar{A}_\alpha(v) \int_v^\infty (u-v)^{h-\alpha}\, \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, du$$

$$= \int_0^\infty P(v,t)\, d\bar{A}_\alpha(v),$$

provided the inversion of the order of integration is justified.

[43]) Kogbetliantz, 16.

To justify the inversion it will be sufficient to show that, as $X \to \infty$,

$$\int_0^X d\,\bar{A}_\alpha(v) \int_X^\infty (u-v)^{h-\alpha}\, \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, du \to 0,$$

for every fixed positive t. Writing

$$\int_X^\infty (u-v)^{h-\alpha}\, \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, du = \int_X^{X+1} + \int_{X+1}^\infty = M_1 + M_2,$$

we have, for every fixed positive t, if $v < X$,

$$|M_1| = O\{\int_X^{X+1} (u-v)^{h-\alpha} u^{-\beta}\, du\} = O(X^{-\beta}),$$

and, by the second mean value theorem,

$$|M_2| \leqq (X+1-v)^{h-\alpha} \max_{X' > X+1} \Big| \int_{X+1}^{X'} \bar{\gamma}_\beta^{(h+1)}(ut)\, du \Big| = O(X^{-\beta}),$$

uniformly for $0 < v < X$. Also[44])

$$\begin{aligned} X^{-\beta} \int_0^X |d\,\bar{A}_\alpha(v)| &= X^{-\beta} O\{\int_0^X v^\alpha |d\,\bar{C}_\alpha(v)|\} + X^{-\beta} O\Big\{\int_0^X \frac{|\bar{A}_\alpha(v)|}{v}\, dv\Big\} \\ &= O(X^{\alpha-\beta}) \int_0^\infty |d\,\bar{C}_\alpha(v)| + O(X^{-\beta}) \int_0^X v^{\alpha-1}\, dv \\ &= O(X^{\alpha-\beta}) = o(1), \end{aligned}$$

since $\Sigma \bar{c}_n$ is summable $|C, \alpha|$ and $\beta > \alpha$.

Returning to the expression for $\psi_\beta(t)/t$, we obtain, on integrating by parts,

$$\frac{\psi_\beta(t)}{t} = [P(v,t)\, \bar{A}_\alpha(v)]_{v=0}^\infty - \int_0^\infty \bar{A}_\alpha(v)\, \frac{\partial}{\partial v} P(v,t)\, dv.$$

By Lemma 18, since $A_\alpha(v) = O(v^\alpha)$ for large values of v, the integrated term vanishes, and therefore

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\beta(t)}{t} &= -\int_0^\infty \bar{C}_\alpha(v)\, v^\alpha\, \frac{\partial}{\partial v} P(v,t)\, dv \\ &= -[\bar{C}_\alpha(v)\, R(v,t)]_{v=0}^\infty + \int_0^\infty R(v,t)\, d\,\bar{C}_\alpha(v) \\ &= \int_0^\infty R(v,t)\, d\,\bar{C}_\alpha(v), \end{aligned}$$

by Lemma 20, since $\bar{C}_\alpha(v) = O(1)$ for large values of v.

[44]) Cf. [25]).

We now have

$$\int_0^\infty \frac{|\psi_\beta(t)|}{t}\,dt \leqq \int_0^\infty dt \int_0^\infty |R(v,t)|\,|d\bar{C}_\alpha(v)|$$

$$= \int_0^\infty |d\bar{C}_\alpha v)| \int_0^\infty |R(v,t)|\,dt.$$

Finally, by Lemma 20,

$$\int_0^\infty |R(v,t)|\,dt = O\{\int_0^{v^{-1}} t^{\alpha-1} v^\alpha\,dt\} + O\{\int_{v^{-1}}^\infty t^{\alpha-\beta-1} v^{\alpha-\beta}\,dt\}$$
$$= O(1) + O(1),$$

uniformly for $v > 0$, and since, by hypothesis,

$$\int_0^\infty |d\bar{C}_\alpha(v)| < \infty$$

the theorem follows.

6.

6.1. It is of some interest to discuss separately the cases when $\alpha = 0$ in Theorems K and L. These two results may be obtained from the case $\alpha > 0$ of Theorems 2 and 3 respectively by employing Lemmas 6, 10 and 2. Alternatively the case $\alpha = 0$ of Theorem 3 may be proved as follows. We have, by (5.31),

$$\int_0^\infty \frac{|\psi_\beta(t)|}{t}\,dt \leqq \beta \int_0^\infty \frac{dt}{t} \sum_1^\infty |\bar{c}_n|\,|\bar{\gamma}_\beta(nt)|$$

$$= \beta \sum_1^\infty |\bar{c}_n| \int_0^\infty |\bar{\gamma}_\beta(nt)|\,\frac{dt}{t}$$

$$= \beta \sum_1^\infty |\bar{c}_n| \left\{O\left(\int_0^{n^{-1}} n\,dt\right) + O\left(\int_{n^{-1}}^\infty n^{-\beta} t^{-1-\beta}\,dt\right)\right\}$$

$$= \sum_1^\infty |\bar{c}_n|\,O(1) = O(1).$$

Theorem 2, on the other hand, is false when $\alpha = 0$, for, if

$$\psi(t) = \left(\log \frac{2\pi}{t}\right)^{-1},$$

$\psi(t)$ is of bounded variation in $(0,\pi)$ but $|\psi_\lambda(t)|/t$ is not integrable in any range $(0,\eta)$, for any positive λ. The Allied series therefore cannot be summable $|C|$.

Lemmas 6 and 7 and Theorem J [45]) show that the case $\alpha = 0$ of Theorem K can be expressed in the following form, which is worth stating.

Theorem 4. *If $\psi(t)$ is of bounded variation in $(0,\pi)$, then the Allied series is either summable $|C,\delta|$ at the point $t = x$, for every $\delta > 0$, or not summable $|C|$. Further a necessary and sufficient condition for summability $|C|$ is that $|\psi(t)|/t$ be integrable in $(0,\pi)$.*

6.2. It is interesting to know what can be deduced from the hypothesis of Theorem 4 when $|\psi(t)|/t$ is not integrable. We content ourselves with the following statement [46]).

Theorem 5. *If $\psi(t)$ is of bounded variation in $(0,\pi)$, then the sequence $n\bar{c}_n$ converges $|C,1+\delta|$ to $2\pi^{-1}\psi(+0)$.*

The first part of Theorem 4 is a consequence of Theorem 5 and the following lemma.

Lemma 21. *Necessary and sufficient conditions that $\sum c_n$ be summable $|C,\alpha|$, where $\alpha \geqq 0$, are that the series be summable $|C|$ and the sequence $n c_n$ converge $|C,\alpha+1|$ to zero.*

This follows from Lemma 2 and the identity

$$\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)(s_n^\alpha - s_n^{\alpha+1}),$$

where τ_n^α is the n-th Cesàro mean of order α of the sequence $n c_n$.

8.

7.1. Finally is is natural to ask whether Theorems K and L are false when $\delta = 0$. We give examples to show that when $\alpha = 0$ this is so.

(i) Let $\psi(t) = \frac{1}{2}t$ in $(0,\pi)$. Then $\psi(t)$ is of bounded variation and $|\psi(t)|/t$ is integrable in $(0,\pi)$. But the Allied series is $\sum(-1)^{n-1}n^{-1}\cos nt$, which is not absolutely convergent when $t = 0$.

(ii) Let $\sum\alpha_m$ be absolutely convergent and λ_m an increasing sequence of positive integers. Then $\sum\alpha_m\cos\lambda_m t$ converges absolutely for all real

---

[45]) Theorem J is a corollary of Theorems K and L.

[46]) The analogous result for ordinary Cesàro limits is that $n c_n$ converges $(C,1+\delta)$ to $2\pi^{-1}\psi(+0)$ provided this limit exists. See Zygmund, 24.

values of t and is the Allied series of $\psi(t) = \Sigma \alpha_m \sin \lambda_m t$. If now we write, in $(-\pi, \pi)$,

$$\frac{1}{|t|}\int_0^t \psi(u)\,du = \sum \frac{\alpha_m}{\lambda_m |t|}(1-\cos\lambda_m t)$$

$$\sim \Sigma a_n \cos nt,$$

where, for $n > 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nt \sum \frac{\alpha_m}{\lambda_m t}(1-\cos\lambda_m t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum \frac{\alpha_m}{\lambda_m}\int_0^\pi \frac{\cos nt\,(1-\cos\lambda_m t)}{t}\,dt,$$

then it can be shown that

$$a_{\lambda_m} = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\int_0^\pi \frac{\cos\lambda_m t\,(1-\cos\lambda_m t)}{t}\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda_m}\right)$$

$$\sim -\frac{\alpha_m}{\lambda_m}\log\lambda_m,$$

provided λ_m is chosen so that $\lambda_{m+1} > (1+\theta)\lambda_m$, $\theta > 0$, and $\alpha_m \log\lambda_m \to \infty$ as $m \to \infty$. In these circumstances a_n is not $O(1/n)$, and so $\psi_1(t)$ is not of bounded variation in $(0, \pi)$. Hence, in particular, by Lemma 7, $\theta(t)$ is not of bounded variation or, what is the same thing, $|\psi(t)|/t$ is not integrable. For example, we may take $\alpha_m = m^{-2}$, $\lambda_m = 2^{m^3}$.

References.

L. S. Bosanquet:

[1] On Abel's integral equation and fractional integrals. Proc. London Math. Soc. (2), **31** (1930), p. 134—143.

[2] On the summability of Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), **31** (1930), p. 144—164, and (2), **33** (1932), p. 561.

[3] On the Cesàro summation of Fourier series and Allied series. Proc. London Math. Soc. (2), **37** (1934). p. 17—32.

[4] The absolute summability (A) of Fourier series. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **4** (1934), p. 12—17.

[5] Some extensions of Young's criterion for the convergence of a Fourier series. Quart. J. of Math. (Oxford Series), **6** (1935), p. 113—123.

[6] Note on the absolute summability (C) of a Fourier series. Journal London Math. Soc. **11** (1936), p. 11—15.

[7] The absolute Cesàro summability of a Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), **41** (1936), p. 517—528.

M. Fekete:

[8] On the absolute summability (A) of infinite series. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **3** (1933), p. 132—134.

G. H. Hardy:

[9] Notes on some points in the integral calculus (LXVI). The arithmetic mean of a Fourier constant. Messenger of Math. 58 (1928), p. 50—52.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood:

[10] Solution of the Cesàro summability problem for Power series and Fourier series. Math. Zeitschr. **19** (1924), p. 67—96.

[11] The Allied series of a Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), **24** (1926), p. 211—246.

G. H. Hardy and M. Riesz:

[12] The General Theory of Dirichlet Series. Cambridge Tract **18** (1915).

E. W. Hobson:

[13] The Theory of Functions of a Real Variable. Vol. 1, (1927).

[14] The Theory of Functions of a Real Variable. Vol. 2, (1926).

J. M. Hyslop:

[15] The absolute summability of series by Rieszian means. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **5** (1936), p. 46—54.

E. Kogbetliantz:

[16] Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. des Sciences Math. (2), **49** (1925). p. 234—256.

N. Obreschkoff:

[17] Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 375—386.

R. E. A. C. Paley:

[18] On the Cesàro summability of Fourier series and Allied series. Proc. Cambridge Phil. Soc. **26** (1930), p. 173—203.

S. Pollard:

[19] The summation of Denjoy-Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), **27** (1928), p. 209—222.

B. N. Prasad:

[20] On the summability of Fourier series and the bounded variation of Power series. Proc. London Math. Soc. (2), **35** (1933), p. 407—424.

T. Takahashi:

[21] The absolute summability (A) of the conjugate Fourier series. Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan (3), 16 (1934), p. 236—243.

S. Verblunsky:

[22] The Cesàro summation of Trigonometric series. Proc. London Math. Soc. (2), 33 (1931), p. 384—408.

J. M. Whittaker:

[23] The absolute summability of Fourier series. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 2 (1930), p. 1—5.

A. Zygmund:

[24] Sur un théorème de M. Gronwall. Bull. de l'Acad. Polonaise (Cracovie), A (1925), p. 207—217.

M. Kuniyeda:

[25] On absolute summability (A) of allied series and derived series of Fourier series. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2 (1934), p. 103—113.

(Eingegangen am 12. Oktober 1936.)

Über Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

N. Moisseiev in Moskau.

In einem vorhergehendem Aufsatz[1] haben wir in die Liapounoffsche Stabilitätstheorie einen neuen Begriff und zwar den der Stabilitätswahrscheinlichkeit eingeführt. Infolge der Kürze des genannten Artikels konnten wir in demselben weder eine volle Erläuterung des neuen Begriffes, noch eine Methode zur Berechnung der Stabilitätswahrscheinlichkeiten geben. Der Hauptzweck der folgenden Seiten besteht in der Ausfüllung dieser Lücken.

Der Einfachheit halber seien in dieser Arbeit nur solche Fälle der gestörten Bewegung betrachtet, in denen die rechten Seiten der Differentialgleichungen die unabhängige Veränderliche (die Zeit t) explizite nicht enthalten.

Die spezifische Terminologie der „zweiten Methode" der Liapounoffschen Stabilitätstheorie wollen wir durchaus ohne besondere Erläuterungen gebrauchen und dementsprechend setzen wir voraus, daß der Leser mit der Liapounoffs Hauptarbeit: „Problème générale de la stabilité du mouvement" [2] vertraut sei.

Für seine wertvollen Bemerkungen bei der endgültigen Redaktion dieser Arbeit spreche ich auch an dieser Stelle Herrn Kamke meinen besten Dank aus.

§ 1.

Über S- und I-Klassen der gestörten Bewegungen.

Es sei

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

das vorgelegte Differentialgleichungssystem. Die Funktionen X_s sollen der Bedingung

$$X_s(0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

Genüge leisten, so daß also

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{1.2}$$

eine triviale Lösung von (1. 1) ist.

Außerdem setzen wir voraus, daß die Funktionen X_s innerhalb der Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \varrho^2 \tag{1.3}$$

eindeutig, stetig und holomorph sind[1]).

Wir betrachten eine unendliche Menge M von Punkten $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und bezeichnen mit M_ϱ den Durchschnitt von M mit der Kugel (1.3). Der Einfachheit halber wollen wir uns hauptsächlich auf den Fall beschränken, wo es einen bestimmten ϱ-Wert gibt, für den durch jeden Punkt P der Menge M_ϱ eine einzige wohlbestimmte Bahn des Systems (1.1) geht. Ein Teil der folgenden Auseinandersetzungen wird jedoch auch für allgemeinere Systeme (1.1) gelten (vgl. z. B. die Fälle drei und vier). Die Menge M selbst werden wir die Menge der Anfangspunkte nennen. M soll meßbar sein und ihre Ableitung M' soll den Punkt (1.2) enthalten. Das Maß $\mathfrak{M}(M_\varrho)$ von M_ϱ setzen wir von Null verschieden voraus[2]).

Jede der Bahnen, die durch Punkte der Menge M_ϱ gehen, ist durch den entsprechenden Punkt P in zwei Halbbahnen $B_+(P)$ und $B_-(P)$ geteilt, von denen die erste (positive) dem positiven Zeitzuwachs $(t - t_0)$ und die zweite (negative) dem negativen Zeitzuwachs entspricht. Wir beschränken uns im folgenden auf positive Halbbahnen $B_+(P)$[3]). Die Menge der Entfernungen der Punkte einer Halbbahn $B_+(P)$ von dem Koordinatenursprung (1.2) hat eine endliche oder unendliche obere Grenze $\overline{R}(P)$.

Es sei ferner $\mathfrak{z}$ ein echter Teil der Menge M_ϱ, dessen Ableitung $\mathfrak{z}'$ ebenfalls den Punkt (1.2) enthält. Wir betrachten die Menge der Zahlen $\overline{R}(P)$, die den in der Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \tag{1.4}$$

gelegenen Punkten der Menge $\mathfrak{z}$ zukommen. Die obere Grenze dieser Zahlenmenge soll mit $\overline{R}(r, \mathfrak{z})$ bezeichnet werden. Jeder bestimmten Menge $\mathfrak{z}$ entspricht also eine nicht negative und bei abnehmendem r nicht zunehmende Funktion

$$R = \overline{R}(r, \mathfrak{z}). \tag{1.5}$$

---

[1]) Diese Begingungen werden erst in § 5 und § 6 gebraucht. Der Inhalt der ersten vier Paragraphen dieser Arbeit ist von diesen Bedingungen (der Eindeutigkeit, Stetigkeit und Holomorphie) unabhängig.

[2]) Diese Bedingung ist keine wesentliche und kann, mutatis mutandis, aufgehoben sein.

[3]) Und also nur auf die sogenannte positive Stabilität.

Es kann geschehen, daß die Funktion (1. 5) der Bedingung

$$\lim_{r \to 0} \overline{R}(r, \mathfrak{z}) = 0 \tag{1.6}$$

Genüge leistet. In diesem Falle sagen wir, daß die Menge $\mathfrak{z}$ der Anfangspunkte P, wie auch die Menge der Bewegungen $B_+(P(\mathfrak{z}))$, die von den Punkten dieser Menge $\mathfrak{z}$ ausgehen, zur S-Klasse gehören[4]). Wenn die Funktion (1. 5) die Bedingung (1. 6) nicht befriedigt, sollen die ebengenannten Mengen zur I-Klasse gerechnet werden[5]).

Die Mengen $\mathfrak{z}$ der S-Klasse können augenscheinlich nicht reduziert werden. Das heißt: aus einer Menge $\mathfrak{z}$, die der S-Klasse angehört, kann man nicht eine Menge von demselben $\mathfrak{z}$-Typus absondern, die zur I-Klasse gehört. Dagegen können die Mengen der I-Klasse reduzierbar sein, d. h. es kann solche $\mathfrak{z}$-Mengen der I-Klasse geben, aus denen $\mathfrak{z}$-Untermengen der S-Klasse abgesondert werden können.

Es gilt augenscheinlich folgende Behauptung: Wenn es eine nichtleere $\mathfrak{z}$-Menge der I-Klasse gibt, so gibt es gewiß eine nicht reduzierbare und nicht leere $\mathfrak{z}$-Menge von derselben I-Klasse.

In bezug auf die nicht reduzierbaren $\mathfrak{z}$-Mengen gilt:

Satz 1: *Es sei* $\mathfrak{z}_I$ *eine nicht reduzierbare* $\mathfrak{z}$*-Menge der Klasse* I *und* $\mathfrak{z}_S$ *eine* $\mathfrak{z}$*-Menge der Klasse* S. *Dann enthält die Ableitung* $D'(\mathfrak{z}_S \mathfrak{z}_I)$ *des Durchschnittes* $D(\mathfrak{z}_S \mathfrak{z}_I)$ *dieser Mengen nicht den Punkt* (1. 2).

In der Tat, setzen wir das Entgegengesetzte voraus. Dann würde die Menge $D(\mathfrak{z}_S \mathfrak{z}_I)$ zum Typus der $\mathfrak{z}$-Mengen gehören und müßte entweder zur S- oder zur I-Klasse gehören, was nicht möglich ist, da $D(\mathfrak{z}_S \mathfrak{z}_I)$ gleichzeitig ein echter Teil zweier nicht reduzierbarer $\mathfrak{z}$-Mengen von verschiedenen Klassen ist.

Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Fälle, die uns verschiedene Systeme (1. 1) darbieten können, wollen wir einer vorläufigen Klassifikation unterwerfen, indem wir in erster Reihe nur solche Fälle berücksichtigen, die für die Praxis interessant sind.

Erster Fall: Das System (1. 1), die Lösung (1. 2) und die Menge M_ϱ sind von der Art, daß die Menge M_ϱ als Summe von zwei echten, nichtreduzierbaren und elementenfremden Teilmengen $M_\varrho S$ und $M_\varrho I$ der S- und I-Klasse dargestellt werden kann.

Zweiter Fall: Die Zerspaltung des ersten Falles ist unmöglich, aber es gibt einen Limesübergang von folgender Art:

---

[4]) In bezug auf die Störungen, die (1. 2) in die Punkte der $\mathfrak{z}$-Menge der S-Klasse überführen, ist die triviale Lösung (1. 2) im Sinne Liapounoffs stabil.

[5]) In bezug auf die Störungen, die (1. 2) in die Punkte der $\mathfrak{z}$-Menge der I-Klasse überführen, ist (1. 2) instabil.

1. Jedem Zahlwert $\varkappa_1$ eines Parameters $\varkappa$ wird eine wohlbestimmte Zerspaltung der Menge M_ϱ in drei echte meßbare Teilmengen ohne gemeinsame Punkte $M_\varrho S^{(\varkappa_1)}$, $M_\varrho I^{(\varkappa_1)}$ und $M_\varrho I_{\text{red.}}^{(\varkappa_1)}$ zugeordnet, die der Bedingung

$$M_\varrho S^{(\varkappa_1)} + M_\varrho I^{(\varkappa_1)} + M_\varrho I_{\text{red.}}^{(\varkappa_1)} = M_\varrho$$

Genüge leisten, und von denen die erste zur S-Klasse, die zweite zu den nicht reduzierbaren 3-Mengen der I-Klasse und endlich die dritte zu den reduzierbaren 3-Mengen der I-Klasse gehört.

2. Bei der Vergrößerung des Parameterwertes $\varkappa$ nehmen die Mengen $M_\varrho S^{(\varkappa)}$ und $M_\varrho I^{(\varkappa)}$ nicht ab, d. h. wenn $\varkappa_1 < \varkappa_2$ ist, soll

$$M_\varrho S^{(\varkappa_1)} \subset M_\varrho S^{(\varkappa_2)}, \quad M_\varrho I^{(\varkappa_1)} \subset M_\varrho I^{(\varkappa_2)}$$

sein.

Bei unbegrenztem Zunehmen des Parameterwerts $\varkappa$ streben die Mengen $M_\varrho S^{(\varkappa)}$ und $M_\varrho I^{(\varkappa)}$ gewissen Grenzmengen $M_\varrho S^*$ und $M_\varrho I^*$ zu, derart, daß das sphärische Relativmaß der Differenzen $M_\varrho S^* - M_\varrho S^{(\varkappa)}$ und $M_\varrho I^* - M_\varrho I^{(\varkappa)}$ monoton und gleichmäßig gegen Null strebt. M. a. W., es soll möglich sein, für jede gegebene Zahl ε einen solchen Wert $\varkappa_\varepsilon$ zu finden, daß die Ungleichungen

$$(1.7) \qquad \frac{\mathfrak{M}(M_r S^* - M_r S^{(\varkappa_\varepsilon)})}{\mathfrak{M}(M_r)} < \varepsilon, \quad \frac{\mathfrak{M}(M_r I^* - M_r I^{(\varkappa_\varepsilon)})}{\mathfrak{M}(M_r)} < \varepsilon$$

für alle $\varkappa > \varkappa_\varepsilon$, wie auch für alle $r\,(0 < r < \varrho)$ gleichzeitig befriedigt seien.

4. Die Grenzmengen $M_\varrho S^*$ und $M_\varrho I^*$ sollen die Gleichung

$$(1.8) \qquad \mathfrak{M}(M_\varrho S^*) + \mathfrak{M}(M_\varrho I^*) = \mathfrak{M}(M_\varrho)$$

befriedigen.

Dritter Fall: Die Zerspaltung des ersten Falles, wie auch die Konstruktion des Grenzüberganges des zweiten Falles sind beide unmöglich. Aber es ist möglich, die Menge M_ϱ in drei echte und meßbare 3-Teilmengen $M_\varrho S$, $M_\varrho I$ und $M_\varrho U$ ohne gemeinsame Punkte zu zerspalten von der Art, daß

1. $M_\varrho S$ der S-Klasse angehört, $M_\varrho I$ nichtreduzierbar ist und der I-Klasse angehört,

2. bei $M_r U$ das sphärische Relativmaß gleichzeitig mit dem Halbmesser r der entsprechenden Sphäre (1.4) gegen Null strebt, d. h.

$$(1.9) \qquad \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r U)}{\mathfrak{M}(M_r)} = 0$$

ist.

3. $$M_\varrho S + M_\varrho I + M_\varrho U = M_\varrho$$

ist.

$M_\varrho U$ kann sonst beliebig sein, kann also z. B. auch die Menge der singulären Punkte des Systems (1.1) darstellen, in denen die Eindeutigkeit der Bahnbestimmung mittels der Anfangsbestimmungen wegfällt.

Vierter Fall: Die Bedingungen der ersten drei Fälle sind nicht erfüllt, aber es gibt einen Grenzübergang von der Art des im zweiten Falle beschriebenen, der als Grenzmengen drei Mengen $M_\varrho S^*$, $M_\varrho I^*$ und $M_\varrho U^*$ liefert, von denen die letzte die Eigenschaft (1.9) besitzt, während die zwei ersten Grenzmengen für Folgen von nichtreduzierbaren echten Teilmengen von M_ϱ sind, die bzw. den S- und I-Klassen angehören.

Fünfter Fall: Die Bedingungen der ersten vier Fälle sind nicht erfüllt.

Es wäre von großem Interesse, den Zusammenhang der erörterten Klassifikation der Systeme (1.1) mit der üblichen Klassifikation derselben nach den analytischen Beschaffenheiten der rechten Seiten der Gleichungen (1.1) festzustellen. In dieser Arbeit aber lassen wir diese Frage ungelöst und begnügen uns nur mit der Bemerkung, daß anscheinend der Fall, wo die Funktionen $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in den Gleichungen (1.1) holomorph sind[6]), nur mit dem ersten und dem zweiten unserer Fälle vereinbar ist. Was aber den dritten und vierten Fall anbetrifft, so können dieselben auch bei einigen Klassen von Systemen (1.1) mit nichtanalytischen rechten Seiten vorkommen. Schließlich scheint es uns sehr unwahrscheinlich, daß der Fall, wo die Funktionen X_s analytisch sind, mit einem so komplizierten Falle wie dem fünften vereinbar sein könnte.

Nun wenden wir uns zur Feststellung einiger Eigenschaften der Systeme (1.1) in den ersten vier Fällen.

Satz 2. *Wenn die Differentialgleichungen* (1.1) *und die Menge* M_ϱ *so beschaffen sind, daß der erste Fall stattfindet, und wenn die Menge* M_ϱ *zwei verschiedenen Zerspaltungen unterworfen wird, von denen die erste die Untermengen* $M_\varrho S_1$ *und* $M_\varrho I_1$ *und die zweite die Untermengen* $M_\varrho S_2$ *und* $M_\varrho I_2$ *liefert, so kann man um den Punkt* (1.2) *immer eine solche Kugel* (1.4) *mit einem von Null verschiedenen Halbmesser* $r = \Delta$ *beschreiben, daß innerhalb dieser Kugel die Mengen* $M_\Delta S_1$ *und* $M_\Delta S_2$, *wie auch* $M_\Delta I_1$ *und* $M_\Delta I_2$ *paarweise identisch sind.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des ersten Satzes.

Satz 3[7]): *Wenn für die Differentialgleichungen* (1.1) *und die Menge* M_ϱ *der zweite Fall vorliegt und wenn zwei verschiedene Grenzüber-*

[6]) Was wir im § 5 dieser Arbeit voraussetzen werden.

[7]) Ich benutze die Gelegenheit für kritische Bemerkungen bei der Redaktion dieses Satzes wie auch an einigen anderen Stellen dieses Paragraphen Herrn Prof. W. Stepanoff meinen besten Dank auszusprechen.

gänge konstruiert werden können, von denen der erste die Grenzmengen $M_\varrho S_1^*$ und $M_\varrho I_1^*$ und der zweite die Grenzmengen $M_\varrho S_2^*$ und $M_\varrho I_2^*$ gibt, so strebt das relative sphärische Maß aller Differenzen

$$\delta_1 = M_\varrho S_1^* - M_\varrho S_1^* S_2^*, \quad \delta_2 = M_\varrho S_2^* - M_\varrho S_1^* S_2^*,$$
$$\delta_3 = M_\varrho I_1^* - M_\varrho I_1^* I_2^*, \quad \delta_4 = M_\varrho I_2^* - M_\varrho I_1^* I_2^*$$

gleichzeitig mit dem Halbmesser der entsprechenden Kugel gegen Null.

In der Tat, wäre z. B. δ_1 eine der erwähnten Differenzen, deren sphärisches Relativmaß

$$\mu(\delta_1, r) = \frac{\mathfrak{M}(M_r \delta_1)}{\mathfrak{M}(M_r)}$$

für $r \to 0$ nicht gegen Null strebt, so gäbe es eine Nullfolge $r_1, r_2, \ldots$ und eine von Null verschiedene positive Zahl η so, daß für jedes r_ν die Ungleichung

$$\mu(\delta_1, r_\nu) > \eta$$

gilt. Hieraus folgt, daß der Durchschnitt $D(M_\varrho S_1^* I_2^*)$ nicht leer ist, und daß das sphärische Relativmaß dieses Durchschnitts

$$\mu(D, r_\nu) = \frac{\mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^* I_2^*)}{\mathfrak{M}(M_{r_\nu})}$$

auch eine Ungleichung

$$\mu(D, r_\nu) > \xi$$

mit $\xi > 0$ für alle r_ν befriedigt.

Den Bedingungen des zweiten Falles zufolge gibt es eine solche Zahl $\varkappa$, daß folgende zwei Ungleichungen

$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^* - M_{r_\nu} S_1^{(\varkappa)}) < \tfrac{1}{2} \xi \mathfrak{M}(M_{r_\nu}),$$
$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} I_2^* - M_{r_\nu} I_2^{(\varkappa)}) < \tfrac{1}{2} \xi \mathfrak{M}(M_{r_\nu}),$$

für jedes r_ν gleichzeitig befriedigt werden.

Also haben wir der gemachten Voraussetzung zufolge:

$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^*) - \mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^{(\varkappa)}) < \tfrac{1}{2} \mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^* I_2^*),$$
$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} I_2^*) - \mathfrak{M}(M_{r_\nu} I_2^{(\varkappa)}) < \tfrac{1}{2} \mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^* I_2^*),$$

oder

$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^* + M_{r_\nu} I_2^*) - \mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^{(\varkappa)} + M_{r_\nu} I_2^{(\varkappa)}) - \mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^{(\varkappa)} I_2^{(\varkappa)}) < 0,$$

und daher

$$\mathfrak{M}(M_{r_\nu} S_1^{(\varkappa)} I_2^{(\varkappa)}) > 0$$

für jedes r_ν.

Diese Ungleichung zeigt aber, daß der Durchschnitt zweier nicht-reduzierbarer Mengen verschiedener Klassen S und I den Punkt (1. 2)

zum Limespunkt hat, was dem ersten Satz zufolge unmöglich ist. Der dritte Satz ist damit bewiesen.

Satz 4. *Wenn der dritte Fall vorliegt und wenn die Menge M_ϱ zwei verschiedenen Zerspaltungen unterworfen wurde, von denen die erste die Untermengen $M_\varrho S_1$, $M_\varrho I_1$ und $M_\varrho U_1$, während die zweite die Untermengen $M_\varrho S_2$, $M_\varrho I_2$ und $M_\varrho U_2$ lieferte, so kann man immer eine Kugel* (1.4) *mit dem Halbmesser $r = \Delta > 0$ finden, so daß innerhalb dieser Kugel jede von den vier Mengen*

$$(M_\Delta S_1 - M_\Delta S_1 S_2) - (M_\Delta S_1 - M_\Delta S_1 S_2) M_\Delta U_1 - (M_\Delta S_1 - M_\Delta S_1 S_2) M_\Delta U_2,$$
$$(M_\Delta S_2 - M_\Delta S_1 S_2) - (M_\Delta S_2 - M_\Delta S_1 S_2) M_\Delta U_1 - (M_\Delta S_2 - M_\Delta S_1 S_2) M_\Delta U_2,$$
$$(M_\Delta I_1 - M_\Delta I_2 I_1) - (M_\Delta I_1 - M_\Delta I_2 I_1) M_\Delta U_1 - (M_\Delta I_1 - M_\Delta I_2 I_1) M_\Delta U_2,$$
$$(M_\Delta I_2 - M_\Delta I_1 I_2) - (M_\Delta I_2 - M_\Delta I_1 I_2) M_\Delta U_1 - (M_\Delta I_2 - M_\Delta I_1 I_2) M_\Delta U_2$$

Nullmenge ist.

Dieser Satz ist wie der Satz 2 eine fast unmittelbare Folge des ersten Satzes.

In bezug auf den vierten Fall gilt ein Satz, der dem dritten Satze insoweit analog ist, als der vierte Fall ein Analogon zum zweiten Falle darstellt. Dieser Satz wird im folgenden als Satz 5 bezeichnet.

§ 2.

Definition der Stabilitätswahrscheinlichkeit.

Die in [1] gegebene Definition der Stabilitätswahrscheinlichkeit lautet wie folgt:

Die Stabilitätswahrscheinlichkeit PS[8]) des gegebenen Bewegungszustandes (1.2) wird durch die Formel definiert:

$$PS = \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r S)}{\mathfrak{M}(M_r)}, \tag{2.1}$$

wo $\mathfrak{M}(M_r)$ das Maß der Menge M_r der Anfangspunkte innerhalb der Kugel (1.4) ist, während $\mathfrak{M}(M_r S)$ das Maß der Menge derjenigen Anfangspunkte innerhalb derselben Kugel (1.4) ist, die Bewegungen der S-Klasse ergeben[9]).

Dabei war die S-Klasse der Bewegungen, wie folgt, definiert:

Die Bewegungen, die durch das System (1.1) bestimmt sind und die in den Punkten innerhalb der Kugel (1.3) ihren Anfang nehmen,

---

[8]) Die Bezeichnung soll an probabilitas stabilitatis erinnern.

[9]) Auf die Frage, ob diese Definition immer möglich ist, kommen wir sogleich zurück.

können in folgende zwei Klassen aufgeteilt werden: die S-Klasse und die I-Klasse. Die S-Klasse umfaßt alle Bewegungen

$$[x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)]$$

die ihren Ursprung in Punkten

$$[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)]$$

innerhalb der Kugel (1.4) nehmen und dabei für mindestens eine der Funktionen $\bar{R}(r)$, die >0 sind und mit r stetig und monoton zu Null abnehmen, stets in der Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \bar{R}^2(r)$$

verlaufen.

Die I-Klasse war als eine Komplementärmenge der Menge S definiert, deren Summe mit I also die Gesamtmannigfaltigkeit aller möglichen gestörten Bewegungen gibt. Außerdem soll die I-Klasse nichtreduzierbar sein[10]). (Diese wichtige Bemerkung fehlt in [1]).

Für die Einteilung der Systeme (1.1) des vorhergehenden Paragraphen ergibt sich:

Im ersten Falle kann das Symbol $M_r S$ des ersten Paragraphen offenbar mit dem Symbole $M_r S$ dieses Paragraphen identifiziert werden. Dann ergibt der Satz 2, daß im ersten Falle die Formel (2.1) bei jeder möglichen Zerspaltung der Menge M_ϱ einen und denselben Wert der Stabilitätswahrscheinlichkeit PS liefert. Gleichfalls kann man in diesem Falle behaupten, daß auch die Formel

$$PI = \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r I)}{\mathfrak{M}(M_r)}, \tag{2.2}$$

mit deren Hilfe wir in [1] die Unstabilitätswahrscheinlichkeit PI definiert haben, auch den eindeutig bestimmten Wert für die Größe PI liefern wird, der, wie auch PS, nur von der Beschaffenheit des Systems (1.1), seiner Partikulärlösung (1.2) und der Menge M_ϱ abhängt, und der die Bedingung

$$PS + PI = 1 \tag{2.3}$$

befriedigt.

Im zweiten Falle des vorhergehenden Paragraphen können die für (2.1) und (2.2) benötigten nichtreduzierbaren Teilmengen $M_\varrho S$ und $M_\varrho I$

---

[10]) Die Klasseneinteilung ist also von der Wahl der Funktion $\bar{R}(r)$ abhängig. Aber man muß beachten, daß diese Wahl durch die Bedingung beschränkt ist, daß die I-Klasse nichtreduzierbar sein soll, und diese Bedingung ist im allgemeinen keineswegs bei einer beliebigen Funktion $\bar{R}(r)$ befriedigt.

nicht unmittelbar konstruiert werden. Wir definieren jetzt die Größen PS und PI durch die Formeln (2.1) und (2.2) nur mit der Bedingung, daß die Symbole $M_r S$ und $M_r I$ bzw. durch die Symbole $M_r S^*$ und $M_r I^*$ zu ersetzen sind. Dann ergibt der Satz 3, daß auch im zweiten Falle die Größen PS und PI ganz eindeutig durch das System (1.1), Partikulärlösung (1.2) und die Menge M_ϱ bestimmt werden. Auch die Bedingung (2.3) ist offenbar befriedigt.

Im dritten und vierten Falle gelten die analogen Bemerkungen, mutatis mutandis, auch. In dem fünften Fall aber ist die eindeutige und einwandfreie Definition der Stabilitäts- und Unstabilitätswahrscheinlichkeit nicht ohne weiteres möglich. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die vier ersten Fälle.

§ 3.

Grenzabweichung der gestörten Bewegungen.

Es sei $\mathfrak{z}_S$ eine der $\mathfrak{z}$-Mengen vom Typus S. Dieser Menge $\mathfrak{z}_S$ wird dem ersten Paragraphen zufolge eine wohlbestimmte Funktion (1.5) entsprechen, die der Bedingung (1.6) Genüge leistet und dazu eine eindeutige, stetige und mit r monoton abnehmende Funktion von r ist. Wir wollen diese Funktion als die der gegebenen $\mathfrak{z}_S$-Menge entsprechende Grenzabweichungsfunktion bezeichnen. Den Wert der Ableitung dieser Funktion nach r für $r = 0$, also die Größe

$$\left(\frac{d\,\overline{R}(r, \mathfrak{z}_S)}{dr}\right)_{r=0} = G\,P(\mathfrak{z}_S) \tag{3.1}$$

wollen wir den „Grenzabweichungsgradient" für die Menge $\mathfrak{z}$ nennen.

Es sei vorausgesetzt, daß der erste Fall vorliegt. Die verschiedenen möglichen Zerspaltungen der Menge M_ϱ geben verschiedene Untermengen $M_\varrho S$. Jeder dieser Untermengen $M_\varrho S$ wird eine wohlbestimmte Grenzabweichungsfunktion

$$R = \overline{R}(r, M_\varrho S)$$

entsprechen.

Dem zweiten Satz zufolge ergeben all diese verschiedenen Grenzabweichungsfunktionen einen und denselben Wert des Grenzabweichungsgradienten (3.1)

$$\left(\frac{d\,\overline{R}(r, M_\varrho S)}{dr}\right)_{r=0}, \tag{3.2}$$

der nur von der Beschaffenheit des Systems (1.1) seiner Partikulärlösung (1.2) und der Menge M_ϱ abhängt. Wir nennen (3.2) den Grenz-

abweichungsgradient für die untersuchte Partikulärlösung (1.2) und bezeichnen ihn mit GP[11]).

Im ersten Falle wird also immer der genannte Gradient als eine endliche und positive Größe existieren, die für das vorgelegte Problem charakteristisch ist.

Im zweiten Falle gilt diese Behauptung nicht. Denn die Grenzmenge $M_\varrho S^*$ selbst ist hier keine S-Menge. Jeder Untermenge $M_\varrho S^{(\varkappa)}$ wird hier wohl eine bestimmte Grenzabweichungsfunktion

$$R = \bar{R}(r, M_\varrho S^{(\varkappa)})$$

und also ein bestimmter Grenzabweichungsgradient

$$GP(M_\varrho S^{(\varkappa)})$$

entsprechen, aber beim unbegrenzten Zunehmen des Parameterwerts $\varkappa$ braucht die Folge der Funktionen $\bar{R}(r, M_\varrho S^{(\varkappa)})$ gegen keine stetige und die Bedingung (1.6) befriedigende Funktion (1.5) zu konvergieren. Also gibt es für (1.2) im zweiten Falle keinen Grenzabweichungsgradienten von der Art wie im ersten Falle.

§ 4.

Stabilitätswahrscheinlichkeit bei einer gegebenen Grenzabweichungsfunktion.

Es liegt nahe, noch folgende Definition aufzustellen, die, wie es scheint, auch eine praktische Bedeutung haben kann.

Es sei

$$R = f(r) \tag{4.1}$$

für $r > 0$ eine gegebene stetige Funktion, die mit r monoton zu Null abnimmt.

Für jede S-Untermenge $\mathfrak{z}_S$ der Menge M_ϱ können wir die Frage eindeutig entscheiden, ob die dieser Untermenge $\mathfrak{z}_S$ entsprechende Grenzabweichungsfunktion

$$R = \bar{R}(r, \mathfrak{z}_S) \tag{4.2}$$

für jeden Wert von r im Intervalle $0 < r < \varrho$ die Bedingung

$$\bar{R}(r, \mathfrak{z}_S) \leqq f(r) \tag{4.3}$$

befriedigt oder nicht. Im ersten Falle rechnen wir die entsprechende Untermenge $\mathfrak{z}_S$ zur Klasse der S_f-Untermengen; im zweiten Falle werden wir dieselbe zur I_f-Klasse der Untermengen mitrechnen. Zu derselben I_f-Klasse rechnen wir auch jede I-Untermenge.

---

[11]) GP ist die obere Grenze der Zahlenmenge $GP(\mathfrak{z}_S)$, wo $\mathfrak{z}_S$ eine beliebige der möglichen Untermengen vom Typus S ist.

Die Untermengen $\mathfrak{z}$ der Klasse S_f können nicht „im f-Sinne" reduziert werden. Dagegen können die Mengen der I_f-Klasse reduzierbar „im f-Sinne" sein, d. h. es kann solche $\mathfrak{z}$-Mengen der I_f-Klasse geben, aus denen $\mathfrak{z}$-Untermengen der S_f-Klasse abgesondert werden können. Es sei vorausgesetzt, daß die Menge M_ϱ in zwei Untermengen: $M_\varrho S_f$ und $M_\varrho I_f$, von denen die letzte nichtreduzierbar „im f-Sinne" ist, geteilt werden kann. Dann können wir folgende Definition formulieren:

Die Wahrscheinlichkeit der Stabilität des gegebenen Bewegungszustandes (1. 2) in bezug auf die gegebene Grenzabweichungsfunktion (4. 1) ist

$$P S_f = \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r S_f)}{\mathfrak{M}(M_r)}. \tag{4. 4}$$

Die entsprechende Unstabilitätswahrscheinlichkeit wird durch die analoge Formel bestimmt:

$$P I_f = \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r I_f)}{\mathfrak{M}(M_r)}. \tag{4. 5}$$

Die Fragen über die Eindeutigkeit dieser Definitionen und dgl. können ganz analog den oben in bezug auf die Grunddefinitionen (2. 1) und (2. 2) erörterten Fragen diskutiert werden.

Ganz analoge Definitionen gelten auch in bezug auf die Stabilitätswahrscheinlichkeit bei dem gegebenen Grenzabweichungsgradienten $G P$.

§ 5.

Über eine Abschätzungsmethode der Stabilitätswahrscheinlichkeiten.

Es sei T ein n-dimensionaler Teil der ganzen n-dimensionalen Umgebung der Lösung (1. 2), der (1. 2) in sich enthält[12]).

Nehmen wir irgendeine bestimmte, eindeutige und stetige Funktion des Ortes im Raumteil T:

$$W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5. 1}$$

die der Bedingung

$$W(0, 0, \ldots, 0) = 0 \tag{5. 2}$$

Genüge leistet und deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}$$

überall in dem betrachteten Raumteil T mit eventuellem Ausschluß einer $(n - l)$-dimensionalen Punktmannigfaltigkeit A $(1 \leqq l \leqq n)$ eindeutig und

[12]) In einigen Fällen kann man voraussetzen, daß T mit der ganzen n-dimensionalen Umgebung des Punktes (1. 2) zusammenfällt.

stetig sind. In den Punkten der Mannigfaltigkeit A dürfen diese Ableitungen endliche Sprünge erleiden. Die Größe

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2$$

soll in demselben Raumteil T überall von Null verschieden sein, außer in dem Punkt (1. 2), wo dieselbe verschwinden kann.

Berechnen wir die Ableitung der Funktion W nach t längs der Integralkurven von (1. 1), so erhalten wir:

$$\dot{W} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s} X_s. \tag{5. 3}$$

Wir betrachten ferner den geometrischen Ort

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{5. 4}$$

der im folgenden durch das Symbol W^0 bezeichnet wird.

Wir nehmen an, daß man eine Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R_1^2 \tag{5. 5}$$

finden kann, mit $\varrho \geqq R_1 > 0$, die ganz im Bereich der Stetigkeit, Holomorphie und Eindeutigkeit der Funktionen $X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liegt, und die in ihrem Innern keine Punkte derjenigen Mäntel der Fläche W^0 enthält, die nicht durch den Punkt (1. 2) gehen. Im folgenden wollen wir uns nur mit den Punkten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und Flächenteilen beschäftigen, die innerhalb dieser Kugel (5. 5) liegen.

Weiter schließen wir in den folgenden Betrachtungen alle diejenigen Mäntel der Fläche W^0 aus, bei deren Durchschreiten die Funktion W nicht ihr Vorzeichen ändert. Die noch übrig gebliebenen Mäntel der Fläche W^0 werden im allgemeinen den betrachteten Raumteil T in eine (endliche oder unendliche) Menge von „kegelähnlichen" Gebieten teilen, deren gemeinsamer Scheitel der Punkt (1. 2) ist. Die Gesamtheit der Mäntel der Fläche W^0, die ein gegebenes dieser Gebiete begrenzen, wollen wir einfach als die „Seitengrenze" des Gebietes bezeichnen. Die Teile der Kugeloberfläche (5. 5), die eventuell zu der ganzen Grenze von betrachteten Gebieten gehören können, rechnen wir der Seitengrenze nicht zu.

Es kann geschehen, daß eins der betrachteten „kegelähnlichen" Gebiete ein solches ist, daß

a) an der Seitengrenze des Gebietes die Ableitung $\dot{W}$ eine definite Funktion des Ortes ist, d. h. die Ableitung $\dot{W}$ kann nur im Punkte (1. 2) verschwinden, während in den anderen Punkten der Seitengrenze sie einerlei Vorzeichen haben soll;

b) das Vorzeichen, das die Ableitung W an der Seitengrenze des Gebietes hat, ist dasselbe, das die Funktion W nach dem Durchschreiten der Seitengrenze in der Richtung von außen nach innen des Gebietes bekommt.

In diesem Falle sagen wir, daß das Gebiet der Klasse der „von innen abgesonderten Gebiete" angehört, und bezeichnen es mit dem Symbol $]W[$.

Im Falle, wo die erste Ableitung $\dot{W}$ an der Seitengrenze des Gebietes identisch verschwindet und die erste nicht identisch verschwindende Ableitung[13]) von der ungeraden Ordnung ist, werden wir auch von einem „von innen abgesonderten Gebiet" sprechen, wenn diese erste nicht verschwindende Ableitung den eben erörterten Bedingungen Genüge leistet. Schließlich, wenn das Gebiet ein solches ist, daß an seiner Seitengrenze all die Ableitungen $\dot{W}, \ddot{W} \ldots$ usw. von beliebig hoher Ordnung identisch verschwinden, nennen wir es ein „isoliertes Gebiet": $|W|$. Diese isolierten Gebiete rechnen wir ebenfalls zur Klasse der von innen abgesonderten Gebiete.

Gebiete, die nicht von innen abgesondert sind, aber zu einem einzigen „von innen abgesonderten Gebiet" vereinigt werden können, werden nicht als selbständige Gebiete angesehen.

Die Gesamtheit aller selbständigen, von innen nicht abgesonderten Gebiete wollen wir durch das Symbol N_W bezeichnen. Im Falle, wo der betrachtete Raumteil T mit der ganzen Umgebung U des Punktes (1. 2) nicht zusammenfällt, soll das Gebiet $(U - T)$ auch der Gesamtheit N_W zugezählt werden[14]).

---

[13]) Hier setzen wir voraus, daß W genügend oft differenzierbar ist.

[14]) Der Begriff des von innen abgesonderten Gebietes ist eine Fortentwicklung der Klassifikationen der den gegebenen Bewegungszustand (1. 2) umgebenden Gebiete, die in erster Reihe von Liapounoff und Četajew begonnen sind. So kann man zum Beispiel die durch Četajew [3] eingeführte Kategorie von Gebieten, innerhalb deren die Funktion W nicht negativ bzw. nicht positiv ist, während die Ableitung $\dot{W}$ an der Grenze W^0 eine definite Ortsfunktion ist, als eine aus zwei Kategorien bestehende ansehen, und zwar: 1. die „von innen abgesonderten Gebiete", bei denen das Vorzeichen der Funktion W im Innern mit dem der Ableitung $\dot{W}$ an der Grenze W^0 übereinstimmt, und 2. die „von außen abgesonderten Gebiete", bei denen die genannten Ortsfunktionen die entgegengesetzten Vorzeichen haben. Was aber Liapounoff anbetrifft, so kann man auch in seinen Abhandlungen Analogien zur Konstruktion der in Rede stehenden Gebiete finden. Als Beispiel können der dritte [4] und der zweite [5] Satz der „zweiten Methode" Liapounoffs dienen, bei deren Beweisen die Konstruktion der abgesonderten Gebiete implicite durchgeführt wird. — In dem für die Liapounoffsche zweite Methode trivialen Falle, wo die Funktion W in der ganzen Umgebung der Partikulärlösung (1. 2)

Jedes von den „von innen abgesonderten Gebieten" besitzt folgende bemerkenswerte Eigenschaft:

Keine der Bewegungen

$$[x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)], \tag{5.6}$$

die durch das System (1.1) definiert ist und die von einem Punkt

$$[x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0)] \tag{5.7}$$

ausgeht, der innerhalb oder an der Grenze irgend eines der von innen abgesonderten Gebiete $]W[$ liegt, kann das entsprechende Gebiet verlassen, es sei denn, daß der diese Bewegung repräsentierende Punkt (5.6) die Oberfläche der Kugel (5.5) durchschreitet. Denn den oben erörterten Bedingungen a) und b) zufolge bewegt sich ein die Grenze W^0 des Gebietes $]W[$ durchschreitender Punkt (5.6) überall im Innern der Kugel (5.5) von außen nach innen des Gebietes $]W[$.

Das eben Gesagte begründet die Bezeichnung: „von innen abgesonderte Gebiete". Was aber die „isolierten Gebiete" anbetrifft, so sind diese ebenfalls den von innen abgesonderten Gebieten zuzuzählen, denn die Grenzflächen dieser Gebiete werden durch die Integralflächen des Systems (1.1) gebildet, die in dem betrachteten Raumteil durch die Bewegungen (5.6) nicht geschnitten werden können.

Weiter enthält jedes der hier betrachteten von innen abgesonderten Gebiete Punkte, die dem Koordinatenursprung (1.2) beliebig nah gelegen sind. Denn die Grenze W^0 des Gebietes enthält immer den Punkt (1.2). Also kann man jedes von innen abgesonderte Gebiet als eine Punktmenge vom 3-Typus betrachten.

Nun betrachten wir eine andere Ortsfunktion

$$V = V(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{5.8}$$

die allen oben in bezug auf die W-Funktion erörterten Bedingungen Genüge leistet. Die Ableitung von V nach t längs der Integralkurven von (1.1), d. h. die Größe

$$\dot{V} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \cdot X_s, \tag{5.9}$$

wird eine wohlbestimmte Ortsfunktion in dem oben bezeichneten Raumteil T sein.

---

nicht negativ bzw. nicht positiv ist, während die Ableitung $\dot{W}$ überall in derselben Umgebung definit ist, können wir ebenfalls vom Vorhandensein eines abgesonderten Gebietes sprechen, nämlich des abgesonderten Gebietes, das die ganze Umgebung der Lösung (1.2) enthält.

Fassen wir die vorläufig durchgeführte Zerlegung der Umgebung des Punktes (1. 2) in eine Reihe der von innen abgesonderten, sowie von innen nicht abgesonderten Gebiete ins Auge und bestimmen wir die Vorzeichen der Ortsfunktionen V und $\dot{V}$ in jedem einzelnen dieser Gebiete, so können wir die mit Hilfe der Funktion W gefundenen, von innen abgesonderten Gebiete $]W[$ in vier folgende Klassen einteilen, und zwar:

A_{WV}-Gebiete von durchgängigem Asymptotismus. Dieser Klasse wird von uns ein jedes von innen abgesonderte Gebiet zugezählt, für das die Funktion V und ihre Ableitung $\dot{V}$ innerhalb und an der Grenze des Gebietes definite (im Liapounoffschen Sinne) Funktionen von entgegengesetzten Vorzeichen sind.

S_{WV}-Gebiete von durchgängiger Stabilität. Dieser Klasse gehört ein jedes von innen abgesonderte Gebiet an, für das die Funktion V innerhalb und an der Grenze des Gebietes definit ist, während die Ableitung $\dot{V}$ durchweg nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, je nachdem die Funktion V negativ bzw. positiv ist.

Die Gebiete von durchgängigem Asymptotismus gehören offenbar zur Klasse der Gebiete von durchgängiger Stabilität.

I_{WV}-Gebiete von durchgängiger Unstabilität. Diese Klasse soll diejenigen von innen abgesonderten Gebiete umfassen, für welche die Funktion V innerhalb und an der Grenze des Gebietes nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, während die Ableitung $\dot{V}$ negativ definit bzw. positiv definit ist und somit dasselbe Vorzeichen wie V hat.

D_{WV}-zweifelhafte Gebiete. Diese Kategorie umfaßt alle übrigen von innen abgesonderten Gebiete, die zu keiner der vorigen drei Kategorien gehören.

Für die Gebiete S_{WV} kann man in Verallgemeinerung des wohlbekannten ersten Satzes der zweiten Methode Liapounoffs [6] [7] zeigen:

Zu jedem R des Intervalls

$$0 < R < R_1 \tag{5.10}$$

gibt es ein Intervall

$$0 < r < r(R) \tag{5.11}$$

derart, daß $r(R) \to 0$ für $R \to 0$ ist und daß jede Bewegung, die von einem Punkt eines S_{WV}-Gebietes der Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \tag{5.12}$$

ausgeht, niemals die Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2 \tag{5.13}$$

verläßt, wie groß auch die Zwischenzeit $(t - t_0)$ sein möge.

Wir bezeichnen in folgendem diese Behauptung als Satz 6.

Dieser Satz unterscheidet sich von dem ersten Satz Liapounoffs nur dadurch, daß wir anstatt der ganzen Umgebung der Lösung (Liapounoff) hier nur einen Teil derselben betrachten, nämlich das obengenannte S_{WV}-Gebiet. Aber dieses ist ein von innen abgesondertes Gebiet und die Bewegungen, die innerhalb dieses Gebietes ihren Anfang nehmen, können niemals die Grenze W^0 des Gebietes durchschreiten, während im Liapounoffschen Falle keine Grenze W^0 auftritt. Also ist das Gebiet S_{WV} unseres Satzes im Sinne der Stabilitätstheorie der ganzen Umgebung des Punktes (1.2) äquivalent. Mit anderen Worten: das Gebiet S_{WV} kann man auf die ganze Umgebung des Punktes (1.2) stetig und eindeutig abbilden, so daß nach dieser Abbildung die Bedingungen unseres Satzes mit derjenigen des Liapounoffschen Satzes identisch werden. Der Beweis unseres Satzes ist daher nichts anderes als die bloße Wiederholung des klassischen Beweises, den Liapounoff zu seinem Satze gegeben hat [6] [8].

Vom geometrischen Standpunkt aus betrachtet [7], ist der genannte Satz, wie alle übrigen Sätze der „zweiten Methode", selbstverständlich.

Aus dem Satz folgt, daß die Gesamtheit der von innen abgesonderten Gebiete von durchgängiger Stabilität S_{WV} nichts anderes als ein Teil der Gesamtheit der $\mathfrak{z}$-Mengen der S-Klasse des ersten Paragraphen dieser Arbeit darstellt. Gleichfalls kann man behaupten, daß diese Gesamtheit $M_{R_1} S_{WV}$ auch ein echter Teil der $M_{R_1} S$-Menge des § 2 ist. Daher gilt

$$\mathfrak{M}(M_r S_{WV}) \leqq \mathfrak{M}(M_r S), \tag{5.14}$$

woraus man ohne weiteres folgende Abschätzung der Stabilitätswahrscheinlichkeit ableiten kann:

$$PS \geqq \lim \frac{\mathfrak{M}(M_r S_{WV})}{\mathfrak{M}(M_r)}. \tag{5.15}$$

Für die Gebiete A_{WV} gilt auch der Satz 6, aber mit dem Zusatze, daß:

Jede Bewegung, die ihren Anfang in irgendeinem Punkte des Gebietes A_{WV} hat, für $t \to +\infty$ asymptotisch gegen den Punkt (1.2) strebt.

Diese Behauptung wollen wir als Satz 7 bezeichnen. Sie stellt ein Analogon zur „zweiten Anmerkung" [9] Liapounoffs zum oben zitierten ersten Satze der zweiten Methode dar und kann, mutatis mutandis, in ganz analoger Weise bewiesen werden.

Bezeichnen wir mit $M_r A$ denjenigen Teil der Menge M_r des § 1, der die Anfangspunkte der für $t \to +\infty$ gegen (1.2) asymptotisch

strebenden Bewegungen enthält, und definieren wir die „Asymptotismuswahrscheinlichkeit" PA mit Hilfe der Formel:

$$PA = \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r A)}{\mathfrak{M}(M_r)}, \tag{5.16}$$

so ergibt der Satz 7:

$$\mathfrak{M}(M_r A_{WV}) \leqq \mathfrak{M}(M_r A), \tag{5.17}$$

und daraus erhalten wir folgende Abschätzung der Größe der Asymptotismuswahrscheinlichkeit

$$PA \geqq \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r A_{WV})}{\mathfrak{M}(M_r)}; \tag{5.18}$$

Bezeichnet A_{WV} dabei in den Formeln (5.17) und (5.18) die Gesamtheit aller Gebiete von durchgängigem Asymptotismus und $M_r A_{WV}$ den Durchschnitt dieser Gesamtheit mit der Kugel (1.4).

Für die Gebiete I_{WV} kann man in Verallgemeinerung des zweiten Satzes [5] der zweiten Methode Liapounoffs folgenden Satz 8 beweisen:

Zu jedem r des Intervalls $0 < r < R_1$ gibt es einen R-Wert derart, daß jede Bewegung, die von einem Punkt eines I_{WV}-Gebiets der Kugel (5.12) ausgeht, die Kugel (5.13) in einer endlichen Zwischenzeit verläßt.

Diese Behauptung steht in einer sehr engen Verwandtschaft mit dem bekannten Satz von Četajew [3] (vgl. auch [10]) und bedarf keines neuen Beweises.

Bezeichnen wir mit $M_{R_1} I_{WV}$ die Gesamtheit aller Gebiete von durchgängiger Unstabilität. Dann ergibt sich dem Satz 8 zufolge:

$$\mathfrak{M}(M_r I_{WV}) \leqq \mathfrak{M}(M_r I), \tag{5.19}$$

wo $M_r I$ dieselbe Bedeutung wie im § 2 hat. Daraus erhalten wir folgende Abschätzung der Unstabilitätswahrscheinlichkeit:

$$PI \geqq \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r I_{WV})}{\mathfrak{M}(M_r)}. \tag{5.20}$$

In ganz analoger Weise können wir auch folgende drei Ungleichungen erhalten:

$$PS \geqq PA, \tag{5.21}$$

$$1 - \lim_{r \to 0} \frac{\mathfrak{M}(M_r I_{WV})}{\mathfrak{M}(M_r)} \geqq PS, \tag{5.22}$$

$$1 - \lim \frac{\mathfrak{M}(M_r S_{WV})}{\mathfrak{M}(M_r)} \geqq PI. \tag{5.23}$$

Sollen in den Ungleichungen (5.15), (5.20), (5.22) und (5.23) die Gleichheitszeichen gelten, so ist dafür hinreichend, daß die Verhältnisse der Masse der Durchschnitte der Punktmenge M_r mit den nicht-abgeson-

derten Gebieten N_W, sowie mit den zweifelhaften von innen abgesonderten Gebieten $D_{W\,V}$ zum Maß der Punktmenge M_r selbst gleichzeitig mit dem Halbmesser r der Kugel (1. 4) gegen Null streben.

Die oben geschriebenen Ungleichungen stellen gerade das Ziel dieses Paragraphen dar. Dieselben geben eine leichte und ganz elementare Methode für die angenäherte Berechnung der Stabilitäts- und Unstabilitätswahrscheinlichkeiten an die Hand. In einigen Fällen gestatten diese Ungleichungen auch die genauen Werte der Wahrscheinlichkeitsgrößen zu ermitteln. Was aber die Schwierigkeiten betrifft, die bei der Anwendung der oben skizzierten Methode auftreten können, so sind diese stets von derselben Natur, wie die analogen Schwierigkeiten, die in einigen Fällen die fruchtbare Anwendung der zweiten Methode Liapounoffs verhindern können.

§ 6.

Über eine Methode der Abschätzung des Grenzabweichungsgradienten.

Es sei $]W[$ eines der von innen abgesonderten Gebiete durchgängiger Stabilität. Diesem Gebiete entspricht nach § 3 eine wohlbestimmte Grenzabweichungsfunktion

$$R = \overline{R}\,(r,]W[) \tag{6. 1}$$

und ein wohlbestimmter Grenzabweichungsgradient

$$G\,P\,(]W[). \tag{6. 2}$$

Die Konstruktion dieser Funktion wie auch die Ermittelung des Gradientenwerts ist im allgemeinen Falle eine schwierige Aufgabe. Aber es gibt eine sehr leichte Methode, eine Hilfsfunktion zu finden, mit der man die Grenzabweichungsfunktion (6. 1) nach oben abschätzen kann.

In der Tat, betrachten wir die Menge der Punkte unseres Gebietes $]W[$ (einschließlich der Randpunkte). Für die innerhalb der Kugel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2$$

gelegenen Punkte dieser Menge hat die Funktion V des § 5 eine obere[15]) Grenze

$$V = \overline{V}\,(r,]W[), \tag{6. 3}$$

und für die auf der Oberfläche der Kugel gelegenen Punkte eine untere Grenze

$$V = \underline{V}\,(R,]W[), \tag{6. 4}$$

die beide bei gegebenen Beispielen leicht zu bestimmen sein werden.

---

[15]) Wir setzen voraus, daß V im $]W[$ positiv definit ist. Im Falle, wo V negativ definit ist, ersetzen wir V durch den absoluten Betrag $|V|$.

Für die Bewegungen, die innerhalb eines $S_{W\,V}$-Gebietes verlaufen, kann die Funktion V nicht mit t zunehmen. — Also wird die größte positive Lösung

$$R = \widetilde{R}\,(r,]W[) \tag{6.5}$$

der Gleichung in R:

$$V\,(r,]W[) = \underline{V}\,(R,]W[), \tag{6.6}$$

d. h. die größte Entfernung des Punktes (1.2) von dem Punkte des Teils der Oberfläche $V = \overline{V}\,(r,]W[)$, der innerhalb des Gebietes $]W[$ liegt) uns die gesuchte Abschätzungsfunktion liefern, die für jeden r-Wert im Intervalle $0 < r < R_1$ die Bedingung

$$\widetilde{R}\,(r,]W[) \geqq \overline{R}\,(r,]W[) \tag{6.7}$$

befriedigt.

Beachten wir, daß

$$\widetilde{R}\,(0,]W[) = \overline{R}\,(0,]W[) = 0 \tag{6.8}$$

ist, so erhalten wir folgende Abschätzung für den Grenzabweichungsgradienten:

$$G\,P\,(]W[) \leqq \left(\frac{d\,\widetilde{R}\,(r,]W[)}{d\,r}\right)_{r=0}. \tag{6.9}$$

Es sei weiter $M_{R_1} S$ eine der S-Untermengen von der Menge M_{R_1} im ersten Falle des § 1 und

$$R = \overline{R}\,(r, M_{R_1} S) \tag{6.10}$$

die dieser Untermenge $M_{R_1} S$ entsprechende Grenzabweichungsfunktion. Nehmen wir an, daß $M_{R_1} S$ so gewählt ist, daß

$$]W[\subset M_{R_1} S \tag{6.11}$$

ist[16]). Dann erhalten wir:

$$\overline{R}\,(r,]W[) \leqq \overline{R}\,(r, M_{R_1} S) \tag{6.12}$$

und daher

$$G\,P\,(]W[) \leqq G\,P. \tag{6.13}$$

Fällt $]W[$ mit $M_{R_1} S$ zusammen, so gelten in (6.12) und (6.13) die Gleichheitszeichen, und wir erhalten

$$G\,P \leqq \left(\frac{d\,\widetilde{R}\,(r, M_{R_1} S)}{d\,r}\right)_{r=0} = \widetilde{G}\,\widetilde{P}. \tag{6.14}$$

---

[16]) Eine solche Wahl ist immer möglich.

Die Größe $\widetilde{G}\,\widetilde{P}$ schätzt den Grenzabweichungsgradient für den Bewegungszustand (1.2) nach oben ab. Die Abschätzung nach unten ist aber durch die Ungleichung

$$G\,P \geqq 1 \tag{6.15}$$

gegeben, da jede der möglichen Funktionen $\overline{R}(r,]W[)$ die Bedingung

$$\overline{R}(r,]W[) \geqq r \tag{6.16}$$

befriedigt.

§ 7.

Beispiele.

Zum Schluß dieses Aufsatzes geben wir einige einfache Beispiele für die Anwendung der oben beschriebenen Methoden der Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung. Wir beschränken uns auf den Fall der Differentialgleichungssysteme von zweiter Ordnung

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y), \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases} \tag{7.1}$$

mit holomorphen rechten Seiten der Gleichungen, und setzen überall voraus, daß die Anfangspunktmenge M mit der ganzen zweidimensionalen Umgebung der trivialen Lösung

$$x = y = 0 \tag{7.2}$$

zusammenfällt. Die charakteristischen Exponenten des Systems (7.1) d. h. die Wurzeln der „bestimmenden" (Liapounoff) Gleichung in $\varkappa$:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x=y=0} - \varkappa; & \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{x=y=0} \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=y=0} ; & \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{x=y=0} - \varkappa \end{vmatrix} = 0, \tag{7.3}$$

wollen wir mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ bezeichnen.

Beispiel 1. Der Fall, wo beide charakteristischen Exponenten reel und von Null verschieden sind.

Wenn beide Exponenten negativ sind, ist die triviale Lösung im Sinne Liapounoffs stabil, also ist in diesem Falle $PS = 1$, $PI = 0$.

Wenn aber beide Exponenten positiv sind, ist die triviale Lösung im Sinne Liapounoffs „absolut unstabil"[17]). Also ist in diesem Fall $PS = 0$, $PI = 1$.

---

[17]) Diese Bezeichnung ist anscheinend zum ersten Male durch Prof. Duboschi (Moskau) eingeführt.

Dementsprechend bleibt nur noch der Fall, wo die Exponenten entgegengesetzte Vorzeichen haben, zu untersuchen. Nach Liapounoff ist in diesem Falle die triviale Lösung auch unstabil. Die Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung gibt das Resultat $PS = 0$, $PI = 1$.

In der Tat, es sei $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 < 0$, so kann man immer das vorgelegte System (7. 1) in die Form

$$\dot{x} = \varkappa_1 x + X_2,$$
$$\dot{y} = \varkappa_2 y + Y_2,$$

bringen, wo X_2 und Y_2 die holomorphen Funktionen der Veränderlichen x und y sind, deren Entwicklungen keine Glieder nullter und erster Ordnung enthalten.

Nun betrachten wir folgende Hilfsfunktionen

$$W = a^2 x^2 - y^2,$$
$$V = b^2 x^2 + y^2,$$

wo $a > 0$ und b unbestimmte konstante Zahlen sind. Wir haben also:

$$\dot{W} = 2[\varkappa_1 a^2 x^2 - \varkappa_2 y^2] + \text{Glieder von höherer Ordnung},$$
$$\dot{V} = 2[\varkappa_1 b^2 x^2 + \varkappa_2 y^2] + \text{Glieder von höherer Ordnung},$$

und wenn wir voraussetzen, daß a und b die Ungleichung

$$-b^2 \varkappa_1 > a^2 \varkappa_2$$

befriedigen, kommen wir zum Schluß, daß man um den Punkt $x = y = 0$, der in unserem Falle die untersuchte triviale Lösung darstellt, immer solch einen Kreis mit dem von Null verschiedenen Halbmesser ϱ schlagen kann, daß das Gebiet

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad -a x \leqq y \leqq a x$$

ein von innen abgesondertes Gebiet der durchgängigen Unstabilität sein wird. Diese Bemerkung wird uns zur Ungleichung

$$PI \geqq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} a$$

führen, aus der wir zufolge der Unbegrenztheit des a-Wertes die endgültigen Gleichungen

$$PI = 1, \quad PS = 0$$

ableiten können.

Vom Standpunkt der Klassifikation des ersten Paragraphen betrachtet, ist dieses Beispiel zum „ersten Falle" mitzurechnen. Denn die Menge M_ϱ kann hier als in zwei nichtreduzierbare Teilmengen zerspalten betrachtet werden, nämlich: $M_\varrho S$-Teilmenge, die nur aus den Punkten

der Ordinatenachse $x = 0$ besteht, und $M_\varrho I$-Teilmenge, die alle übrigen Punkte der Menge M_ϱ umfaßt.

Beispiel 2: Der Fall, wo einer der charakteristischen Exponenten gleich Null, während der andere reell und negativ ist.

Wir betrachten ein System von folgender Art:

$$\dot{x} = a_1 x^2 + x X_2,$$
$$\dot{y} = \varkappa_2 y + 2 b_2 x y + c_2 y^2 + y Y_2,$$

wo

$$\varkappa_2 < 0; \quad a_1 > 0,$$

und wo X_2 und Y_2 holomorphe Funktionen von x und y sind, deren Entwicklungen keine Glieder erster und nullter Ordnung enthalten.

Wie unmittelbar einleuchtet, ist die triviale Lösung $x = y = 0$ des Systems im Sinne Liapounoffs unstabil. Unterziehen wir jedoch dasselbe Beispiel einer Untersuchung vom Standpunkt der Stabilitätswahrscheinlichkeitsrechnung aus, so ermitteln wir sehr leicht, daß die Stabilitätswahrscheinlichkeit in diesem Falle gleich $\frac{1}{2}$ ist.

In der Tat, nehmen wir an, daß

$$W = x,$$
$$V = x^2 + y^2$$

ist, so erhalten wir:

$$\dot{W} = a_1 x^2 + x X_2$$

$$\dot{V} = 2[\varkappa_2 y^2 + a_1 x^3 + 2 b_2 x y^2 + c_2 y^3] + \text{Glieder von höherer Ordnung};$$

somit sehen wir, daß es einen Kreis gibt, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, und dessen Halbmesser ϱ endlich ist, und zwar von der Beschaffenheit, daß der Teil

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad x \leqq 0$$

der xy-Ebene ein isoliertes Gebiet des durchgängigen Asymptotismus ist.

Was aber den Teil

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad x > 0$$

der xy-Ebene anbetrifft, so ist derselbe ein zweifelhaftes, von innen abgesondertes Gebiet. Also haben wir:

$$PS \geqq PA \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Nehmen wir nun an, daß

$$W = a^2 x^2 - y^2,$$
$$V = x$$

ist, wo a eine beliebige Konstante bezeichnet, so wird

$$\dot{W} = -2 \varkappa_2 y^2 + \text{Glieder von höherer Ordnung}$$

und

$$\dot{V} = a_1 x^2 + x X_2$$

sein. Demnach erweist sich das Gebiet

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad -a x \leqq y \leqq +a x, \quad x > 0,$$

als ein von innen abgesondertes Gebiet von durchgängiger Unstabilität. Somit erhalten wir:

$$PI \geqq \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} a.$$

Aber den Wert von a kann man beliebig groß wählen. Infolgedessen erhalten wir endgültig:

$$PA = PS = \tfrac{1}{2}; \quad PI = \tfrac{1}{2}.$$

Außerdem sei bemerkt, daß dieses Beispiel auch zum „ersten Falle" des ersten Paragraphen zu rechnen ist. Für die $M_\varrho S$-Untermenge kann man hier das Gebiet

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad x \leqq 0$$

wählen, während das Gebiet

$$x^2 + y^2 < \varrho^2, \quad x > 0$$

die nichtreduzierbare $M_\varrho I$-Untermenge darstellen wird.

Beispiel 3: Der Fall, wo beide charakteristische Exponenten gleich Null sind.

Nehmen wir folgendes Gleichungssystem:

$$\dot{x} = (a_1^2 x^2 - y^2) G(x, y),$$
$$\dot{y} = (a_1^2 x^2 - y^2) H(x, y),$$

wo G und H von der Beschaffenheit sind, daß der Ausdruck $xG + yH$ in der ganzen Umgebung der Triviallösung $x = y = 0$ eine positiv definite Funktion des Ortes ist, und wählen wir die Hilfsfunktionen W und V derart, daß

$$W = a_1^2 x^2 - y^2,$$
$$V = x^2 + y^2$$

ist, so finden wir nach den analogen Auseinandersetzungen, daß in diesem Falle die gesuchten Wahrscheinlichkeiten durch die Formeln:

$$PS = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} a_1; \quad PI = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} a_1$$

definiert sind.

Dementsprechend können wir in diesem Beispiel eine beliebige Größe der Stabilitätswahrscheinlichkeit zwischen Null und Eins erhalten, je nachdem wir dem Parameter a_1 verschiedene endliche Zahlenwerte zuschreiben. Im Liapounoffschen Sinne aber ist die triviale Lösung immer unstabil.

Für jeden endlichen a_1-Wert hört dies Beispiel nicht auf, zum „ersten Falle" des ersten Paragraphen anzugehören.

In allen vorhergehenden Beispielen beschäftigten wir uns mit der Frage über den Grenzabweichungsgradient nicht. Aber nach der Methode des Paragraphen 6 ist es leicht, sich davon zu überzeugen, daß der genannte Gradient für alle obenerwähnten Stabilitätsgebiete durch die Formel $GP = 1$ gegeben ist.

Beispiel 4 (von W. Stepanoff):

$$\dot{x} = x^2 - y^2,$$
$$\dot{y} = 2xy.$$

Beide charakteristischen Exponenten sind Null. Vom Standpunkt der Liapounoffschen Theorie aus ist hier die triviale Lösung unstabil. Die Stabilitätswahrscheinlichkeit ist aber gleich 1.

In der Tat betrachten wir in dem Teil der xy-Ebene:

$$(T) \qquad \begin{cases} & x \leqq 0, \\ \text{und} & \\ & x > 0, \quad y^2 \geqq k^2 x^2 \end{cases}$$

folgende Hilfsfunktionen

$$W = y^2 - k^2 x^2,$$
$$V = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}, \qquad (V(0, 0) = 0),$$

wo $k < 1$ eine reelle und positive Konstante ist, so erhalten wir

$$\dot{W} = 2x[(2 + k^2) y^2 - k^2 x^2],$$
$$\dot{V} = -\frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}.$$

Aus diesen Ausdrücken ist ersichtlich, daß der Teil $x \leqq 0$ der xy-Ebene mit dem Teil $x > 0$, $y^2 \geqq k^2 x^2$ ein von innen abgesondertes Gebiet des durchgängigen Asymptotismus A_{WV} bildet. Demnach haben wir:

$$PA \geqq 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} k.$$

Lassen wir nun k gegen Null streben, so strebt das Gebiet A_{WV} monoton und gleichmäßig gegen die ganze Umgebung des Koordinatenursprungs, während die untere Grenze der Asymptotismuswahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} k$ gegen 1 strebt.

Die Grenzmenge, gegen die unser Asymptotismusgebiet A_{WV} für $k \to 0$ strebt, stellt aber selbst weder ein Stabilitätsgebiet, noch ein nichtreduzierbares Unstabilitätsgebiet dar. Also sind hier alle Bedingungen des „zweiten Falles" des § 1 erfüllt.

Für jeden beliebig kleinen, aber von Null verschiedenen Wert von k entspricht dem oben beschriebenen Gebiet A_{WV} eine bestimmte Grenz-

abweichungsfunktion, die, wie sich nach der Methode des § 6 ergibt, die Bedingung

$$R = \overline{R}(r, A_{W\,V}(k)) < \frac{2}{1 - \cos(\operatorname{arctg} k)} \cdot r$$

befriedigen soll. Nach dem Grenzübergang $k \to 0$ hört diese Grenzabweichungsfunktion auf zu existieren, und dies steht im Einklang mit den Schlußbemerkungen des § 3.

Also für $k > 0$ erhalten wir folgende Abschätzung des Grenzabweichungsgradienten $G\,P(A_{W\,V})$ für das entsprechende Gebiet $A_{W\,V}$:

$$G\,P(A_{W\,V}) < \frac{2}{1 - \cos(\operatorname{arctg} k)}$$

und für $k \to 0$:

$$G\,P \to \infty.$$

Zitierte Literatur.

Moisseiev, N.:

[1] Über die Wahrscheinlichkeit der Stabilität nach Liapounoff. Comptes Rendus de l'Académie des Sc. de l'URSS. 1936, Nr. 5.

Liapounoff, A.:

[2] Problème général de la stabilité du mouvement. Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse, 2. Série, Tome 9, 1907, Chapitre 1. §§ 14, 15, 16.

Četajew, N.:

[3] Un théorème sur l'instabilité. Comptes rendus de l'Académie des Sc. de l'URSS. 1934, Nr. 9.

Liapounoff:

[4] Loco citato, Chapitre 1, § 16, S. 265.

[5] Loco citato, Chapitre 1, § 16, S. 262.

[6] Loco citato, Chapitre 1, § 16, S. 259.

Moisseiev, N.:

[7] Sur certaines méthodes générales d'analyse qualitative des formes du mouvement dans les problèmes de la mécanique céleste, 1 partie. Méthode des caractéristiques des contacts, §§ 25, 26. Publications of the Sternberg State Astronomical Institute. Volume 7, Part 1, 1936.

[8] Über den unwesentlichen Charakter einer der Beschränkungen, welche den topographischen Systemen in der Liapounoffschen Stabilitätstheorie auferlegt werden. Comptes Rendus de l'Académie des Sc. de l'URSS. 1936, Nr. 4.

Liapounoff:

[9] Loco citato, Chapitre 1, § 16, S. 261, Remarque II.

Moisseiev, N.:

[10] Über Stabilität von Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. Mathem. Annalen 113 (1936), S. 459.

(Eingegangen am 31. Mai 1936.)

Anwendung eines Satzes der additiven Zahlentheorie auf eine gruppentheoretische Frage.

Von

Hans Rohrbach in Göttingen.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich für Mengen von nichtnegativen ganzen Zahlen Basissysteme betrachtet, die folgendermaßen definiert sind:

Es seien A und Γ Mengen von nichtnegativen ganzen Zahlen und h eine feste natürliche Zahl. Dann heißt A eine Basis h-ter Ordnung für Γ, wenn

$$h\mathsf{A} \supseteq \Gamma \tag{1}$$

ist. Dabei wird unter $h\mathsf{A}$ die aus h Summanden A bestehende Summe im Sinne von Schnirelmann verstanden.

Ist Γ insbesondere endlich, so erhebt sich die Frage nach einer Minimalbasis h-ter Ordnung, d. h. einer Basis h-ter Ordnung für Γ, deren Elementeanzahl von keiner anderen Basis h-ter Ordnung für Γ untertroffen wird. Es gilt nun der Satz:

Ist Γ eine endliche Menge von nichtnegativen ganzen Zahlen und g die größte Zahl in Γ, so gilt für die Anzahl k der Elemente einer Minimalbasis h-ter Ordnung für Γ

$$k < h\sqrt[h]{g}. \tag{2}$$

Denn dieser Satz ist richtig[2]) für die Menge Γ_0, die aus allen ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, g$ besteht, also erst recht für jedes $\Gamma \subseteq \Gamma_0$. In der erwähnten Arbeit habe ich ferner angegeben, wie man für jede natürliche Zahl $g > 1$ eine Basis h-ter Ordnung aufstellen kann, deren Elementeanzahl kleiner als $h\sqrt[h]{g}$ ist.

Hier soll nun eine Anwendung dieses Satzes auf folgende gruppentheoretische Frage gezeigt werden:

---

[1]) H. Rohrbach, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 1—30.

[2]) A. a. O. [1]), S. 26.

Gegeben sei eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g und eine natürliche Zahl h. Gesucht ist in $\mathfrak{G}$ ein Komplex $\mathfrak{K}$ von k Elementen derart, daß

$$1.\ \mathfrak{K}^h = \mathfrak{G},$$

$$2.\ k < c\sqrt[h]{g}$$

ist, wo die Konstante c nicht von der Ordnung g der Gruppe abhängt.

Bei dieser Fragestellung handelt es sich also nicht darum, die Gruppe durch möglichst wenig Elemente schlechthin zu erzeugen. Denn dabei gibt es unter Umständen Gruppenelemente, die sich nur durch sehr lange Potenzprodukte ausdrücken lassen. Vielmehr soll der erzeugende Komplex $\mathfrak{K}$ so bestimmt werden, daß er gestattet, bei beliebig aber fest vorgegebenem h jedes Element der Gruppe als Produkt von höchstens h Elementen aus $\mathfrak{K}$ darzustellen, wobei jedoch unter allen Komplexen, die das leisten, einer mit möglichst wenig Elementen gesucht wird. Im Anschluß an mein Resultat über die Anzahl der Elemente einer Minimalbasis h-ter Ordnung schreibe ich für die Gesamtanzahl k der Elemente des erzeugenden Komplexes die Bedingung 2. vor.

Jeden Komplex $\mathfrak{K}$ mit der Eigenschaft 1. nenne ich eine *Basis h-ter Stufe für die Gruppe $\mathfrak{G}$*. Besitzt er außerdem die Eigenschaft 2., so spreche ich von einer *beschränkten Basis h-ter Stufe*. Im folgenden zeige ich einige Fälle auf, in denen solche Basen existieren, und lege für diese Fälle die Konstante c genauer fest.

Es ist z. B. für alle zyklischen Gruppen die Aufgabe sofort zu erledigen. Ist nämlich Z ein erzeugendes Element der Gruppe und g die Ordnung, so bestimme man eine Minimalbasis h-ter Ordnung für die Zahl g. Es seien dies die Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_k. \tag{3}$$

Dann ist nach (2)

$$k < h\sqrt[h]{g},$$

und die Elemente

$$Z^{a_1}, Z^{a_2}, \ldots, Z^{a_k}$$

bilden eine beschränkte Basis h-ter Stufe für die zyklische Gruppe mit $c = h$, da sich jeder der Exponenten $1, 2, \ldots, g$ als Summe von höchstens h Zahlen (3) darstellen läßt.

Allgemeiner gilt

Satz 1. *Jede Abelsche Gruppe der Ordnung g mit r Basiselementen (im gewöhnlichen Sinn) besitzt eine beschränkte Basis h-ter Stufe, deren Elementeanzahl*

$$k < h^r\sqrt[h]{g}$$

ist.

Beweis. Man schreibe die Abelsche Gruppe als direktes Produkt von r zyklischen Gruppen:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \cdots \times \mathfrak{G}_r$$

und bestimme, falls g_ϱ die Ordnung von $\mathfrak{G}_\varrho$ bezeichnet, für jede der Zahlen g_ϱ eine Minimalbasis h-ter Ordnung

$$a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, \ldots, a_{\varrho k_\varrho} \tag{4}$$

mit

$$k_\varrho < h\sqrt[h]{g_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{5}$$

Ist dann Z_ϱ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{G}_\varrho$, so bildet die Gesamtheit der Elemente

$$Z_1^{a_{1\sigma_1}} Z_2^{a_{2\sigma_2}} \cdots Z_r^{a_{r\sigma_r}} \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqq \sigma_\varrho \leqq k_\varrho \\ \varrho = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{6}$$

eine Basis h-ter Stufe für die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$. Es sei nämlich

$$G = Z_1^{\alpha_1} Z_2^{\alpha_2} \cdots Z_r^{\alpha_r},$$

wo α_ϱ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, g_\varrho$ ist ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$), ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es für jedes α_ϱ eine Zerlegung in h Summanden (4), also für G eine Zerlegung in h Faktoren von der Form (6). Für die Anzahl der Elemente (6) gilt aber nach (5)

$$k = \prod_{\varrho=1}^{r} k_\varrho < \prod_{\varrho=1}^{r} h\sqrt[h]{g_\varrho} = h^r \sqrt[h]{g}.$$

Die Bedingung 2. des Problems ist hier mit $c = h^r$ erfüllt. Die Konstante hat also für alle endlichen Abelschen Gruppen mit r Basiselementen denselben Wert, ohne Rücksicht auf die Ordnung der Gruppe.

Für $h = 2$ gilt

Satz 2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe endlicher Ordnung und $\mathfrak{A}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so besitzt $\mathfrak{G}$ eine beschränkte Basis zweiter Stufe, falls $\mathfrak{A}$ und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ diese Eigenschaft haben.*

Beweis. Es seien a bzw. g die Ordnungen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{G}$, ferner

$$\mathfrak{R}_1 = A_1 + A_2 + \cdots + A_{k_1}$$

eine beschränkte Basis zweiter Stufe für die Untergruppe $\mathfrak{A}$, also

$$\mathfrak{R}_1^2 = \mathfrak{A}, \quad k_1 < c_1\sqrt{a},$$

schließlich

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{A}G_1 + \mathfrak{A}G_2 + \cdots + \mathfrak{A}G_{k_2} \qquad (G_1 = E)$$

eine beschränkte Basis zweiter Stufe für die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$, also

$$\mathfrak{R}_2^2 = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}, \quad k_2 < c_2 \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Dann bilden die Elemente

$$G_\alpha A_\varkappa \text{ und } A_\lambda G_\beta \qquad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, k_1 \\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

eine beschränkte Basis zweiter Stufe für die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Ist nämlich G ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$ und G in $\mathfrak{A}$, so ist man für dieses G fertig, da $\mathfrak{A}$ eine solche Basis besitzt. In (7) ist dann $\alpha = \beta = 1$. Liegt G nicht in $\mathfrak{A}$, so gibt es für die Nebengruppe $\mathfrak{A}G$ nach Voraussetzung eine Zerlegung

$$\mathfrak{A}G = \mathfrak{A}G_\alpha \mathfrak{A}G_\beta \quad \text{mit} \quad 1 \leqq \alpha, \beta \leqq k_2,$$

wo also G_α und G_β zu den Repräsentanten der Basis $\mathfrak{R}_2$ gehören. Daher gilt

$$G = AG_\alpha A'G_\beta \qquad (A, A' \subset \mathfrak{A}).$$

Wenn A und A' noch nicht zur Basis $\mathfrak{R}_1$ gehören, so benutze man die Invarianz von $\mathfrak{A}$ und ersetze AG_α durch ein Element $G_\alpha A''$. In

$$G = G_\alpha A'' A' G_\beta = G_\alpha A^* G_\beta$$

gibt es dann für $A^* = A''A'$, das der Untergruppe $\mathfrak{A}$ angehört, eine Zerlegung

$$A^* = A_\varkappa A_\lambda \qquad (1 \leqq \varkappa, \lambda \leqq k_1).$$

Folglich hat man für G die Zerlegung

$$G = G_\alpha A_\varkappa \cdot A_\lambda G_\beta.$$

Die Elemente (7) bilden also eine Basis zweiter Stufe für $\mathfrak{G}$. Für die Anzahl k der Elemente (7) erhält man aber

$$k = 2 k_1 k_2 < 2 c_1 c_2 \sqrt{g} = c \sqrt{g},$$

und da c_1 und c_2 nicht von den Ordnungen a und g/a abhängen, ist auch $c = 2 c_1 c_2$ unabhängig von der Ordnung g.

Nach Satz 1 und 2 besitzt also z. B. jede metabelsche Gruppe eine beschränkte Basis zweiter Stufe.

Es sei nun

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{s-1}, \mathfrak{A}_s = E$$

eine Kompositionsreihe für die Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist dann für je zwei aufeinanderfolgende Gruppen $\mathfrak{A}_\sigma$ und $\mathfrak{A}_{\sigma+1}$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, s-1)$ der Kompositionsreihe Satz 2 erfüllt, so kann man, indem man mit den beiden letzten Gruppen anfängt, durch sukzessives Aufsteigen schließen, daß

auch $\mathfrak{G}$ eine beschränkte Basis zweiter Stufe besitzt. Da ferner zyklische Gruppen diese Eigenschaft haben, so folgt insbesondere

Satz 3. *Jede auflösbare Gruppe besitzt eine beschränkte Basis zweiter Stufe. Ferner gilt für die Anzahl der Elemente einer solchen Basis, falls g die Ordnung der Gruppe und $s+1$ die Anzahl der Glieder einer Kompositionsreihe bezeichnet,*

$$k < 2^{2^s-1}\sqrt{g}.$$

Hiernach besitzen also z. B. alle Gruppen von Primzahlpotenzordnung und alle Gruppen von quadratfreier Ordnung beschränkte Basen zweiter Stufe.

(Eingegangen am 13. Oktober 1936.)

Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente auf Raumpunkte.

Von

H. Beck in Bonn.

Von S. Lie stammen die beiden Abbildungen der Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$ auf die Punkte (x, y, z) des Raumes

$$\text{I.} \quad \mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y, \qquad \mathfrak{p} = z,$$
$$\text{II.} \quad \mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = z + x\,y, \quad \mathfrak{p} = 2\,y,$$

wobei beidemal beide Koordinatensysteme affin (schiefwinklig) vorausgesetzt werden dürfen.

Beide Abbildungen ordnen einem Punkte (Elementbüschel) der Ebene eine Raumgerade zu, ebenso aber auch einer Geraden (Elementreihe) der Ebene. Beidemal entziehen sich der Abbildung alle Elemente auf Steilgeraden (so sollen die Geraden $\mathfrak{x} = c$ der Ebene genannt werden).

Vom Standpunkt der algebraischen Geometrie, den wir im folgenden einnehmen, sind beide Abbildungen ganz verschieden zu bewerten. Nicht nur, weil die geometrische Konstruktion der Abbildung I (§ 15) viel einfacher ausfällt, als die der Abbildung II (§ 2), sondern vor allem, weil die zur Beseitigung der Singularitäten beider Abbildungen einzuführenden nichteigentlichen Raumpunkte bzw. Linienelemente sich bei I bedeutend besser handhaben lassen, als bei II (§ 6, § 18).

Von den Möglichkeiten, Linienelemente einer Ebene auf Punkte eines Raumes abzubilden, wird der algebraische Geometer zwei bevorzugen:

a) Er schließt *den Raum* projektiv ab. Das gibt dann eine Geometrie der Linienelemente mit fünfzehngliedriger Gruppe von Linienelementtransformationen. Es ist zu verlangen, daß jedem Raumpunkt ein Linienelement zugeordnet wird, und dazu hat man *akzessorische Linienelemente* einzuführen. Die dafür in Frage kommenden Figuren sind aber komplizierter Art: vom anderen Standpunkt aus müßte man sie als Elementvereinscharen bezeichnen. Immerhin gibt es ∞^1 wesentlich verschiedene Abbildungen der gewünschten Art, und unter diesen befindet sich die *zweite* Abbildung von Lie.

---

[1]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen S. 183, S. 238.

Diese zweite Abbildung von Lie hat kürzlich Herr Strubecker[2]) in einer Arbeit, die den Gegenstand mit kinematischen Fragen in Zusammenhang bringt, als Lie-Studysche Abbildung bezeichnet. Gegen diese Bezeichnung würde Study Einspruch erhoben haben. Nicht nur, daß er von dieser Abbildung keinen Gebrauch macht; es darf vielmehr ausgesprochen werden, daß er sie bewußt ablehnt, und (§ 7) mit Recht. Das, was Study in seinen Aufsätzen über Lies Geometrie der Kreise und Kugeln als Element bezeichnet, hat mit dem, was man Linienelement der Ebene nennt, sehr wenig zu tun!

b) Er schließt *die Ebene der Linienelemente* projektiv ab. Dann ist zu verlangen, daß jedem Linienelement, (wo jetzt Elementpunkt bzw. Elementgerade uneigentlich werden dürfen) ein Raumpunkt zugeordnet wird. Zu dem Zweck sind dann *akzessorische Raumpunkte* zu schaffen. So erhält der Raum den Zusammenhang einer M_3^6, die in einem R_7 verläuft. Auf diesem Wege kommt man zur *ersten* Lieschen Abbildung. Diese führt somit auf eine *Cremonasche Raumgeometrie* mit achtparametriger (gemischter) Gruppe $(\mathfrak{G}_8, \mathfrak{H}_8)$ von Cremonaschen Punkttransformationen. In ihr erhalten dann auch die Steilelemente ihren Platz, die bei der zweiten Lieschen Abbildung völlig unfaßbar bleiben.

So darf die erste Liesche Abbildung als die weitertragende bezeichnet werden, schon wegen der durch sie ermöglichten einfachen Charakterisierung der Elementvereine (§ 20).

I. Die zweite Liesche Abbildung.

§ 1.

Verfolgt man die zweite Abbildung von Lie analytisch ein Ende lang, so stellt man fest, daß den Elementen eines Elementbüschels Raumpunkte entsprechen, die auf einer Geraden eines speziellen Geradennetzes liegen. Ebenso entsprechen den Elementen einer Elementreihe Raumpunkte, die auf einer Geraden eines zweiten speziellen Netzes gelegen sind.

Diese beiden speziellen Netze gehören nun demselben nichtausgearteten Gewinde an. Damit erhält der Punktraum eine gewisse Struktur, die durch das Voraufgegangene noch nicht erschöpfend charakterisiert ist. Denn diese beiden Netze absorbieren erst zehn Konstante, während verlangt werden sollte, daß es ∞^{15} Abbildungen der betrachteten Art gibt. Drei der fehlenden Konstanten erledigen sich allerdings, wenn man die Ebene der Linienelemente passend in den Raum einbaut; die Art, wie die dann noch fehlenden auf die Abbildung einwirken, liegt nicht ganz auf der Oberfläche.

---

[2]) Monatshefte f. Math. u. Phys. 42 (1935), 309.

Man könnte nun versuchen, die Liesche Abbildung konstruktiv zu beschreiben so, wie sie dasteht. Es erweist sich aber vorteilhafter, das Problem allgemein anzupacken, wobei sich dann herausstellt, was am Lieschen Verfahren wesentlich ist, und was nicht.

§ 2.

Im Punktraum legen wir ein nicht ausgeartetes Gewinde fest. Auf einer von zwei (getrennten) reziproken Polaren wählen wir ferner zwei Punkte k und c beliebig, aber getrennt, auf der andern zwei getrennte Punkte a und b. *Die Nullebene von k soll Träger der Linienelemente werden.* Auf der Geraden bc nehmen wir noch einen weiteren Punkt l an, der von b und c getrennt ist. Ebenso auf der Geraden ka noch einen Punkt m, der nicht mit k und auch nicht mit a zusammenfällt.

Die Figur hängt gerade von fünfzehn Konstanten ab.

Sei jetzt p ein veränderlicher Raumpunkt, *der nicht in der Nullebene von c liegt.*

Konstruktion des zugeordneten Elementpunktes. Die Nullebene von p trifft ka in einem Punkte p_a (eine Ausnahme, vgl. unten), und kc in einem Punkte p_c. Die beiden Geraden $p_c l$ und kb bestimmen einen Punkt p_b. Der gesuchte Elementpunkt ist der Schnittpunkt der drei Ebenen $p_a p_b l$, pbc, kab.

Im Ausnahmefall, wo der abzubildende Punkt p auf ka liegt, soll der gesuchte Elementpunkt der Punkt p selbst sein.

Konstruktion der zugeordneten Elementgeraden. Die drei Ebenen

$$pca, \quad kbc, \quad kab$$

treffen sich in einem Punkte h. Die Gerade hm trifft die Ebene abc in einem Punkte n; dieser gehört der gesuchten Elementgeraden an.

§ 3.

Es steht nichts im Wege, die Punkte k, a, b, c als Ecken des Koordinatentetraeders zu wählen, d. i. zu setzen

k: $1 : 0 : 0 : 0$,
a: $0 : 1 : 0 : 0$,
b: $0 : 0 : 1 : 0$,
c: $0 : 0 : 0 : 1$.

Die Ebene, in der die Linienelemente untergebracht werden sollen, $(x_3 = 0)$ darf dann als Horizontalebene bezeichnet werden, und die Einschränkung, der der veränderliche Punkt p unterworfen wurde, kann dann positiv so gefaßt werden: p soll ein *eigentlicher* Punkt sein.

Da bc und bk, ac und ak Nullgeraden sind, läßt sich das Gewinde so darstellen

$$A(x_0 y_3 - x_3 y_0) + B(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

mit $AB \neq 0$. Durch Anwendung von Kollineationen, die die Ecken des Koordinatentetraeders stehen lassen, läßt sich dann $A = B = 1$ erreichen. Weiter hat man

$$\begin{array}{lll} p_a: & p_2 : -p_3 : 0 : 0, & \\ p_c: & p_0 : 0 : 0 : p_3, & (l_2 l_3 \neq 0) \\ l: & 0 : 0 : l_2 : l_3, & \\ p_b: & p_0 l_3 : 0 : -p_3 l_2 : 0, & \end{array}$$

Ebene $p_a l p_b$: $p_3 l_2 x_0 + p_2 l_2 x_1 + p_0 l_3 x_2 - p_0 l_2 x_3 = 0$,

Ebene pbc: $p_1 x_0 - p_0 x_1 = 0$.

Der gesuchte Elementpunkt heißt dann

$$(1) \qquad l_3 p_0^2 : l_3 p_0 p_1 : -l_2(p_1 p_2 + p_0 p_3) : 0.$$

Weiter findet man

$$\begin{array}{lll} h: & p_0 : 0 : p_2 : 0. & \\ m: & m_0 : m_1 : 0 : 0, & (m_0 m_1 \neq 0) \\ n: & 0 : -m_1 p_0 : m_0 p_2 : 0. & \end{array}$$

Die Vertikalebene durch die gesuchte Elementgerade ist daher

$$(2) \quad ((l_3 m_0 - l_2 m_1) p_1 p_2 - l_2 m_1 p_0 p_3) x_0 - l_3 m_0 p_0 p_2 x_1 - l_3 m_1 p_0^2 x_2 = 0.$$

§ 4.

Die so gewonnenen Formeln sollen jetzt in der Sprache Lies geschrieben werden. ($p_1 : p_0 = x$, $p_2 : p_0 = y$, $p_3 : p_0 = z$, Linienelement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{p})$).

Dann heißen sie so:

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = -\frac{l_2}{l_3}(z + x y), \quad \mathfrak{p} = -\frac{m_0}{m_1} y.$$

Diese Formeln bedeuten nun wohl Zuordnungen von Linienelementen der Ebene zu Raumpunkten; sie leisten aber nicht alle das, was Lie will. Sollen nämlich Elementvereine und Gewindekurven sich entsprechen, so ist zu verlangen $2 l_3 m_1 - l_3 m_0 = 0$.

Setzen wir demgemäß

$$\alpha = -l_2 : l_3 = -m_0 : 2 m_1,$$

so haben alle Zuordnungen

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = \alpha(z + x y), \quad \mathfrak{p} = 2\alpha y \quad (\alpha \neq 0)$$

die gewünschte Eigenschaft. Alle diese ∞^1 Abbildungen sind nun kollinear äquivalent, d. i. man darf $\alpha = 1$ setzen.

Damit haben wir dann genau die Lieschen Formeln vor uns. Wir haben aber nicht nur die invariante Konstruktion kennen gelernt, sondern

wissen jetzt auch, daß die Lieschen Formeln einer wesentlichen Vereinfachung nicht mehr fähig sind. Der störende Zahlenfaktor zwei läßt sich nicht beseitigen.

§ 5.

Wir stellen jetzt die Elementfiguren auf, die vermöge der zweiten Lieschen Abbildung den Geraden des Raumes entsprechen. Hier bedienen wir uns Plückerscher Strahlenkoordinaten, weil sie an dieser Stelle nicht gut vermieden werden können ($X_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$).

Das nicht ausgeartete Gewinde hat dann die Gleichung $X_{03} + X_{12} = 0$. Die Gerade bc in § 3 ist singuläre Gerade eines speziellen Netzes im Gewinde ($X_{01} = 0$), entsprechend die Gerade ac ($X_{02} = 0$). Wir können nur eigentliche Gerade betrachten, d. i. es soll nicht gleichzeitig $X_{01} = X_{02} = X_{03} = 0$ sein. Dann sind sieben Fälle zu unterscheiden.

1. $X_{03} + X_{12} \neq 0$, $X_{01} \neq 0$, $X_{02} \neq 0$. Einer solchen Geraden entspricht eine eindimensionale Schar von Linienelementen, deren Punktort die Kurve zweiter Ordnung ist

$$-X_{02}\mathfrak{x}^2 + (X_{12} - X_{03})\mathfrak{x} + X_{01}\mathfrak{y} - X_{31} = 0.$$

Diese Kurve wollen wir eine Steilparabel nennen, weil ihre Durchmesser Steilgerade sind. Der Geradenort ist eine weitere Steilparabel, die die erste vierpunktig berührt, nämlich

$$-4X_{02}^2\mathfrak{x}^2 + 4X_{02}(X_{12} - X_{03})\mathfrak{x} + 4X_{01}X_{02}\mathfrak{y} - \langle 4X_{02}X_{31} + (X_{03} + X_{12})^2\rangle = 0.$$

2. $X_{03} + X_{12} = 0$, $X_{01} \neq 0$, $X_{02} \neq 0$.

Die beiden Steilparabeln von Fall eins sind zusammengefallen. Hier liegt also ein Elementverein vor.

3. $X_{03} + X_{12} \neq 0$, $X_{01} \neq 0$, $X_{02} = 0$. Punktort ist die Nichtsteilgerade

$$(X_{12} - X_{03})\mathfrak{x} + X_{01}\mathfrak{y} - X_{31} = 0.$$

Dazu gehört eine feste Richtung für sämtliche Elementgerade (die Elementgeraden laufen durch einen uneigentlichen Punkt, $(0 : X_{01} : -2X_{12} : 0)$, der aber nicht der aller Steilgeraden ist.

4. $X_{03} + X_{12} = 0$, $X_{01} \neq 0$, $X_{02} = 0$.

Elementreihe auf der Nichtsteilgeraden von Fall drei.

5. $X_{03} + X_{12} \neq 0$, $X_{01} = 0$, $X_{02} \neq 0$.

Punktort ist eine Steilgerade. Alle Elementgeraden laufen durch einen eigentlichen Punkt

$$(X_{12} - X_{03} : 2X_{02},\ 2X_{23} : 2X_{02}),$$

der nicht dem Punktort

$$X_{02}\mathfrak{x} - X_{12} = 0$$

angehört.

6. $X_{03} + X_{12} = 0,\ X_{01} = 0,\ X_{02} \neq 0.$
Elementbüschel vom Scheitel
$$(-X_{03} : X_{02},\ -X_{23} : X_{02}).$$
7. $X_{03} + X_{12} \neq 0,\ X_{01} = 0,\ X_{02} = 0.$
Punktort ist eine eigentliche Steilgerade $X_{03}\,x + X_{31} = 0$. Alle Elementgeraden sind parallel (Uneigentlicher Punkt $0 : X_{03} : 2X_{23} : 0$). Nichtverein!!

§ 6.

Damit können wir jetzt an das Problem der *akzessorischen Elemente* herangehen. Das sind nach dem Voraufgegangenen solche Figuren, die uneigentlichen Raumpunkten zugeordnet werden können. Das leitende Prinzip besteht darin, einen Punkt des Raumes zu ersetzen durch die Menge aller durch ihn hindurchlaufenden eigentlichen geraden Linien. Danach werden als akzessorische Elemente zu bezeichnen sein gewisse Figuren von je ∞^2 eindimensionalen Elementscharen. Statt dessen kann man ein anderes Prinzip verwenden (welches nur für einen einzigen uneigentlichen Punkt unanwendbar ist, was aber weiter nicht schadet). *Man betrachtet statt eines Raumpunktes die durch ihn hindurch laufenden eigentlichen Geraden des Gewindes* $X_{03} + X_{12} = 0$. Das ist eine nur einparametrige Schar, und die zugehörigen eindimensionalen Elementfiguren sind jetzt Elementvereine.

Man hat es mit vier Fällen zu tun.

1. Uneigentlicher Punkt, der (vgl. § 3) weder auf bc, noch auf ac liegt. Er heiße $0 : p_1 : p_2 : p_3$, $(p_1 \neq 0,\ p_2 \neq 0)$.

Die eigentlichen Gewindegeraden durch ihn sind
$$X = p_1^2 : p_1 p_2 : p_1 p_3 : p_3^2 - \sigma p_1 p_2 : \sigma p_1^2 : -p_1 p_3.$$

Hier trifft Fall zwei von § 5 zu. Bildfiguren sind die *Elementvereine auf den* ∞^1 *Steilparabeln*
$$p_2 x^2 + 2 p_3 x - p_1 \eta + \sigma p_1 = 0.$$

Zu einer Steilparabel enthält diese Schar alle die, welche sie vierpunktig berühren. Zur Vereinfachung genügt es, von diesen Kurven die zu betrachten, die durch den Nullpunkt läuft.

2. Uneigentlicher Punkt, nicht auf bc, aber auf ac. In den vorigen Formeln ist $p_2 = 0$ zu setzen. Hier ist aber Fall vier von § 5 auszuwenden. Bildfiguren sind ∞^1 *Elementreihen auf parallelen (Nichtsteil-)geraden.* Zur Vereinfachung kann man dafür das (nicht steile) Parallelenbüschel nehmen, oder auch einen uneigentlichen Punkt.

3. Uneigentlicher Punkt auf bc, nicht auf ac. Die Gewindegeraden durch diesen Punkt $0 : 0 : p_2 : p_3$ $(p_2 \neq 0)$,
$$X = 0 : p_2^2 : p_2 p_3 : -p_2^2 \sigma : p_3^2 : -p_2 p_3,$$

sind nach Fall sechs von § 5 zu behandeln. Bildfiguren sind ∞^1 *Elementbüschel, deren Scheitel die Steilgerade* $x = -p_3 : p_2$ *erfüllen.* Zur Vereinfachung kann man diese Steilgerade selbst nehmen.

4. Der Punkt c von § 3. Hier versagt das Prinzip, insofern durch diesen Punkt keine eigentliche Gewindegerade mehr läuft. Nachdem wir aber bereits die früheren Figuren erarbeitet haben, bietet sich ungezwungen der Ausweg, als akzessorisches Element hier zu erklären den uneigentlichen Punkt, in dem sich alle Steilparabeln berühren, oder auch das Parallelenbüschel aller Steilgeraden. Betrachtet man die Aufgabe als Grenzfall nicht mehr von 2., sondern von 3., so kann man schließlich als Bild auch nehmen die uneigentliche Gerade als uneigentliche Steilgerade.

§ 7.

Als akzessorische Linienelemente können also nach § 6 erklärt werden die ∞^2 Steilparabeln durch den Nullpunkt, die ∞^1 Felder paralleler Elemente und die ∞^1 Steilgeraden. Wie kompliziert diese „Deutung" akzessorischer Linienelemente ist, erkennt man, wenn man die Figuren aufsucht, die *uneigentlichen* Geraden des Raumes zugeordnet sind.

Betrachten wir von diesen jetzt nur noch die ∞^1 Gewindegeraden! Die zugeordneten Figuren müßte man als Vereine akzessorischer Linienelemente bezeichnen. Diese Vereine würden dann sowohl als Elementbüschel als auch als Elementreihen anzusprechen sein! Denn die uneigentlichen Geraden des Gewindes gehören den beiden speziellen Netzen von § 5 gleichzeitig an.

Wenn man so auch akzessorischen Linienelementen einen Elementpunkt und eine Elementgerade zuweisen will, so stehen dafür bei ∞^2 Linienelementen nur ∞^1 „Punkte" zur Verfügung, die zugleich als Elementgerade funktionieren. Man kommt ferner in die Zwangslage, Linienelemente von unbestimmtem Elementpunkt einführen zu müssen.

Hier sieht man, warum Study die Ebene der Linienelemente aufgegeben und statt dessen „orientierte" Tangenten einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung eingesetzt hat.

Entscheidend aber für die Bewertung der zweiten Lieschen Abbildung ist der Umstand, *daß die Steilelemente*, d. i. also die Elemente von eigentlichem Elementpunkt auf einer Steilgeraden *von der Abbildung nicht erfaßt werden.* Da hilft auch der Studysche Ausweg nicht; diese Figuren fallen völlig aus. Auf der Fläche zweiter Ordnung stört das nicht, dort sind sie unsichtbar; um so unerträglicher ist dieser Umstand in der Ebene der Linienelemente.

II. Einfachste Linienelementfiguren.

§ 8.

Die Ebene der Linienelemente soll *projektiv* abgeschlossen werden. Dann hat man zur Darstellung eines Linienelementes zunächst zwei Systeme von je drei homogenen Parametern. Das Element vom Elementpunkt x (lateinische Buchstaben) und von der Elementgeraden $\mathfrak{x}$ (deutsche Buchstaben) wird durch das System

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3;\ x^1, x^2, x^3)$$

dargestellt, wobei die Systeme

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3;\ x^1, x^2, x^3) \quad \text{und} \quad (\varrho\,\mathfrak{x}_1, \varrho\,\mathfrak{x}_2, \varrho\,\mathfrak{x}_3;\ \sigma\,x^1, \sigma\,x^2, \sigma\,x^3) \qquad \varrho\,\sigma \neq 0$$

als äquivalent gelten, und Systeme der Gestalt

$$(0, 0, 0;\ x^1, x^2, x^3) \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3;\ 0:0:0)$$

ausgeschlossen werden. Ferner ist zu fordern $(\mathfrak{x}\,x) = 0$[3]).

Die Gesamtheit der Linienelemente wird dann durch eine achtgliedrige Gruppe von Transformationen beherrscht, die entsteht, wenn die Elementpunkte und Elementgeraden kontragredienten Kollineationen (Korrelationen) unterworfen werden. Diese Gruppe heiße (G_8, H_8). Gegenüber den Transformationen dieser Gruppe gibt es nur eine einzige Klasse von Linienelementen.

Betrachtet man zwei Elemente $(\mathfrak{g}, p)$ und $(\mathfrak{h}, q)$, so sind bereits vier verschiedene Möglichkeiten zu betrachten. Die beiden Elemente können koaxial sein, d. i. eine Elementreihe bestimmen, oder konzentrisch, d. i. ein Elementbüschel bestimmen. Des weiteren können sie sich in „reduzibler" Lage befinden, d. i.

$$(\mathfrak{h}\,p)\cdot(\mathfrak{g}\,q) = 0$$

oder endlich in „irreduzibler" Lage. Eine Motivierung dieser Bezeichnung wird bald erfolgen (§ 11).

Die Menge aller zu einem festen Element reduzibel liegenden Linienelemente ist reduzibel. Sie besteht aus der Figur $(\mathfrak{g}\,x) = 0$, d. i. den ∞^2 Elementen, deren Elementpunkte die Gerade $\mathfrak{g}$ erfüllen, und den Elementen, $(\mathfrak{x}\,p) = 0$, d. i. den ∞^2 Elementen, deren Elementgerade durch den Punkt p läuft.

Diese beiden Gebilde sollen jetzt selbständig betrachtet werden, d. i. es braucht nicht mehr $(\mathfrak{g}\,p) = 0$ zu sein.

Dann durchsetzen sie sich

a) für $(\mathfrak{g}\,p) \neq 0$ in einer Figur von ∞^1 Linienelementen, die durch die perspektive Zuordnung der Punktreihe $\mathfrak{g}$ auf das Geradenbüschel p eindeutig gegeben ist. Diese Figur wird sich als von grundlegender

---

[3]) $(\mathfrak{x}\,x) = (x\,\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}_1 x^1 + \mathfrak{x}_2 x^2 + \mathfrak{x}_3 x^3$.

Wichtigkeit erweisen. Je zwei getrennte ihrer Elemente befinden sich in irreduzibler Lage, und umgekehrt wird durch zwei Elemente in irreduzibler Lage stets eine solche Figur bestimmt.

b) für $(\mathfrak{g}\, p) = 0$ in einer Elementreihe und einem Elementbüschel.

§ 9.

Die Benutzung der zwei mal drei Elementparameter ist für viele Zwecke das bequemste Hilfsmittel. Statt dessen werden wir jetzt ein Linienelement auch durch neun homogene Koordinaten

$$X_i^k = \mathfrak{x}_i\, x^k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

darstellen. Warum das nötig ist, wird sich bald zeigen (§ 13). Es ist bequem, neben diese Bezeichnung durch Doppelindizes eine solche durch einfache Zeiger treten zu lassen. Es sei

$$\begin{Vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \\ X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_7 & X_8 & X_9 \end{Vmatrix}.$$

In Matrixschema sind die Koordinaten angeordnet, weil neben der linearen Relation

$$X_1 + X_5 + X_9 = 0$$

noch die neun quadratischen Relationen stattfinden, deren Bestehen aussagt, daß die Matrix

$$\| X_i^k \|$$

den Rang eins hat.

Unter dieser Bedingung lauten die Umkehrformeln von (3)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 &= X_1 : X_4 : X_7 = X_2 : X_5 : X_8 = X_3 : X_6 : X_9, \\ x^1 : x^2 : x^3 &= X_1 : X_2 : X_3 = X_4 : X_5 : X_6 = X_7 : X_8 : X_9. \end{aligned} \tag{4}$$

Deutet man die X_i^k als homogene Punktkoordinaten in einem R_8, so bilden sich damit die Linienelemente auf eine M_3^6 ab, die (wegen der linearen Relation) in einem R_7 verläuft.

Der Beweis für diesen Satz, der allem folgenden zugrunde liegt, kann einer Arbeit von A. Werres entnommen werden[4]).

Rechnet man die (G_8, H_8) der Linienelementtransformationen aus § 8 in die X um, so entstehen Formeln, die im R_8 gedeutet die Gruppe (G_8^*, H_8^*) der automorphen Kollineationen der M_3^6 ergeben. Die Ausgestaltung der Lehre von den Linienelementen in der Ebene kommt jetzt darauf hinaus, projektive Geometrie der M_3^6 zu treiben.

---

[4]) Die systematische Stellung ebener Projektivitäten. Diss., Bonn 1932.

§ 10.

Auf M_3^6 gibt es zunächst ∞^2 *gerade Linien erster Art.* Damit ist die Punktmenge gemeint

$$X_i^k = g_i \sigma^k,$$

die den neun linearen Gleichungen genügt

$$g_2 X_3^k - g_3 X_2^k = g_3 X_1^k - g_1 X_3^k = g_1 X_2^k - g_2 X_1^k = 0,$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Zugeordnet sind ihnen die ∞^2 *Elementreihen.*

Auf M_3^6 gibt es ferner ∞^2 *gerade Linien zweiter Art.* Für eine solche hat man die Darstellungen

$$X_i^k = \sigma_i p^k,$$
$$p^2 X_i^3 - p^3 X_i^2 = p^3 X_i^1 - p^1 X_i^3 = p^1 X_i^2 - p^2 X_i^1 = 0.$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Zugeordnet sind ihnen die ∞^2 *Elementbüschel.*

Weitere gerade Linien gibt es auf M_3^6 nicht. Beweis nach Werres.

Jetzt sprechen wir einige Sätze aus, die zwar lediglich andere Fassungen trivialer Tatsachen der projektiven Geometrie der Ebene sind, auf die wir uns aber immer wieder zu beziehen haben werden.

Satz 1. *Zwei getrennte gerade Linien erster* [*zweiter*] *Art von M_3^6 haben keinen Punkt gemeinsam.*

Satz 2. *Durch jeden Punkt von M_3^6 läuft eine einzige Gerade erster Art und eine einzige Gerade zweiter Art.*

Hieraus folgt sofort:

Satz 3. *Ebenen gibt es auf M_3^6 nicht.*

Etwas umständlicher ist der Beweis von

Satz 4. *Flächen zweiter Ordnung gibt es auf M_3^6 nicht.*

Reduzible Flächen fallen nach Satz 3 aus, Kegel nach Satz 2. Um zu erkennen, daß singularitätenfreie Flächen zweiter Ordnung nicht in Frage kommen, geht man indirekt vor: Man zeigt, daß die einem geradlinigen Viereck auf der Fläche entsprechende Linienelementfigur unmöglich ist.

In § 8 war die Figur aller Linienelemente (x, x) behandelt, für die eine Gleichung $(g\,x) = 0$ gilt. Die zugehörige Figur auf M_3^6 ist durch die drei linearen Gleichungen

$$g_k X_i^k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gegeben, stellt also eine Fläche dar, die erst in einem R_4 verläuft. Sie erweist sich als von der dritten Ordnung und ist geradlinig. Neben einer einzigen Geraden erster Art enthält sie noch ∞^1 gerade Linien zweiter Art. Sie soll als *kubische Fläche erster Art* bezeichnet werden.

Ferner war in § 8 die Figur aller Linienelemente betrachtet, die einer Gleichung $(\mathfrak{x}\,p) = 0$ genügen. Die zugehörige Figur auf M_3^6 ist durch die drei linearen Gleichungen

$$p^i X_i^k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

gegeben. Auch hier liegt eine M_2^3 vor, eine *kubische Fläche zweiter Art.* So nennen wir sie, weil sie neben ∞^1 Geraden erster Art nur eine einzige Gerade zweiter Art enthält, die umgekehrt ihrerseits die Fläche eindeutig bestimmt.

Wir stellen zusammen:

Satz 5. *Auf M_3^6 gibt es ∞^2 kubische Flächen erster Art und ∞^2 kubische Flächen zweiter Art. Zwei kubische Flächen erster* [*zweiter*] *Art durchsetzen sich in einer Geraden zweiter* [*erster*] *Art.*

Jetzt sollen zwei kubische Flächen verschiedener Art zum Schnitt gebracht werden. Nehmen wir für sie die obigen Darstellungen, so ist zu unterscheiden, ob $(\mathfrak{g}\,p)$ verschwindet oder nicht. Im ersten Fall ist die Schnittfigur eine Gerade erster Art und eine Gerade zweiter Art, die beide einen Punkt gemeinsam haben. Die Schnittfigur kann also als reduzibler Kegelschnitt bezeichnet werden. Das ist nun schon deswegen angebracht, weil im Falle $(\mathfrak{g}\,p) \neq 0$ die Schnittfigur ein *irreduzibler Kegelschnitt* ist.

Beispiel: $x^1 = 0$, $\mathfrak{x}_1 = 0$. Das gibt die ∞^1 Linienelemente

$$x^1 : x^2 : x^3 = 0 : \sigma_2 : \sigma_3, \qquad \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = 0 : \sigma_3 : -\sigma_2,$$

also auf M_3^6 die ∞^1 Punkte

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \\ 0 & -\sigma_2^2 & -\sigma_2\sigma_3. \end{matrix}$$

In der Ebene der Linienelemente entspricht diesem Kegelschnitt die perspektive Beziehung zwischen dem Geradenbüschel vom Scheitel $1:0:0$ und der Punktreihe auf der Geraden $x^1 = 0$ (vgl. § 8, a).

§ 11.

Damit haben wir die hauptsächlichsten Figuren, die im folgenden benötigt werden, beisammen. Eine Transformation von G_8^* vertauscht die Geraden erster Art transitiv im strengen Sinne, ebenso die Geraden zweiter Art, ebenso die kubischen Flächen erster Art, ebenso die kubischen Flächen zweiter Art. Die Transformation $X_i^{k*} = X_k^i$, die zu H_8^* gehört, vertauscht gerade Linien [kubische Flächen] erster Art mit solchen der zweiten Art. Die erste Figur, die sich anders verhält, ist der Kegelschnitt.

Die Lageverhältnisse, die wir in § 8 für zwei Linienelemente betrachtet hatten, finden sich für zwei Punkte auf M_3^6 folgendermaßen wieder:

Koaxiale Lage:	Punkte auf einer Geraden erster Art.
Konzentrische Lage:	Punkte auf einer Geraden zweiter Art.
Reduzible Lage:	Die beiden Punkte lassen sich durch einen (einzigen) reduziblen Kegelschnitt verbinden.
Irreduzible Lage:	Die beiden Punkte lassen sich durch einen (einzigen) irreduziblen Kegelschnitt verbinden.

Satz 6. *Durch einen Kegelschnitt von M_3^6 läuft eine einzige kubische Fläche erster und eine einzige kubische Fläche zweiter Art.*

Daß es nicht mehr sein können, folgt aus Satz 5!

Damit bestimmt ein Kegelschnitt eindeutig zwei gerade Linien (erster und zweiter Art), seine *Begleitgeraden*, wie wir sagen können. Als erste Begleitgerade ist zu bezeichnen die einzige Gerade erster Art auf der einzigen kubischen Fläche erster Art durch den Kegelschnitt. Schneiden sich die beiden Begleitgeraden, so ist der Kegelschnitt reduzibel, und nur dann. Er ist dann mit dem Paar seiner beiden Begleitgeraden identisch.

§ 12.

Man kann eine kubische Fläche erster Art $(\mathfrak{g}\,x) = 0$ mit einer kubischen Fläche zweiter Art $(x\,p) = 0$ zu einer reduziblen Fläche zusammenfassen. Diese hat dann die Gleichung

$$(x\,p)\,(\mathfrak{g}\,x) = \mathfrak{g}_k\,p^i\,X_i^k = 0,$$

die in den X_i^k linear und homogen ist, also einen Schnitt der M_3^6 mit einem R_6 darstellt.

Demgemäß haben wir die Gebilde zu untersuchen

$$\mathfrak{A}_1 X_1 + \mathfrak{A}_2 X_2 + \ldots + \mathfrak{A}_9 X_9 = 0.$$

Die Schnittfigur ist reduzibel, wenn die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_5 & \mathfrak{A}_6 \\ \mathfrak{A}_7 & \mathfrak{A}_8 & \mathfrak{A}_9 \end{matrix} \right\|$$

den Rang eins hat. Dann ist noch zu unterscheiden, ob der Ausdruck

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_9$$

von Null verschieden ist oder nicht. Im ersten Falle ist der Schnittkegelschnitt der beiden irreduziblen Bestandteile irreduzibel, im zweiten Falle reduzibel.

Jetzt habe die Matrix der $\mathfrak{A}$ *nicht* den Rang eins. Sie soll natürlich auch nicht den Rang Null haben. Schließlich ist der Fall auszuschließen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_9 \neq 0$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_4 = 0$, $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_7 = 0$, $\mathfrak{A}_6 = \mathfrak{A}_8 = 0$. Denn bei dieser Annahme würde gar kein R_6 geliefert.

Die Gleichung des R_6 läßt sich jetzt so schreiben

$$(x^* \mathfrak{x}) = 0,$$

wobei

$$x^{1*} = \mathfrak{A}_1 x^1 + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3,$$
$$x^{2*} = \mathfrak{A}_4 x^1 + \mathfrak{A}_5 x^2 + \mathfrak{A}_6 x^3,$$
$$x^{3*} = \mathfrak{A}_7 x^1 + \mathfrak{A}_8 x^2 + \mathfrak{A}_9 x^3$$

gesetzt ist. In der Ebene der Linienelemente liegt also eine Kollineation vor. Da außerdem $(\mathfrak{x}\, x) = 0$ ist, läßt sich die zugehörige Linienelementfigur so beschreiben:

Die dem Elementpunkt x zugeordnete Elementgerade $\mathfrak{x}$ verbindet den Punkt x mit dem ihm in einer Kollineation zugeordneten Punkt x^*. Ist aber x Ruhepunkt der Kollineation, so gehört *jedes* Linienelement durch x der Figur an. Nun läßt sich die Kollineation auf ∞^8 Arten wählen, während es im R_7 nur ∞^7 Räume R_6 gibt. Das steht im Einklang damit, daß unsere Darstellung des R_6 einfach unbestimmt ist, insofern seine Gleichung die Hinzufügung eines beliebigen Vielfachen von $X_1 + X_5 + X_9$ verträgt. Es handelt sich also nicht so sehr um einzelne Kollineationen, als vielmehr um Kollineationsbüschel, und zwar um solche, die die Identität enthalten. Mit anderen Worten, es liegt das Problem der Ruhepunkte vor. Damit ist dann aber sogleich das Ergebnis da, daß es fünf Typen unserer Figuren M_2^6 gibt, von denen zwei bereits behandelt sind. Und man kann sofort kanonische Darstellungen hinschreiben.

1. Die M_2^6 trägt ein geradliniges Sechseck (Analogie: Kollineationen mit nur drei getrennten Ruhepunkten). ∞^7. ∞^1 Klassen.

$$X_1 + \alpha X_5 = 0 \qquad (\alpha \neq 0, 1).$$

Die Fläche trägt drei binäre Scharen von Kegelschnitten.

Durch jeden Punkt der Fläche läuft ein einziger Kegelschnitt jeder der drei Scharen. Diese Scharen sind

$$\text{I.} \quad \lambda_1 x^2 - \lambda_2 x^3 = 0, \qquad (1-\alpha)\lambda_2 \mathfrak{x}_2 + \lambda_1 \mathfrak{x}_3 = 0,$$
$$\text{II.} \quad \mu_1 x^3 - \mu_2 x^1 = 0, \qquad -\alpha \mu_2 \mathfrak{x}_3 + (1-\alpha)\mu_1 \mathfrak{x}_1 = 0,$$
$$\text{III.} \quad \nu_1 x^1 - \nu_2 x^2 = 0, \qquad \nu_2 \mathfrak{x}_1 + \alpha \nu_1 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Die sechs reduziblen Kegelschnitte ergeben sich daraus für

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 0.$$

Die Scharparameter der Kegelschnitte durch ein und denselben Punkt der Fläche genügen der Gleichung

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = \lambda_2 \mu_2 \nu_2.$$

2. Die M_2^6 trägt zwei Gerade erster und zwei Gerade zweiter Art, die sich zu genau drei reduziblen Kegelschnitten zusammen fassen lassen.

(Analogie: Kollineationen mit nur zwei getrennten Ruhepunkten.) ∞^{6} Eine Klasse.

$$X_1 + X_6 = 0.$$

Auf der Fläche gibt es zwei binäre Scharen von Kegelschnitten. Alle Kegelschnitte der ersten Schar

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^3 = 0, \qquad \lambda_2 \mathfrak{x}_1 - \lambda_1 \mathfrak{x}_3 = 0$$

laufen durch denselben Punkt, der also singuläres Verhalten zeigt; die beiden geraden Linien durch ihn gehören ganz der Fläche an. Die andere Kegelschnittschar heißt

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 x^3 = 0, \quad (\mu_1 + \mu_2)\mathfrak{x}_2 - \mu_1 \mathfrak{x}_3 = 0.$$

Durch jeden (regulären) Punkt der Fläche laufen zwei Kegelschnitte.

3. Die M_2^6 enthält einen einzigen reduziblen Kegelschnitt. (Analogon: Kollineationen mit nur einem Ruhepunkt.) ∞^{5}. Eine Klasse.

$$X_2 + X_6 = 0.$$

Auf der Fläche gibt es nur eine einzige binäre Kegelschnittschar. Alle Kegelschnitte der Schar laufen durch den Doppelpunkt des reduziblen Kegelschnitts; durch jeden anderen Punkt läuft ein einziger Kegelschnitt der Schar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^3 = 0, \qquad \lambda_2 \mathfrak{x}_1 - \lambda_1 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Auf den reduziblen Gebilden M_2^6 gibt es jedesmal ∞^{2} Kegelschnitte, die zwei ternäre Gebiete bilden.

4. Reduzible M_2^6 (Analogon: Kollineationen, die außer den Punkten einer Geraden noch einen weiteren Ruhepunkt haben). ∞^{4}. Eine Klasse.

$$X_9 = 0.$$

Die beiden ternären Kegelschnittscharen sind

$$x^3 = 0, \qquad \lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_2 \mathfrak{x}_2 + \lambda_3 \mathfrak{x}_3 = 0.$$
$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0, \qquad \mathfrak{x}_3 = 0.$$

Der gemeinsame Kegelschnitt beider Scharen ist irreduzibel.

5. Reduzible M_2^6 (Analogon: Kollineationen, die außer den sämtlichen Punkten einer Geraden keinen Ruhepunkt haben). ∞^{3}. Eine Klasse.

$$X_3 = 0.$$

Zwei ternäre Kegelschnittscharen

$$x^3 = 0, \qquad \lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_2 \mathfrak{x}_2 + \lambda_3 \mathfrak{x}_3 = 0,$$
$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0, \qquad \mathfrak{x}_1 = 0;$$

Deren gemeinsamer Kegelschnitt ist reduzibel.

§ 13.

Durch die Punkte eines irreduziblen Kegelschnitts laufen ∞^{1} Gerade erster Art und ∞^{1} Gerade zweiter Art. Es sind das die Geraden

auf den beiden kubischen Flächen durch den Kegelschnitt. Zwischen diesen beiden Geradenscharen wird durch den Kegelschnitt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung hervorgerufen, und damit eine Zuordnung auch zwischen den Punktreihen auf den beiden Begleitergeraden. Da man nun auf den Begleitergeraden von harmonischer Trennung reden kann, so gilt Gleiches auch für die Punkte des Kegelschnitts.

Ernennt man zwei Treffgeraden verschiedener Art eines irreduziblen Kegelschnitts K zu Begleitgeraden eines weiteren Kegelschnitts K^*, so soll K^* zu K *konjugiert* genannt werden.

Durch jeden Punkt, der nicht auf einer Begleitgeraden liegt, läuft ein einziger zu K konjugierter Kegelschnitt.

Der irreduzible Kegelschnitt vermittelt (Satz 3) keine Polarität, wohl aber eine involutorische Kollineation von G_8^*. Bei dieser bleibt jeder Punkt des Kegelschnitts in Ruhe, ebenso jeder Punkt auf den beiden Begleitgeraden. Der dem Nichtruhepunkt X vermöge K zugeordnete Punkt X^* liegt auf dem durch X laufenden zu K konjugierten Kegelschnitt und wird auf diesem von X harmonisch getrennt durch die beiden Begleitgeraden. In der Ebene der Linienelemente entspricht dieser Transformation die kollineare Spiegelung.

Damit haben wir von der projektiven Geometrie auf M_3^6 soviel gebracht, als wir für das folgende benötigen. Aus dem Vorangegangenen geht zur Genüge hervor, daß die homogenen Koordinaten X_i^k den Parametern (x, x) nur dann vorzuziehen sind, wenn es sich um Ordnungsbestimmungen handelt.

III. Die erste Liesche Abbildung.

§ 14.

Bei jeder Abbildung der Linienelemente der projektiven Ebene auf die Punkte des dreidimensionalen Raumes entsteht in diesem eine Geometrie mit gemischter achtgliedriger Gruppe von Cremonaschen Punkttransformationen. Der dreidimensionale Raum, in dem wieder ein affines Koordinatensystem (x, y, z) zugrunde gelegt werde, soll daher kurz als *Cremonaraum* bezeichnet werden, womit zum Ausdruck gebracht wird, daß er den Zusammenhang der M_3^6 erhalten soll. Für die weitere Darstellung wird es sich jetzt als bequemer erweisen, nicht die Linienelemente der Ebene, sondern die Punkte der M_3^6 auf den Cremonaraum zu beziehen.

An die gesuchte Abbildung stellen wir dann zwei Anforderungen.

1) Jedem (eigentlichen) *Punkt* des Cremonaraumes soll ein *Punkt* der M_3^6 zugeordnet werden. Die Forderung erweist sich als allgemein erfüllbar.

2. *Gerade Linien auf* M_3^6 sollen im Cremonaraum als *gerade Linien* zum Vorschein kommen.

Das wird nicht durchweg möglich sein. Jedenfalls darf die letzte Forderung nicht umgekehrt werden, denn den ∞^4 Geraden des Raumes stehen nur $2\,\infty^2$ Gerade auf der M_3^6 gegenüber. Man wird also im Cremonaraum zwei *Geradenkongruenzen* auszuwählen haben. Nach Satz 2 müssen beide *von erster Ordnung* sein, d. i. jede von ihnen darf durch jeden (eigentlichen) Punkt des Cremonaraumes nur eine einzige Gerade entsenden. Daher fallen sofort aus die Geradennetze mit getrennten Leitgeraden. Von speziellen Netzen kommen nicht in Frage solche mit eigentlicher Doppelleitlinie, von den Geradenbündeln scheiden die von eigentlichen Scheiteln aus.

Demgemäß setzen wir im Cremonaraum ein Parallelenbündel an. Es enthalte die z-Achse und werde der Bequemlichkeit halber als vertikal bezeichnet. Wir beschließen dann: *Den (eigentlichen) Punkten einer Vertikalgeraden des Cremonaraumes sollen Punkte einer Geraden zweiter Art auf* M_3^6 *zugeordnet werden.*

Da die gesuchte Abbildung nur eine von ∞^8 gleichberechtigten ist, so steht nichts im Wege, der Geraden zweiter Art $(x\,p) = 0$ zuzuordnen die Menge der Punkte (x, y, z), für die

$$x : y : 1 = p^1 : p^2 : p^3 = X_i^1 : X_i^2 : X_i^3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Dabei fallen natürlich die Fälle $p^3 = 0$ aus.

Die zweite Kongruenz darf keine Vertikalgerade enthalten. Es kommt nur noch in Frage ein Parallelenbündel oder ein Netz mit doppelt zählender uneigentlicher Leitgerade.

Seien u und v zwei Parameter, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Konstante. Der Ansatz

$$(\alpha + \beta u)\,x + (\gamma + \delta u)\,y = v, \quad z = u$$

stellt dann ∞^2 gerade Linien dar, die für $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ein spezielles Netz erfüllen, für $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ dagegen ein Parallelenbündel. Jede durch dies System dargestellte Gerade (u, v) darf als *horizontal* bezeichnet werden.

Ist (x_0, y_0, z_0) ein Punkt der Geraden (u, v), so gilt für die Punktreihe auf (u, v) eine Parameterdarstellung

$$x = x_0 + (\gamma + \delta z_0)\,t, \quad y = y_0 - (\alpha + \beta z_0)\,t, \quad z = z_0.$$

Betrachtet man dann die den beiden getrennten Parameterwerten t_1 und t_2 zugeordneten Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2), so gilt nach (5) für die ihnen zugeordneten Geraden zweiter Art $(x\,p) = 0$ und $(x\,q) = 0$ von M_3^6

$$p^1 : p^2 : p^3 = x_1 : y_1 : 1,$$
$$q^1 : q^2 : q^3 = x_2 : y_2 : 1.$$

Die gemeinsame Treffgerade erster Art auf M_3^6 (entsprechend der Verbindungsgeraden $\mathfrak{g}$ der Elementpunkte p und q) heißt dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 &= \alpha + \beta z_0 : \gamma + \delta z_0 : - \{(\alpha + \beta z_0) x_0 + (\gamma + \delta z_0) y_0\} \\ &= \alpha + \beta u : \gamma + \delta u : - v.\end{aligned}$$

Nun muß verhindert werden, daß $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gleichzeitig verschwinden, und dazu hat man $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ zu wählen: *Die zweite Kongruenz im Cremonaraum darf nicht mehr als Parallelenbündel gewählt werden.*

Demnach ist die Spezialisierung zulässig

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1, \quad \gamma = +1, \quad \delta = 0,$$

und gibt

$$\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 = -u : 1 : -v,$$

oder schließlich

$$\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 = -z : 1 : zx - y. \tag{6}$$

Damit ist Forderung 1 erfüllt: Dem eigentlichen Punkt (x, y, z) des Cremonaraumes ist zugeordnet das Linienelement

$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = -z : 1 : zx - y; \quad x^1 : x^2 : x^3 = x : y : 1, \tag{7}$$

und damit der Punkt der M_3^6 von den homogenen Koordinaten

$$\begin{Bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \\ X_7 & X_8 & X_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -zx & -zy & -z \\ x & y & 1 \\ x(zx-y) & y(zx-y) & zx-y \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Die Umkehrformeln lauten

$$x = \frac{x^1}{x^3}, \quad y = \frac{x^2}{x^3}, \quad z = -\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_2}, \quad (\mathfrak{x}_2 x^3 \neq 0) \tag{7a}$$

oder also

$$x = X_4 : X_6, \quad y = X_5 : X_6, \quad z = -X_3 : X_6, \quad (X_6 \neq 0). \tag{8a}$$

Das Minuszeichen in den beiden letzten Formeln ist störend (und ganz unzweckmäßig!). Wir haben es mitgeschleppt, um zu voller Übereinstimmung mit den Lieschen Formeln zu gelangen.

§ 15.

Die letzten Umkehrformeln zeigen, daß von den Punkten von M_3^6 zunächst die auszuschließen sind, für die $X_6 = 0$ ist. Das sind die Punkte einer reduziblen M_2^6 vom Typus 5 (§ 12), also die Punkte zweier kubischer Flächen, die sich in einem reduziblen Kegelschnitt durchsetzen. *Diesen Punkten von M_3^6 werden akzessorische Punkte des Cremonaraumes zuzuweisen sein.* Welcher Art diese sind, kann erst gesagt werden, wenn der geometrische Inhalt unserer Formeln soweit geklärt ist, daß man die Abbildung konstruktiv verfolgen kann.

So klar diese letzte Forderung scheint, so sehr bedarf sie der Erläuterung. Die bisherigen Abbildungsformeln schweben insofern in der

Luft, als es ganz gleichgültig ist, wie die Ebene der Linienelemente gedacht wird, und wie der Cremonaraum; der Zusammenhang ist rein gedanklicher Art. Zur Durchführung einer Konstruktion wird verlangt werden müssen, die (projektiv abgeschlossene!) Ebene der Linienelemente irgendwie in den Cremonaraum einzubauen. *Und diese Forderung läßt sich gar nicht erfüllen* (Satz 3). Die Ebene der Linienelemente wird bei jeder Art der Unterbringung irgendwie über die M_3^6 hinausragen. (Der Cremonaraum hat ja den Zusammenhang der M_3^6). Mit diesem Übelstand muß also von vornherein gerechnet werden.

Im Cremonaraum liegt bereits eine gewisse Struktur vor. Das Parallelenbündel der Vertikalgeraden ist auf ∞^2 Arten wählbar. Die singuläre Gerade des speziellen Netzes ebenfalls auf ∞^2 Arten. Zu ihr gehören dann ∞^3 spezielle Netze. Damit sind sieben Konstanten verbraucht, und der Einbau der Linienelementebene muß dem Rechnung tragen, daß noch ein Freiheitsgrad vorliegt. Daher kann diese Ebene nur horizontal eingebaut werden. Willkürlich, aber bequem ist es, sie als $z = 0$ zu nehmen. Der Elementpunkt des Elementes $(\mathfrak{g}, p)$ hat dann die Punktkoordinaten $x = p^1 : p^3$, $y = p^2 : p^3$, $z = 0$ (zweite Formel (7)).

Damit entziehen sich der weiteren Behandlung alle Linienelemente von uneigentlichem Elementpunkt, d. h. *auf M_3^6 alle Punkte der kubischen Fläche erster Art* $X_3 = X_6 = X_9 = 0$.

In der Vertikalebene des Elements, d. i. der Ebene

$$\mathfrak{g}_1 x + \mathfrak{g}_2 y + \mathfrak{g}_3 = 0$$

durch die Elementgerade $\mathfrak{g}$ liegt dann für $\mathfrak{g}_2 \neq 0$ eine einzige Netzgerade nämlich

$$-u x + y = v, \quad z = u,$$
$$u : 1 : v = -\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : -\mathfrak{g}_3.$$

Da diese Netzgerade verwandt werden wird, fallen für das folgende *alle Elemente auf Steilgeraden aus*, entsprechend den *Punkten auf M_3^6 auf der kubischen Fläche zweiter Art* $X_4 = X_5 = X_6 = 0$.

Für die verbliebenen Elemente gilt dann folgende Konstruktion:

Die Netzgerade in der Vertikalebene des Elements trifft die Vertikalgerade des Elements im gesuchten Bildpunkt des Cremonaraumes.

Jetzt hat man folgende Gegenüberstellung:

Die kubische Fläche erster Art

$$(\mathfrak{g}\, x) = 0.$$

Die kubische Fläche zweiter Art

$$(\mathfrak{x}\, p) = 0.$$

Die Vertikalebene

$$\mathfrak{g}_1 x + \mathfrak{g}_2 y + \mathfrak{g}_3 = 0.$$

Die Fläche

$$-p^1 z + p^2 + p^3 (z x - y) = 0.$$

Sie ist entweder ein Paraboloid, deren eine Erzeugendenschar aus Netzgeraden besteht oder eine Horizontalebene (vgl. § 19).

In der anderen Erzeugendenschar des Paraboloids liegt die singuläre Gerade des Netzes und eine einzige Vertikalgerade. Der Berührungspunkt der uneigentlichen Ebene liegt in Richtung der y-Achse. Diese Netzparaboloide sind also ebenso wie die Vertikalebenen in der Cremonaschen Geometrie als Flächen dritter Ordnung anzusehen.

§ 16.

Daher muß es Transformationen der Punkte des Raumes geben, die diese nach affiner Anschauung doch völlig heterogenen Gebilde ineinander überführen. Rechnet man die Formeln von (G_8, H_8) auf die x, y, z um, so erhält man

$$G_8: \quad \begin{aligned} x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}, \\ y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}, \\ z^* &= A_{11}z - A_{12} - A_{13}(zx - y) : -A_{21}z + A_{22} + A_{23}(zx - y), \\ &|aaa| \neq 0, \quad A_{12} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Diese bzw. dazu äquivalente Formeln finden sich bei Fano[5]).

Es ist zweckmäßig, noch die folgende hinzuzufügen

$$z^*x^* - y^* = -A_{31}z + A_{32} + A_{33}(zx - y) : -A_{21}z + A_{22} + A_{23}(zx - y).$$

Vermöge der Transformation

$$x^* = -z : (zx - y), \quad y^* = 1 : (zx - y), \quad z^* = -x : y$$
$$[z^*x^* - y^* = 1 : y]$$

ergibt sich daraus noch die Schar

$$H_8: \quad \begin{aligned} x^* &= -A_{11}z + A_{12} + A_{13}(zx - y) : -A_{31}z + A_{32} + A_{33}(zx - y), \\ y^* &= -A_{21}z + A_{22} + A_{23}(zx - y) : -A_{31}z + A_{32} + A_{33}(zx - y), \\ z^* &= -a_{11}x - a_{12}y - a_{13} : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \\ z^*x^* - y^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen die bekannten Mängel aller Cremonatransformationen; die sachgemäßen Hilfsmittel sind eben nicht die (x, y, z), sondern die $(\mathfrak{x}, x)$ oder die X_l^k. In diesen haben wir

$$\mathfrak{x}_l^* = A_{il}\mathfrak{x}_l, \quad x^{k*} = a_{km}x^m; \qquad X_l^{k*} = a_{km}A_{il}X_l^m$$

und

$$\mathfrak{x}_l^* = a_{im}x^m, \quad x^{k*} = A_{kl}\mathfrak{x}_l; \qquad X_l^{k*} = a_{im}A_{kl}X_l^m.$$

Ferner sieht man hier, daß diese letzten Formeln den Sachverhalt rein darstellen, während in den Transformationsformeln für die (x, y, z) als fremdes Element die gerade gewählte Abbildung steckt. Dort wirkt sich das in § 14 bemängelte Minuszeichen bereits in ziemlich schlimmer Weise aus.

---

[5]) Acc. dei Lincei. Rend. Ser. V, Vol. VII, (1898), S. 338.

§ 17.

Die beiden kubischen Flächen

$$\mathfrak{g}_1 x + \mathfrak{g}_2 y + \mathfrak{g}_3 = 0,$$
$$- p^1 z + p^2 + p^3 (z x - y) = 0$$

durchsetzen sich für $(\mathfrak{g}\, p) \neq 0$ in einem Gebilde, welches im Sinne der Cremonaschen Geometrie als irreduzibler Kegelschnitt zu bezeichnen ist, während es als gerade Linie in Erscheinung treten kann, wenn man sich auf den Standpunkt der affinen Anschauung stellt. Daher fragen wir: Wann ist das, was der Affingeometer als Gerade bezeichnet, als irreduzibler Kegelschnitt zu bezeichnen?

Die Affinstruktur des Cremonaraumes ist durch das Bündel der Vertikalgeraden und das spezielle Netz von Horizontalgeraden bestimmt. Diese beiden Gebilde induzieren aber zwei Liniengebüsche. Das erste soll *Horizontalgebüsch* heißen; es ist das Gebüsch des Netzes. Das zweite Gebüsch soll in Ermangelung eines besseren Namens als *Nichthorizontalgebüsch* bezeichnet werden, obwohl es auch Horizontalgerade enthält, nämlich die gemeinsamen Durchmesser aller Netzparaboloide. Ferner enthält es alle Vertikalgeraden und ist dadurch eindeutig gegeben. Weiter enthält es die Erzeugenden der Netzparaboloide, die nicht im Netz liegen. Jetzt gelten die beiden Sätze:

Jede (eigentliche) Nichtvertikalgerade des Nichthorizontalgebüsches entspricht einem irreduziblen Kegelschnitt des Cremonaraumes.

Jede (eigentliche) Horizontalgerade, die nicht dem Netz angehört, ist als irreduzibler Kegelschnitt des Cremonaraumes anzusprechen.

So ergibt sich folgende affine Klassifikation der Geraden:

1. Die Gerade gehört keinem der beiden Gebüsche an

$$x = a t + b, \quad y = c t + d, \quad z = t, \qquad (a \neq 0).$$

Jede solche Gerade ist als Kurve dritter Ordnung auf M_3^6 anzusehen.

2. Nichtvertikale Gerade im Nichthorizontalgebüsch

$$x = b, \quad y = c t + d, \quad z = t, \qquad (c \neq 0).$$

3. Nichtnetzgerade im Horizontalgebüsch

$$x = t, \quad y = a + b t, \quad z = c, \qquad (c \neq b).$$

Beide Darstellungen sind nicht erschöpfend; es muß noch hinzugefügt werden der Durchschnitt der beiden Gebüsche

$$x = a, \quad y = t, \quad z = c.$$

Damit sind alle geraden Linien erschöpft, die als irreduzible Kegelschnitte des Cremonaschen Raumes anzusehen sind.

4. Netzgerade

$$x = t, \quad y = a + c t, \quad z = c.$$

5. Vertikalgerade

$$x = a, \quad y = b, \quad z = t.$$

Sie sind als gerade Linien erster bzw. zweiter Art im Sinne der Cremonaschen Geometrie zu bezeichnen.

§ 18.

Jetzt können wir daran gehen, den akzessorischen Punkten des Cremonaraumes, die bisher lediglich formal durch $X_6 = 0$ erklärt waren, Figuren des eigentlichen Gebietes zuzuordnen, die diese im selben Sinne ersetzen können, wie der uneigentliche Punkt des projektiven Raumes durch das zu ihm gehörige Parallelenbündel vertreten wird. Wir haben dazu einen Punkt des Cremonaraumes zu ersetzen *durch die Schar der* ∞^2 *durch ihn hindurch laufenden Kegelschnitte.*

Wir beginnen mit dem akzessorischen Punkt

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{matrix}$$

(Linienelement von uneigentlicher Elementgeraden, deren Elementpunkt der uneigentliche Punkt aller Steilgeraden ist.) Durch diesen akzessorischen Punkt laufen die irreduziblen Kegelschnitte

$$x = u, \quad z = v.$$

Merkwürdigerweise bilden sie für die affine Anschauung auch hier ein *Parallelenbündel*, nämlich das der gemeinsamen Durchmesser aller Netzparaboloide.

Damit ist die Aufgabe im Prinzip bereits gelöst. Indessen halten wir es doch für nötig, auch die übrigen Fälle zu betrachten.

Der akzessorische Punkt heiße

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y_7 & Y_8 & 0 \end{matrix} \qquad (Y_7 \neq 0).$$

(Linienelement vom uneigentlichen Elementpunkt $Y_7 : Y_8 : 0$, dessen Elementgerade die uneigentliche ist). Die zugehörige Kegelschnittkongruenz heißt hier

$$\begin{aligned} -Y_8 x + Y_7 y + u Y_7 &= 0, \\ -v Y_7 z + Y_7 + v Y_8 &= 0 \end{aligned}$$

und ist ein *horizontales Parallelenbündel* (Familie 3 in § 17).

Der akzessorische Punkt heiße

$$\begin{matrix} 0 & Y_2 & 0, \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_8 & 0 \end{matrix} \qquad (Y_2 \neq 0).$$

(Linienelement auf einer Steilgeraden mit uneigentlichem Element- punkt) Kegelschnittkongruenz:

$$u\,Y_2 x + Y_2 + u\,Y_8 = 0,$$
$$Y_8 z + v\,Y_3 + Y_3(z\,x - y) = 0.$$

Sie ist ein *Parallelenbündel im Nichthorizontalgebüsch.* (Familie 2 in § 17)

In den übrigen Fällen besteht die Kegelschnittkongruenz nicht mehr ausschließlich aus geraden Linien affiner Anschauung. Das gibt Schwierigkeiten für die Beschreibung der Figur, die ja in der Terminologie der Gruppe (G_5, H_5) erfolgen müßte, deren Transformationen akzessorische Punkte wieder in akzessorische Punkte überführen. Indessen setzt hier ein zweites Prinzip ein: *Man ersetzt den Punkt des Cremonaraumes durch die beiden durch ihn hindurch laufenden geraden Linien.*

In den behandelten drei Fällen war dies zweite Prinzip nicht anwendbar, weil die beiden fraglichen geraden Linien selbst akzessorisch sind. Auch für die übrigen Fälle ist jedesmal die eine der beiden Geraden unsichtbar, die andere ist aber eigentlich.

In den Fällen $Y_6 = 0$, $Y_4 \neq 0$ (Linienelemente von uneigentlichem Elementpunkt und eigentlicher nicht steiler Elementgerade) ist Y der akzessorische Punkt der Netzgerade

$$Y_1 x + Y_4 y + Y_7 = 0, \quad z = -\,Y_1 : Y_4.$$

In den Fällen $Y_6 = 0$, $Y_3 \neq 0$ (Linienelemente mit eigentlichem Elementpunkt auf einer Steilgerade) ist Y der akzessorische Punkt der Vertikalgeraden

$$x = Y_1 : Y_3, \quad y = Y_2 : Y_3.$$

Damit sind alle Fälle erledigt. *Man hat also jeder Vertikalgeraden und auch jeder Netzgeraden einen akzessorischen Punkt beizulegen, wobei aber parallele Gerade affiner Anschauung verschiedene akzessorische Punkte erhalten.* So wird wenigstens die Hauptmenge der akzessorischen Punkte erfaßt; in den fehlenden $2\,\infty^1$ Fällen muß man allerdings seine Zuflucht zu den Parallelenbündeln nehmen.

Handelt es sich jetzt um die Deutung akzessorischer Geraden, so faßt man sie als Punktörter auf; dann ist nämlich das zweite Prinzip anwendbar; man erhält Büschel paralleler Vertikalgeraden in einer Ebene durch die singuläre Gerade des Nichthorizontalgebüsches und Büschel paralleler Netzgeraden in einer Horizontalebene, und nur für zwei akzessorische Gerade versagt dies Verfahren.

§ 19.

Jetzt lassen sich die Beziehungen zwischen einem Kegelschnitt und seinen Begleitergeraden einerseits, dem akzessorischen Gebiet anderer-

seits befriedigend darstellen. Ein Kegelschnitt erscheint auch nach affiner Anschauung als solcher, abgesehen von den in § 17 behandelten Fällen. Er liegt in einer Vertikalebene und in einem Netzparaboloid, welches in eine Horizontalebene ausarten kann. *Erste Begleitgerade ist die Netzgerade in der Vertikalebene des Kegelschnitts.* Sie wird akzessorisch, wenn die Vertikalebene die singuläre Gerade des Nichthorizontalgebüsches enthält (parallel zur yz-Ebene ist).

Zweite Begleitgerade ist die Vertikalerzeugende auf dem Netzparaboloid. Die Horizontalebenen sind daher als diejenigen kubischen Flächen zweiter Art zu bezeichnen, deren einzige Gerade zweiter Art akzessorisch ist.

Ganz im akzessorischen Gebiet verlaufen $2 \cdot \infty^1$ Kegelschnitte. Diese können daher nicht durch zwei Gleichungen in (x, y, z) dargestellt werden. In der Darstellung $(\mathfrak{g}\, x) = 0$, $(x\, p) = 0$ ist

1. $\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 = 0 : 0 : 1$. Nur die erste Begleitgerade ist akzessorisch.
2. $p^1 : p^2 : p^3 = 0 : 1 : 0$. Nur die zweite Begleitgerade ist akzessorisch.

Dringt dagegen der Kegelschnitt ins eigentliche Gebiet ein, so hat er zwei akzessorische Punkte. Diese können zusammenfallen. Das tritt ein in drei Fällen, die wir aus § 17 bereits kennen:

1. Nur die erste Begleitgerade ist akzessorisch: Der Kegelschnitt erscheint als Gerade im Nichthorizontalgebüsch.

2. Nur die zweite Begleitgerade ist akzessorisch. Der Kegelschnitt erscheint als Gerade im Horizontalgebüsch.

3. Beide Begleitgerade sind akzessorisch: Der Kegelschnitt erscheint als Durchmesser aller Netzparaboloide.

Ein Kegelschnitt erscheint also nur dann der affinen Auffassung als gerade Linie, wenn er das akzessorische Gebiet berührt.

Entsprechend sind die übrigen Geraden affiner Anschauung Kurven dritter Ordnung, für die die drei akzessorischen Punkte in einen einzigen zusammenfallen.

§ 20.

Jetzt soll noch die Frage beantwortet werden, welche Rolle im Cremonaraum diejenigen Kurven spielen, die den *Elementvereinen* in der Ebene entsprechen.

Sei

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

eine analytische Kurve im Cremonaraum. Es ist dann nicht gleichzeitig $x' \equiv 0$, $y' \equiv 0$, $z' \equiv 0$.

Für

$$x'y'' - x''y' \equiv 0, \quad z'(zx - y)'' - z''(zx - y)' \equiv 0$$

liegt eine Gerade erster Art oder eine Gerade zweiter Art, oder ein irreduzibler Kegelschnitt vor.

An die Stelle des Begriffes der Berührungsgeraden tritt hier der des *Berührungskegelschnittes*. In der Tat bestimmen zwei getrennte Kurvenpunkte im allgemeinen einen einzigen Verbindungskegelschnitt, und abgesehen von den Fällen, wo die Kurve eine Gerade ist, strebt dieser Kegelschnitt einer Grenzlage zu, wenn man den einen der beiden Kurvenpunkte gegen den andern hereinrücken läßt. Der Berührungskegelschnitt im Kurvenpunkt t hat nun die Gleichungen

$$-y'(t)\cdot x + x'(t)\cdot y + x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t) = 0,$$

$$-\{z'(t)\,x(t) + z(t)\,x'(t) - y'(t)\}\,z + \{z'(t)\,y(t) + z(t)\,\langle z(t)\,x'(t) - y'(t)\rangle\} + z'(t)\,\{z\,x - y\} = 0.$$

Er ist reduzibel überall da, wo

$$z\,x' - y' = 0$$

ist und nur dort. Damit läßt sich aussprechen:

Die krummen Linien im Cremonaraum, die Bildkurven von Elementvereinen sind, sind diejenigen, deren sämtliche Berührungskegelschnitte reduzibel sind.

Es ist trivial, daß diese Kurven sich sämtlich angeben lassen:

$$x = t,\quad y = f(t),\quad z = f'(t) \qquad (f''(t) \not\equiv 0).$$

Für $f''(t) \equiv 0$ ergeben sich Kurven vierter Ordnung, die Bildkurven von Elementvereinen auf den Steilparabeln von § 5 sind.

Bildet man eine solche Kurve vermöge der Lieschen Abbildung I auf die Ebene ab ($x = t$, $\mathfrak{y} = f(t)$, $\mathfrak{p} = f'(t)$, und diesen Verein vermöge der Lieschen Abbildung II auf den Raum, so erhält man für $f''(t) \not\equiv 0$ alle krummen Kurven des Gewindes $X_{03} + X_{12} = 0$, in der Darstellung

$$x = t,\quad y = \tfrac{1}{2} f'(t),\quad z = f(t) - \tfrac{1}{2} t f'(t),$$

(die noch etwas verbessert werden kann). Für $f''(t) \equiv 0$ werden so die geraden Linien des Gewindes geliefert, *aber nicht alle*. Wenn Lie diese Darstellung der Gewindekurven gekannt hätte, so würden wir zu dem Schluß berechtigt sein, daß er von der Abbildung I ausgehend an dieser Stelle zur Abbildung II gelangt sei.

Angesichts der Formeln in Geometrie der Berührungstransformationen S. 236, wo Lie zur Darstellung der Gewindekurven nicht weniger als fünf willkürliche Funktionen und eine Irrationalität einführt, kann die obige Vermutung aber nicht aufrecht erhalten werden.

(Eingegangen am 29. Oktober 1936.)

The inversion of the Laplace transformation by a direct expansion in series and its application to boundary-value problems.

By

R. V. Churchill (University of Michigan) at Freiburg i. B.

§ 1.

Introduction.

The one-sided Laplace transformation of a function $F(t)$,

$$\mathfrak{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s), \tag{1}$$

transforms the operation of differentiation of $F(t)$ into an algebraic operation on $f(s)$ in the following way:

$$\mathfrak{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0), \tag{2}$$

where the indices in parentheses denote derivatives [1]). This gave rise to an important method (used by Doetsch [2]) since 1923) of solving linear boundary-value problems in partial differential equations; for if the transformation can be applied to the unknown function with respect to one of the independent variables, the problem in the transformed function does not involve derivatives with respect to that variable. A two-dimensional problem is thus transformed [3]) into one in ordinary diffe-

[1]) For conditions under which this property of the transformation is valid see G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Annalen 89 (1923), 192—207 [p. 198, Theorem III]. Here the Laplace transformation of $F^{(n)}(t)$ is assumed absolutely convergent; only simple convergence is used in Doetsch's more recent derivation of this property: Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 4 (1935), 71—84 [Lemma 2].

[2]) See for instance the series of papers: G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. 22 (1925), 285—292; 293—306; 25 (1926), 608—626; 26 (1927), 89—98; 28 (1928), 567—578. In the first and fourth papers of this series F. Bernstein is a co-author. Also see other references in G. Doetsch, Les équations aux dérivées partielles du type parabolique. L'Enseignement Mathématique 35 (1936), 43—87 [p. 86, bibliography].

[3]) A discussion of the hypotheses on which such transformations of boundary-value problems depend is given in the last paper under [2]); also in G. Doetsch, Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung. — Festschrift d. Techn. Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts. Verlag Springer, 1929, pp. 56—78.

rential equations involving a parameter s. The solution of the original problem is obtained by applying the inverse of the Laplace transformation to the solution of the transformed problem. This is usually the most difficult step in the process; it is this step which concerns us in this paper.

The inversion process with which we are principally concerned here is one which expresses the inverse $\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$ of the Laplace transformation in a series [4]). Representations of this general character have usually been written, especially in electrical engineering, by the formal process of expanding $f(s)$ in some series and applying the operator $\mathfrak{L}^{-1}$ term-wise, but this method leads to incorrect results in many cases when the series is infinite [5]).

The particular series which is shown here to represent $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$, for functions $f(s)$ of a certain class, is a somewhat generalized form of the Heaviside expansion formula [6]). It is important to have usable sets of conditions on $f(s)$ under which this series expansion is valid, for here too it frequently happens that a formal application of this series fails to give the inverse transformation.

In order to establish the direct expansion of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ in series we employ here a well-known expression for this transformation as an integral in the complex plane of the variable s. It was found possible to improve upon the already known conditions on $f(s)$ which are sufficient for this integral representation. These new conditions are established in § 2. They are used in § 3 to establish the series representation under different sets of conditions. The two sets of conditions which are most useful in solving boundary-value problems are given in Theorems 4 and 5. In § 4 the inverse transformations of two particular functions are found with the help of the expansion in series, and these are used in § 5 to find a simple solution of a problem in the forced displacements in a bar.

---

[4]) Concerning asymptotic representations of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ for large values of t see G. Doetsch, Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. **167** (1932), 274—293 [p. 286 ff.]. This paper also contains some interesting observations on the inversion of the Laplace transformation by means of the integral in the complex plane [pp. 278, 279].

[5]) Such a process, together with a method of verifying the results, is illustrated by R. V. Churchill, Temperature distribution in a slab of two layers. Duke Math. Journ. **2** (1936), 405—414.

[6]) Relations between the methods of operational calculus and functional transformations are discussed in G. Doetsch, Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül), Jahresber. D. M. V. **48** (1934). 238—251, and in other papers cited there.

§ 2.

Sufficient conditions for representing $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ by an integral.

The inverse Laplace transformation of a function $f(s)$,

$$\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t),$$

is a function $F(t)$[7]) which satisfies the integral equation

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt. \tag{3}$$

Conditions under which $f(s)$ is representable in the form (3), together with an expression for $F(t)$ in terms of $f(s)$, where published in 1920 by M. Fujiwara[8]). But his proof assumes that $f(s)$ satisfies some conditions not stated in his theorems. Instead of following Fujiwara's method of proof throughout, after stating the complete set of conditions used, it is simpler to give the theorem and proof in the following form, proposed to the author by G. Doetsch:

Theorem 1. *Let $f(s)$ satisfy the following conditions:*

1° *$f(s)$ is analytic in the half-plane $\Re(s) > \alpha$, where α is a real constant.*

2° *For a fixed $\gamma > \alpha$*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz$$

converges uniformly in each finite interval $0 \leqq t \leqq T$.

3° $\lim\limits_{\omega \to \infty} \int\limits_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} \frac{|f(z)|}{1 + |z|} |dz|$ *converges.*

4° $|f(s)|$ *is bounded in $\Re(s) \geqq \gamma$.*

5° $\lim\limits_{\sigma \to \infty} |f(\sigma + \omega i)| = 0$ *uniformly for all ω.*

Then for all s with $\Re(s) > \gamma$ it follows that

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

where

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - \omega i}^{\gamma + \omega i} e^{tz} f(z)\, dz. \tag{4}$$

---

[7]) Concerning the uniqueness of $F(t)$ see Lerch, Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel, Acta Math. 27 (1903), 339—351.

[8]) M. Fujiwara, Über Abelsche erzeugende Funktion und Darstellbarkeitsbedingung von Funktionen durch Dirichletsche Reihen, The Tôhoku Math. Journ. 17 (1920), 363—383, [Theorems I and II].

As a result of the uniform convergence assumed in 2^0 it follows that

$$\int_0^T e^{-st} F(t)\,dt = \int_0^T e^{-st}\,dt \left\{ \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz} f(z)\,dz \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{1-e^{-(s-z)T}}{s-z} f(z)\,dz\ ^9).$$

According to the hypothesis 3^0 this limit converges uniformly in T for all $T > 0$, for

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \left| \frac{1-e^{-(s-z)T}}{s-z} \right| |f(z)\,dz| \leqq \lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{2|f(z)|}{|z-s|} |dz|,$$

and for each s a sufficiently large $|\omega|$ can be found, say Ω, such that for $|\omega| \geqq \Omega$ this integrand is less than $\frac{4|f(z)|}{|z|+1}$. The limit as $T \to \infty$ can thus be taken under the integral sign:

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{f(z)}{s-z}\,dz.$$

To show that this last limit is $f(s)$ under the hypotheses stated apply the theorem of Cauchy, integrating $\frac{f(z)}{s-z}$ around the rectangle with vertices $\gamma+\omega i$, $\gamma-\omega i$, $\omega-\omega i$, $\omega+\omega i$. Let a fixed Ω be chosen so large that $|f(s)| < \varepsilon$ to the right of the line $\Re(z) = \Omega$; this is possible according to 5^0. Then for the integral along the right-hand side of the rectangle it follows that, for $\omega > \Omega$,

$$\left| \int_{\omega-\omega i}^{\omega+\omega i} \frac{f(z)}{s-z} dz \right| < \varepsilon \frac{2\omega}{\omega - \Re(s)}.$$

Along the segment of the upper side to the right of the line $\Re(z) = \Omega$

$$\left| \int_{\omega+\omega i}^{\Omega+\omega i} \frac{f(z)}{s-z} dz \right| \leqq \varepsilon \frac{\omega-\Omega}{\omega - \Im(s)};$$

---

9) The Cauchy principal value can be written as an infinite integral:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{tz} f(z)\,dz = i \int_0^\infty [e^{t(\gamma+\omega i)} f(\gamma+\omega i) + e^{t(\gamma-\omega i)} f(\gamma-\omega i)]\,d\omega.$$

and along the remaining portion of the upper side,

$$\left| \int_{\Omega+\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{f(z)}{s-z} dz \right| \leqq M \frac{\Omega-\gamma}{\omega-\Im(s)}$$

where M is an upper bound of $|f(s)|$ in $R(s) \geqq \gamma$ (condition 4°); similarly for the integration over the two portions of the lower side. Hence by first selecting Ω sufficiently large and then taking ω large enough the integrals over these three sides of the rectangle can be made less than any fixed $\varepsilon' > 0$. Since

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-s} dz = f(s)$$

when the integral is taken around any rectangle with s in its interior, it follows that

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} \frac{f(z)}{s-z} d(z) = f(s)$$

and the theorem is proved.

It should be observed that *a necessary condition in order that* $f(s)$ *shall have a real inverse transformation* $F(t)$ *is that*

$$f(\bar{s}) = \overline{f(s)},$$

where the bar denotes the conjugate complex number. This follows immediately from the representation (3) of $f(s)$ as an integral. Hence if $F(t)$ is real, as is the case in the applications to boundary-value problems, we can write

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma-\omega i}^{\gamma+\omega i} e^{st} f(s) ds = 2i \int_0^\infty \Re\left[e^{t(\gamma+\omega i)} f(\gamma+\omega i)\right] d\omega.$$

The three conditions 3°, 4°, 5° in Theorem 1 can be replaced by the single condition that *for some fixed* $k > 0$, $|s^k f(s)|$ *is bounded in* $\Re(s) \geqq \gamma$. This is simpler to use, but more restrictive.

The following is an important special case of Theorem 1.

Theorem 2. *Let* $f(s)$ *be analytic in the half-plane* $\Re(s) > \alpha$, *and for a fixed* $\gamma > \alpha$ *let*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma+\omega i)| d\omega$$

be convergent. Also let $|f(s)|$ *be bounded in* $\Re(s) \geqq \gamma$ *and* $\lim_{\sigma \to \infty} |f(\sigma+\omega i)| = 0$ *uniformly for all* ω. *Then for each* s *such that* $\Re(s) > \gamma$,

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

where

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} e^{tz} f(z)\, dz.$$

The assumption of absolute convergence here insures the uniform convergence of the integral in condition 2°, Theorem 1, for whe $z = \gamma + \omega i$,

$$|e^{tz} f(z)| \leqq e^{T|\gamma|} |f(\gamma + \omega i)|.$$

The other conditions in Theorem 1 are clearly satisfied.

The conditions here are much simpler than those in Theorem 1. Bu the condition of absolute convergence of the infinite integral here is muc narrower than the condition 2° of Theorem 1, that the Cauchy principa value of the integral converge uniformly.

Sufficient conditions for the inversion in the form of a comple integral have also been established by Tamarkin[10]). His second set o conditions form a special case of those in Theorem 2; he assumes tha $\alpha \geqq 0$ and that $|f(s)|$ approaches zero uniformly in $\Re(s) \geqq \gamma$ as $|s$ becomes infinite[11]).

§ 3.

Sufficient conditions for representing $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ by a series.

A direct expansion of the inverse Laplace transformation in serie will now be established from the integral form (4). The series is mor appropriate in many problems than the integral.

Theorem 3. *Let $f(s)$ be analytic in the half-plane $\Re(s) \geqq \gamma$ an admit (on the line $\Re(s) = \gamma$) the integral form (4) of its inverse Laplac transformation; also let its singular points consist only of poles s_m of order σ_m If there is a fixed number $k > 0$ for which $|s^k f(s)|$ is bounded at al points (in $\Re(s) \leqq \gamma$) on some sequence of circles $|s| = \varrho_n$, where ϱ_n be comes infinite with n, then*

$$(5) \qquad \mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{s_m t} \sum_{p=1}^{\sigma_m} A_{mp}\, t^{p-1}/(p-1)! \qquad \text{for } t > 0.$$

---

[10]) J. D. Tamarkin, On Laplace's integral equations, Trans. Am. Math. Soc 28 (1926), 417—425. One of the conditions in his first set is that the order o integration can be interchanged in the iterated infinite integral.

[11]) The class of analytic functions $f(s)$ which can be represented as Laplac transforms $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$ with F expressed as a complex integral can be exactl determined by function-theoretic conditions, if one assumes F to be integrable i the p^{th} power ($p > 1$) in the Lebesgue sense and if one replaces simple conver gence of the complex integral by convergence in the mean, as is shown in recent paper by G. Doetsch, Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktio als Laplace-Integral und eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation, Math Zeitschr. 42 (1937).

The numbers A_{mp} are coefficients in the Laurent expansion of $f(s)$ about the pole s_m:

$$f(s) = \sum_{p=1}^{\sigma_m} A_{mp}/(s - s_m)^p + \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}(s - s_m)^n, \tag{6}$$

and the terms in the series (5) which correspond to poles lying between two consecutive circles $|s| = \varrho_{n-1}$ and $|s| = \varrho_n$ are grouped as a single term.

When the terms of the series (6) are multiplied by e^{st} it is readily seen that the residue of $e^{st}f(s)$ at the pole s_m is

$$e^{s_m t} \sum_{p=1}^{\sigma_m} A_{mp} t^{p-1}/(p-1)!.$$

Put $s = \varrho e^{i\vartheta}$ and let C_n denote that arc of the circle $\varrho = \varrho_n$ which lies to the left of the line $\Re(s) = \gamma$; also let P_n denote the segment of this line intercepted by the circle. Then according to the Cauchy theorem of residues

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathsf{P}_n)} e^{st} f(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_n)} e^{st} f(s)\,ds = \sum_{m=1}^{m_n} e^{s_m t} \sum_{p=1}^{\sigma_m} A_{mp} t^{p-1}/(p-1)!, \tag{7}$$

where m_n is the number of poles within $\varrho = \varrho_n$, and the sense of the integration is positive.

The second integral in (7) approaches zero as n becomes infinite, for $t > 0$. For if M is an upper bound of $|s^k f(s)|$ corresponding to a fixed $k > 0$ for all points on the arcs C_n, then

$$\left|\int_{(C_n)} f(s)\,e^{st}\,ds\right| \leqq \varrho_n \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\frac{3\pi}{2}+\vartheta_n} |f(\varrho_n e^{i\vartheta})|\, e^{t\varrho_n \cos\vartheta}\,d\vartheta \leqq \varrho_n^{1-k} M \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\frac{3\pi}{2}+\vartheta_n} e^{t\varrho_n\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

where

$$\vartheta_n = \arcsin\frac{\gamma}{\varrho_n} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta_n < \frac{\pi}{2}\right).$$

The last member of this inequality can be written

$$J = 2\varrho_n^{1-k} M \int_{\frac{\pi}{2}-\vartheta_n}^{\pi} e^{t\varrho_n\cos\vartheta}\,d\vartheta = 2\varrho_n^{1-k} M \int_{-\vartheta_n}^{\pi/2} e^{-t\varrho_n\sin\vartheta}\,d\vartheta.$$

Suppose first that $\gamma \leqq 0$. Since $\sin\theta > \theta/2$ when $0 < \theta < \pi/2$, the

$$J < 2\varrho_n^{1-k} M \int_{-\theta_n}^{\pi/2} e^{-t\varrho_n \theta/2}\, d\theta = \frac{4M}{t\varrho_n^k}\left(e^{t\varrho_n \theta_n/2} - e^{-t\varrho_n \pi/4}\right).$$

But $\varrho_n \theta_n \to \gamma$ as $n \to \infty$ and hence $J \to 0$ as $n \to \infty$, $(\gamma \leqq 0)$. When $\gamma > 0$ the integral J can be written

$$J = 2\varrho_n^{1-k} M \left(\int_0^{\pi/2} e^{-t\varrho_n \sin\theta}\, d\theta + \int_0^{\theta_n} e^{t\varrho_n \sin\theta}\, d\theta\right)$$

and since $\theta/2 < \sin\theta < \theta$ when $0 < \theta < \pi/2$,

$$J < 2\varrho_n^{1-k} M \left(\int_0^{\pi/2} e^{-t\varrho_n \theta/2}\, d\theta + \int_0^{\theta_n} e^{t\varrho_n \theta}\, d\theta\right)$$

$$= 2M\left(1 - 2e^{-t\varrho_n \pi/4} + e^{t\varrho_n \theta_n}\right)/(t\varrho_n^k).$$

Hence $J \to 0$ as $n \to \infty$, $(\gamma > 0)$, so

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(C_n)} e^{st} f(s)\, ds = 0 \qquad \text{for } t > 0$$

Since the first integral in (7) converges to $\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$ as n becomes infinite according to the conditions in the theorem, the sum on the right also converges to this value and the theorem is proved.

The sum in the right-hand member of (7) contains just those terms which correspond to the poles of $f(s)$ lying inside the circle $\varrho = \varrho_n$, so if the resulting series is infinite it converges to $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ when the terms are grouped according to these circles.

To show then that the inverse Laplace transformation of a given function $f(s)$ is represented by the series (5) for this function, it is sufficient to show that $f(s)$ satisfies the conditions of Theorem 1 (or Theorem 2), and those in Theorem 3 which deal with the character of $f(s)$ in $\Re(s) \leqq \gamma$ [12]). A much simpler but more restrictive set of conditions can be stated as follows:

Theorem 4. *If $f(s)$ is analytic in the half-plane $\Re(s) \geqq \gamma$ and its singularities are all poles, and if for some fixed $k > 1$ it is true that $|s^k f(s)|$ is bounded in this half-plane and at all points on some sequence of circles $|s| = \varrho_n$ where ϱ_n becomes infinite with n, then the series (5) convergens to $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ when the terms are grouped as specified in Theorem 3.*

If M is an upper bound of $|s^k f(s)|$ in $\Re(s) \geqq \gamma$ then

$$|f(\sigma + \omega i)| \leqq M/(\sigma^2 + \omega^2)^{k/2} \leqq M/|\sigma|^k,$$

[12]) It is of interest to note that when the conditions of Theorem 1 and those of Theorem 3 with $k > 1$ are satisfied, the series (5) also converges for $t = 0$.

and since $k > 1$ the conditions in Theorem 2 are satisfied. All conditions in Theorem 3 are clearly satisfied so Theorem 4 is established.

By employing rectangles instead of circular segments the following useful conditions can be shown to be sufficient:

Theorem 5. *Let $f(s)$ satisfy the conditions:*

1^0 *$f(s)$ is analytic everwhere except in the strip $\mu < \Re(s) < \gamma$, and its singular points consist only of poles.*

2^0 *For some fixed $k > 1$, $|s^k f(s)|$ is bounded in $\Re(s) \geqq \gamma$.*

3^0 *$|f(s)|$ is bounded in $\Re(s) \leqq \mu$.*

4^0 *For some system of horizontal lines $\Im(s) = \pm \omega_n$, where ω_n becomes infinite with n, it is true that $\lim_{n \to \infty} |f(\sigma \pm \omega_n i)| = 0$ uniformly for all $\sigma \leqq \gamma$.*

Then the series (5) *converges for $t > 0$ to $\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$ provided its terms which correspond to the poles in each pair of strips $\omega_n < \Im(s) < \omega_{n+1}$ and $-\omega_{n+1} < \Im(s) < -\omega_n$ are grouped as a single term.*

The integral of $e^{st} f(s)/2\pi i$ in the positive direction around the contour of the rectangle with vertices $\gamma + \omega_n i$, $-\omega_n + \omega_n i$, $-\omega_n - \omega_n i$, $\gamma - \omega_n i$ is the sum of the residues represented by the right-hand member of (7), where m_n is the number of poles within the rectangle. The integral along the upper side approaches zero as $n \to \infty$ since, according to 4^0, for any $\varepsilon > 0$ a number N can be found such that

$$\left| \int_{\gamma + \omega_n i}^{-\omega_n + \omega_n i} e^{st} f(s)\, ds \right| \leqq \int_{-\omega_n}^{\gamma} e^{\sigma t} |f(\sigma + \omega_n i)|\, d\sigma \leqq \varepsilon \frac{e^{\gamma t} - e^{-\omega_n t}}{t} < \varepsilon e^{\gamma t}/t$$

for $n > N$. Similarly for the integral along the lower side of the rectangle. The integral along the left hand side also approaches zero as $n \to \infty$:

$$\left| \int_{-\omega_n - \omega_n i}^{-\omega_n + \omega_n i} e^{st} f(s)\, ds \right| \leqq e^{-\omega_n t} \int_{-\omega_n}^{\omega_n} |f(-\omega_n + \omega i)|\, d\omega \leqq 2M \omega_n e^{-\omega_n t} < \varepsilon'$$

for n sufficiently large, where M is an upper bound of $|f(s)|$ in $\Re(s) \leqq \mu$ (condition 3^0).

The contour integral therefore approaches

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \omega_n i}^{\gamma + \omega_n i} e^{st} f(s)\, ds$$

when n is large. As $n \to \infty$ this integral converges to $\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\}$ under the hypotheses 1^0 and 2^0 (this can be seen from Theorem 2), so it follows that the series (5) for $t > 0$ converges to $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ when the terms are grouped as stated in the theorem.

Some of the conditions given in this theorem are more restrictive than necessary for this type of proof; they are so written to simplify the theorem and still cover an important group of functions which appear in boundary-value problems. The condition in 1^0 for instance, that all poles of $f(s)$ lie to the right of a line $\Re(s) = \mu$, can be removed if the vertical lines which form the left-hand sides of the rectangles are properly specified and if 3^0 is stated for all points on these lines. Condition 2^0 can also be replaced by the less restrictive conditions for the representation of $\mathfrak{L}^{-1}\{f\}$ in the integral form (4). On the other hand, *the three conditions* 2^0, 3^0, 4^0 *can be replaced by this sufficient condition: that for some* $k > 1$, $|s^k f(s)|$ *is bounded at all points in the two half-planes* $\Re(s) \geqq \gamma$, $\Re(s) \leqq \mu$ *and on the lines* $\Im(s) = \pm \omega_n$.

When the poles s_m *of* $f(s)$ *are all simple with residues* A_m *the expansion formula* (5) *reduces to*

$$\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{s_m t} \qquad (t > 0). \tag{8}$$

§ 4.

The inverse transformations of two special functions.

Functions involving the ratios of $\sinh \alpha s$ and $\cosh \beta s$ are prominent in the solution of the Laplace transformation of the wave equation; this will be illustrated in § 5. Simple formulas for the inverse transformations of some of these can be given with the aid of the above expansion formula.

Consider the function

$$q(s) = \frac{\sinh \alpha s}{s^3 \cosh \beta s} \qquad (|\alpha| < \beta), \tag{9}$$

where α und β are real and β can be considered positive. The singular points are the simple poles $s = 0$ and $s = s_m = \lambda_m i/\beta$, where

$$\lambda_m = (2m - 1)\pi/2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Hence $q(s)$ is analytic in the half-plane $\Re(s) \geqq \gamma$ where γ is any positive constant, (and also in $\Re(s) \leqq \mu$ where $\mu < 0$). In $\Re(s) \geqq \gamma$, $|s^2 q(s)|$ is bounded since

$$|s^2 q(s)| = \left| \frac{e^{-(\beta - \alpha)s} - e^{-(\beta + \alpha)s}}{1 + e^{-2\beta s}} \right| < \frac{2}{1 - e^{-2\beta\gamma}}.$$

The sequence of circles of Theorem 4 can be taken as $|s| = n\pi/\beta$, $(n = 1, 2, \ldots)$. When the value of $|s^2 q(s)|^2$ at points on these circles is written by putting $s = n\pi e^{i\theta}/\beta$, it can be shown by elementary processes that this function is bounded for any method of variation of the independent variables n and θ. $q(s)$ therefore satisfies the conditions in Theorem 4.

It is easier in this case to show that the function satisfies the conditions in Theorem 5. In $\Re(s) \leqq \mu < 0$,

$$|s^2 q(s)| = \left| \frac{e^{(\alpha+\beta)s} - e^{(-\alpha+\beta)s}}{e^{2\beta s}+1} \right| < \frac{2}{1-e^{2\beta\mu}}$$

so the condition 3^0 is satisfied. On the lines $\Im(s) = \pm n\pi/\beta$, $s = \sigma \pm in\pi/\beta$ and when $\sigma \leqq \gamma$,

$$|q(s)| \leqq \frac{e^{\alpha\sigma} + e^{-\alpha\sigma}}{|s|^2 (e^{\beta\sigma} + e^{-\beta\sigma})} < \frac{e^{(\beta+\alpha)\gamma} + e^{(\beta-\alpha)\gamma}}{\omega_n^3}$$

so that 4^0 is satisfied. It was shown above that the other conditions in Theorem 5 are fulfilled by $q(s)$.

According to the expansion (8) then

$$\mathfrak{L}^{-1}\{q(s)\} = \alpha + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha s_m) e^{s_m t}}{\beta s_m^3 \sinh(\beta s_m)}$$

$$= \alpha + 2\beta \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin(\lambda_m \alpha/\beta) \cos(\lambda_m t/\beta)/\lambda_m^2,$$

where $\lambda_m = (2m-1)\pi/2$. The terms corresponding to poles with opposite signs have been grouped according to Theorem 3 (and also Theorem 5). This series can be written in the form

$$(10) \quad \mathfrak{L}^{-1}\{q(s)\} = \alpha + \beta \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left[\sin \frac{\lambda_m(\alpha - t)}{\beta} + \sin \frac{\lambda_m(\alpha+t)}{\beta} \right] \Big/ \lambda_m^2,$$

which can be recognized as the sum of two simple Fourier series. When $\alpha = x/c$ and $\beta = l/c$ ($l > 0$, $c > 0$) formula (10) can be written

$$(11) \quad \mathfrak{L}^{-1}\left\{ \frac{\sinh(sx/c)}{s^2 \cosh sl/c)} \right\} = \frac{x}{c} - \frac{1}{2c}[G(x-ct) + G(x+ct)], \qquad |x| < l$$

where $G(u)$ is the broken line function defined by the series

$$(12) \quad G(u) = \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi u}{2l}$$

or by the conditions

$$(13) \quad G(u) = -G(-u) = G(u+4l), \quad G(u) = \begin{cases} u & \text{if } 0 \leqq u \leqq l, \\ 2l-u & \text{if } l \leqq u \leqq 2l. \end{cases}$$

According to the differentiation property (2),

$$sq(s) - Q(0) = \mathfrak{L}\{Q'(t)\}$$

where $Q(t)$ is the right-hand member of (11). Since $Q(0) = 0$ it follows that

$$\mathfrak{L}^{-1}\{sq(s)\} = Q'(t)$$

and the second special inversion of importance can be written

$$(14) \quad \mathfrak{L}^{-1}\left\{ \frac{\sinh(sx/c)}{s\cosh(sl/c)} \right\} = \frac{1}{2}[H(x-ct) - H(x-ct)] \qquad |x| < l,$$

where the broken line function $H(u) = G'(u)$ is defined by the condition

$$(15) \quad H(u) = H(-u) = H(u+4l), \quad H(u) = \begin{cases} 1 \text{ if } 0 < u < l, \\ -1 \text{ if } l < u < 2l. \end{cases}$$

The inversion (14) can be verified by applying $\mathfrak{L}$ to both members an performing the integration.

The expansion (5) gives a similar inversion formula for the functio

$$\frac{\cosh(s\,x/c)}{s^2 \sinh(s\,l/c)}$$

which has a pole of the third order at $s = 0$. This function arises i the problem of forced displacements in a stretched string.

§ 5.

A problem of displacements in a bar.

The Laplace transformation and the results of the last section ca be used to find a simple formula for the longitudinal displacements in prismatic bar with one end fixed and a variable force acting on the othe end. Let the origin be taken in the fixed end and let $Y(x, t)$ be th displacement along the bar at time t of a point originally at a distance from this end. If l denotes the length of the bar and c^2 the usu elastic coefficient, then

$$(16) \qquad Y_{tt} = c^2 Y_{xx} \qquad (0 < x < l$$

$$(17) \qquad \lim_{t \to 0} Y(x, t) = \lim_{t \to 0} Y_t(x, t) = 0,$$

$$(18) \qquad \lim_{x \to 0} Y(x, t) = 0, \quad \lim_{x \to l} Y_x(x, t) = F(t),$$

where $F(t)$ is proportional to the force acting on the end $x = l$.

Let $y(x, s)$ be the Laplace transform, with respect to t, o $Y(x, t)$. The application of $\mathfrak{L}$ to (16) and (18) gives, in view of (2) an (17), these corresponding conditions[13]) on $y(x, s)$:

$$s^2 y(x, s) = c^2 y_{xx}(x, s),$$

$$\lim_{x \to 0} y(x, s) = 0, \quad \lim_{x \to l} y_x(x, s) = f(s),$$

where $f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}$. This is a boundary-value problem in ordinar differential equations with the parameter s. Its solution is

$$y(x, s) = c\, f(s) \frac{\sinh(s\,x/c)}{s \cosh(s\,l/c)},$$

---

[13]) According to these steps we are seeking a solution whose second derivati in t has a Laplace transformation and for which the derivatives and limits wi respect to x involved here are commutable with respect to the transformation See the papers cited under [3]) for a further examination of such steps.

so the displacement is

$$Y(x,t) = c\,\mathfrak{L}^{-1}\left\{f(s)\frac{\sinh(s\,x/c)}{s\cosh(s\,l/c)}\right\}. \tag{19}$$

The inverse transformation of the product of two functions is given in the following way by the composition (Faltung) integral[14]): if

$$\mathfrak{L}^{-1}\{f_1(s)\} = F_1(t) \quad \text{and} \quad \mathfrak{L}^{-1}\{f_2(s)\} = F_2(t)$$

then

$$\mathfrak{L}^{-1}\{f_1(s)\,f_2(s)\} = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t F_1(t-\tau)\,F_2(\tau)\,d\tau.$$

By applying this to the inversion in (19) and noting that $\mathfrak{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ while the inversion of the second factor is given by (14), the displacement is found to be

$$Y(x,t) = \frac{c}{2}\int_0^t F(\tau)\,[H(x-ct+c\tau) - H(x+ct-c\tau)]\,d\tau \tag{20}$$

where the function $H(u)$ is defined by the conditions (15). This can be written

$$Y(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x} F\left(\frac{ct+u-x}{c}\right)H(u)\,du - \frac{1}{2}\int_{x}^{x+ct} F\left(\frac{ct-u+x}{c}\right)H(u)\,du, \tag{21}$$

and in this form the integrals can be expanded to show that the conditions (16) to (18) are satisfied[15]).

It is of interest to note that if the force is constant, $F(t) = K$, the displacement formula becomes

$$Y(x,t) = K\,x - \frac{K}{2}\,[G(x-ct) + G(x+ct)].$$

It follows from the description (13) of $G(u)$ that $G(l-ct) = G(l+ct)$, and hence at the end $x = l$

$$Y(l,t) = K\,[l - G(l+ct)]$$

which is the simple vibration expected.

---

[14]) Conditions on F_1 and F_2 under which the composition theorem is valid are given in the second paper cited under [1]). Conditions on f_1 and f_2 for the validity of the above form of the theorem are given by W. v. Koppenfels, Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Annalen **105** (1931), 694—706.

[15]) The inversion process used by Doetsch in the second paper cited under [3]) can also be used here; it expresses the displacement by means of a finite series in which the number of terms depends on the values of x and t.

(Eingegangen am 9. November 1936.)

Zur Theorie der Bogen n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n.

Zweite Mitteilung.

Von

Ilse Sauter in Nürnberg.

Einleitung.

In der ersten Mitteilung wurde unter anderem ein Kriterium dafür angegeben, daß die Summe zweier „gewöhnlich differenzierbar" (= „glatt", vgl. I, Nr. 1, 4[1]) aneinandergesetzter Bogen n-ter Ordnung im Ansatzpunkt wieder von n-ter Ordnung ist. In der vorliegenden zweiten Mitteilung wird (§ 1) dieses Anfügungskriterium erweitert zu dem Satze, daß bei „glattem" Aneinandersetzen zweier Bogen n-ter Ordnung für den Ansatzpunkt F nur die Ordnung n oder $(n+1)$ auftreten kann entsprechend den beiden Fällen der Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung von vorderem und hinterem n-dimensionalem Tangentialschmieghalbraum in F an die Bogensumme. Sodann wird (§ 2) allgemeiner der Fall betrachtet, daß zwei Bogen n-ter Ordnung „differenzierbar" (vgl. I, Nr. 1, 4) aneinandergesetzt sind. Hierbei wird aber nicht die Ordnung der Bogensumme $\mathfrak{S}$ im Ansatzpunkte F untersucht[2]), sondern die Menge der Schmiegräume in F an $\mathfrak{S}$. Es ergibt sich, daß Eindeutigkeit des k-dimensionalen Schmiegraumes in F (dann und) nur dann besteht, wenn vorderer und hinterer ν-dimensionaler Tangentialschmieghalbraum in F an $\mathfrak{S}$ übereinstimmen für $\nu = 1, \ldots, k$; $1 \leqq k \leqq n-1$. Die Voraussetzung der Differenzierbarkeit des Ansatzpunktes kann noch durch eine etwas schwächere ersetzt werden, vgl. Nr. 2, 6.

Ein entsprechender Satz gilt auch für die Schmieg*halb*räume in F. Ein Sonderergebnis ist die Stetigkeit, genauer die einseitige Stetigkeit der Schmiegräume bzw. Schmieghalbräume in jedem Punkte eines Bogens n-ter Ordnung (vgl. diese Mitteilung, Nr. 2, 4). Dieser letztgenannte

[1]) Erste Mitteilung zitiert mit I. Die Literaturhinweise beziehen sich, soweit nicht anders angegeben, auf das am Schlusse der 1. Mitteilung befindliche Literaturverzeichnis. Die dort erwähnte Arbeit Scherk (1) ist inzwischen in Math. Ann. 112 Heft 5 (1936) erschienen.

[2]) Herr Denk hat diese Frage in seiner Note Denk (1) beantwortet und wird demnächst ausführliche Beweise veröffentlichen.

Stetigkeitssatz ist bereits im Jahre 1914 von Herrn Hjelmslev in seiner grundlegenden Arbeit (Hjelmslev (2)) bewiesen worden[3]).

Aus dem Stetigkeitssatz folgt, daß ein Bogen n-ter Ordnung im R_n überall gewöhnlich differenzierbar ist mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten. Diese Bemerkung findet sich bereits bei Herrn Hjelmslev (Hjelmslev (2) 1914, S. 74 ohne näher ausgeführten Beweis). Ein Beweis wurde ohne Kenntnis der Hjelmslevschen Arbeit von Herrn Haupt angegeben (Sitz. Berichte der bayer. Akad. d. Wissensch. 1934, II. S. 191—193).

Vorausgesetzt wird im folgenden, ebenso wie in der ersten Mitteilung, daß keiner der betrachteten Bogen einen hyperebenen Teilbogen enthalten solle. Diese Voraussetzung ist lediglich zur Vereinfachung der Darstellung gemacht. Die Beweise sind, ebenso wie in der ersten Mitteilung, ins Einzelne ausgeführt.

§ 1.

Eine Kennzeichnung der gewöhnlich differenzierbaren Punkte $(n+1)$-ter Ordnung im R_n.

1,1. Mit dem Anfügungskriterium (I, Nr. 3, 1) war gezeigt worden, daß für die gewöhnlich differenzierbaren Punkte F von n-ter Ordnung auf einem Bogen $\mathfrak{B}$ im R_n die Windungsbedingung gilt: Die Tangentialschmieghyperebene T_{n-1} in F an $\mathfrak{B}$ schneidet oder stützt $\mathfrak{B}$ in F, je nachdem $n \equiv 1\,(2)$ oder $n \equiv 0\,(2)$. Nun behaupten wir, daß für die (gewöhnlich differenzierbaren) Punkte $(n+1)$-ter Ordnung gerade die durch Vertauschung der Worte „schneidet" und „stützt" entstehende Bedingung kennzeichnend ist.

Jeder Bogen $(n+1)$-ter Ordnung im R_n setzt sich aus einer beschränkten Anzahl von Bogen n-ter Ordnung zusammen[4]). Ist daher auf einem Bogen $\mathfrak{B}$ ein Punkt F von $(n+1)$-ter Ordnung, so kann man von F aus nach jeder Seite eine einseitige Umgebung n-ter Ordnung abgrenzen. Wir gehen deshalb bei der Charakterisierung der gewöhnlich differenzierbaren Punkte $(n+1)$-ter Ordnung genau wie beim Anfügungssatz (I, § 3) von der Voraussetzung aus, daß im R_n zwei Bogen n-ter

[3]) Über einen, von dem oben genannten und von dem Hjelmslevschen verschiedenen Beweis dieses Stetigkeitssatzes wurde schon in unserer Note: Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n, Sitz.-Ber. der phys.-med. Sozietät zu Erlangen 65 (1934) eine kurze Übersicht gegeben zu einer Zeit, als uns die genannte Hjelmslevsche Arbeit leider noch unbekannt war.

[4]) Haupt (3), § 2.

Ordnung im Punkte F glatt zusammenstoßen. Nun gibt es aber genau zwei verschiedene Arten solcher gewöhnlich differenzierbarer Punkte F entsprechend den beiden (einzigen) Möglichkeiten, daß v. und h. Th_n (vgl. I, Nr. 1, 4) in F an die Bogensumme identisch oder komplementär sind. Unser angekündigtes Kriterium wird daher zusammen mit dem Anfügungskriterium (I, Nr. 3, 1) diese beiden Arten gewöhnlich differenzierbarer Punkte (in denen zwei Bogen n-ter Ordnung zusammenstoßen) einfach nach ihrer Ordnung zu unterscheiden gestatten. Wir haben daher zu beweisen:

Satz: *Der gewöhnlich differenzierbare Ansatzpunkt F zweier Bogen n-ter Ordnung besitzt auf der Bogensumme $\mathfrak{B}$ entweder die Ordnung n oder die Ordnung $(n+1)$. Und zwar besitzt F die Ordnung $(n+1)$ dann und nur dann, wenn die Tangentialschmieghyperebene T^F_{n-1} im Falle $n \equiv 1\,(2)$ den Bogen $\mathfrak{B}$ in F stützt und im Falle $n \equiv 0\,(2)$ den Bogen $\mathfrak{B}$ in F schneidet, mit anderen Worten: wenn v. und h. Th_n in F an $\mathfrak{B}$ komplementär sind*[5]).

1, 2. Die zweite Aussage unserer Behauptung, daß nämlich die genannte Bedingung notwendig sei, ist schon durch das Anfügungskriterium I, Nr. 3, 1 gesichert. Es bleibt nur die erste Aussage, die Bedingung sei hinreichend, zu beweisen. Dieser Beweis verläuft im ganzen genommen wie der Beweis des Anfügungssatzes. Wir gehen nach dem Verfahren der vollständigen Induktion von der Ebene aus. Hier ist bekannt: Der Ansatzpunkt F zweier glatt aneinandergefügter Konvexbogen besitzt auf der Bogensumme die Ordnung 3 immer dann, wenn die Tangente in F schneidet, wenn also F Wendepunkt ist. — Im R_n, wo $\mathfrak{B}$ in F die genannte Windungseigenschaft erfülle, benutzen wir zuerst wieder Zentralprojektion aus F in eine nicht mit F inzidierende Hyperebene $\overline{R_{n-1}}$. Das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$, die Summe zweier Bogen $(n-1)$-ter Ordnung, ist in $\overline{F}$ glatt; ferner sind v. und h. $\overline{Th}_{n-1}$ in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ komplementär (vgl. I, S. 516, Nr. 1, 4; II, 4). Da nach Induktionsannahme im $\overline{R_{n-1}}$ das Kriterium gültig ist, hat also $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ sicher die Ordnung n. Wir grenzen nun auf $\overline{\mathfrak{B}}$ um $\overline{F}$ eine beiderseitige Umgebung $\overline{\mathfrak{U}}$ ab, die ebenfalls noch die Ordnung n besitzt und keinen mehrfachen Punkt enthält; — da jede einseitige Umgebung von $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$ nach I, Nr. 2, 7, Satz c) einfach ist und da v. und h. Halbtangente in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{B}}$ nicht komplementär sind, ist die letztere Bedingung sicher erfüllbar. Der Kegelmantel $K_{(F,\,\mathfrak{U})}$, der von F aus über das Urbild $\mathfrak{U}$

[5]) Bei der Lektüre von Scherk (1) kam Herr Haupt auf die Vermutung dieses Kriteriums.

von $\bar{\mathfrak{U}}$ gelegt wird, ist dann von n-ter Ordnung und schlicht-projizierend.

1, 3. Darnach wenden wir Zentralprojektion aus einem nicht in der Tangentialschmieghyperebene T^F_{n-1} gelegenen Punkt Z in eine Hyperebene R^*_{n-1} an. Wie in I, Nr. 3, 3, S. 525 dargelegt, läßt sich allein schon aus der Voraussetzung, der Ansatzpunkt F der beiden Bogen n-ter Ordnung sei gewöhnlich differenzierbar, die Folgerung ziehen, daß der Bildpunkt F^* von F auf dem Bild $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ ein Punkt $(n-1)$-ter Ordnung sei. Man kann also eine hinreichend kleine Umgebung $\mathfrak{V}^*$ von F^* auf $\mathfrak{B}^*$ angeben, welche die Ordnung $(n-1)$ besitzt; der Projektionskegelmantel $K_{(Z,\,\mathfrak{B})}$, welcher alle von Z ausgehenden Projektionsgeraden des Urbildes $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{V}^*$ umfaßt, ist somit ebenfalls von $(n-1)$-ter Ordnung und schlicht-projizierend. Hieraus folgt schließlich wie in I, Nr. 3, 3: Jede den Bogen $\mathfrak{B}$ in mindestens n Punkten treffende Hyperebene schneidet den Kegelmantel $K_{(Z,\,\mathfrak{B})}$ in einer Kurve $\mathfrak{S}$, welche $\mathfrak{R}_n$-Kurve ist bezüglich $\mathfrak{B}$, und für deren Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ der spezielle Monotoniesatz gilt.

1, 4. Nun nehmen wir an, F sei auf $\mathfrak{B}$ entgegen unserer Behauptung von mindestens $(n+2)$-ter Ordnung. Zu jeder noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$, — wir setzen insbesondere voraus, daß $\mathfrak{U}_\varepsilon$ im Durchschnitt $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten ist —, gibt es dann eine Hyperebene $\mathfrak{H}$, die $\mathfrak{U}_\varepsilon$ in mindestens $(n+2)$ Punkten trifft, und deren sämtliche mit $\mathfrak{U}_\varepsilon$ gemeinsame Punkte Schnittpunkte sind. Enthält $\mathfrak{H}$ den Punkt F, so haben wir bereits den Widerspruch. Bei Projektion aus F hätte das Bild $\bar{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{H}$ mit $\bar{\mathfrak{U}}$ mindestens $(n+1)$ Punkte gemeinsam, während doch $\bar{\mathfrak{U}}$ nur von n-ter Ordnung ist. Enthält $\mathfrak{H}$ noch nicht den Punkt F, dann wenden wir auf $\mathfrak{H}$ eine monotone Änderung gemäß dem speziellen Monotoniesatz an, die nun des näheren beschrieben werde.

Von den $(n+1)$ zu F auf $\mathfrak{B}$ nächstgelegenen Schnittpunkten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{U}_\varepsilon$ lassen wir die beiden F auf *verschiedenen* Seiten nächstgelegenen Punkte P_1 und P_2 beweglich; die übrigen $(n-1)$ Punkte halten wir fest. Alle weiteren Schnittpunkte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{U}_\varepsilon$, die auf $\mathfrak{U}_\varepsilon$ vor und hinter den genannten $(n+1)$ Punkten liegen, — *einen* solchen „äußeren" Punkt gibt es nach Voraussetzung sicher —, bleiben beweglich.

Liegt auf mindestens *einer* Seite von F auf $\mathfrak{U}_\varepsilon$ eine ungerade Anzahl von „äußeren" Schnittpunkten, dann bezeichne P_0 den auf einer solchen Seite äußersten Schnittpunkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß P_0 auf der gleichen Seite von F wie der Punkt P_2 liegt. Befindet sich dagegen zunächst auf beiden Seiten von F auf $\mathfrak{U}_\varepsilon$ eine gerade Anzahl von „äußeren" Punkten (also auf mindestens

einer Seite mindestens zwei „äußere" Punkte), dann stellt man sich erst den vorigen Fall her, indem man auf der einen Seite von F den äußersten bisher festgehaltenen Punkt frei gibt und dafür auf der anderen Seite von F den innersten der „äußeren" (bisher frei beweglichen) Punkte festhält. Wir überzeugen uns, daß dies immer möglich ist:

1. Sollte auf der einen Seite von F kein bisher festgehaltener Punkt liegen, so befindet sich auf dieser Seite sicher ein „äußerer" beweglicher Punkt, den man nun festhalten kann. In der Tat: Auf der anderen Seite von F ergeben die $(n-1)$ festgehaltenen Punkte und der eine „innere" bewegliche Punkt (P_1 oder P_2) schon die n Schnittpunkte, die insgesamt auf einer Seite von F möglich sind. Es bleiben noch mindestens zwei Schnittpunkte für die erste Seite, also neben dem „inneren" beweglichen Schnittpunkt (P_2 oder P_1) noch mindestens zwei (gerade Anzahl!) „äußere" Schnittpunkte.

2. Sollte auf der einen Seite von F auf $\mathfrak{U}_\varepsilon$ kein „äußerer" beweglicher Schnittpunkt liegen, so befindet sich auf dieser Seite mindestens *ein* bisher festgehaltener Punkt, so daß man hier einen Punkt freigeben kann. In der Tat: Auf der anderen Seite können insgesamt nur höchstens n Schnittpunkte liegen; davon sind mindestens drei beweglich, ein innerer und zwei äußere, also höchstens $(n-3)$ fest. Für die erste Seite bleiben also noch mindestens zwei festgehaltene Schnittpunkte.

Die monotone Änderung der Hyperebene $\mathfrak{H}$ wird nun in der Weise vorgenommen, daß man unter Festhalten der $(n-1)$ bezeichneten Punkte den Punkt P_1 auf F zu bewegt. Es bewegt sich dann nach dem speziellen Monotoniesatz P_2 entgegengesetzt wie P_1, also ebenfalls auf F hin, und schließlich P_0, da eine gerade Anzahl von beweglichen Punkten zwischen P_0 und P_2 liegt, entgegengesetzt wie P_2, also von F weg. Der Endpunkt des Durchschnitts $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ (siehe oben, Nr. 1, 4), der auf der gleichen Seite von F liegt wie P_2, heiße E. Auf diesen Punkt E hin bewegt sich also P_0.

Wir nehmen zunächst an, daß bei der betrachteten monotonen Änderung weder neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnen noch alte verloren werden. Dann sind die folgenden drei Fälle denkbar:

1. Der Punkt P_0 rückt in den Punkt E, bevor noch einer der Punkte P_1 und P_2 den Punkt F erreicht hat[6]). Es ergibt sich damit eine Hyperebene $\mathfrak{H}_0$, die den Punkt E und mindestens $(n+1)$ Punkte von $\mathfrak{U}_\varepsilon$ enthält. Nun konnte aber $\mathfrak{U}_\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden,

[6]) Der Gedankengang für den Unmöglichkeitsbeweis von Fall 1 ist einer brieflichen Mitteilung von Herrn Haupt entnommen.

also insbesondere so klein, daß der von E aus über $\mathfrak{U}_\varepsilon$ gelegte Projektionskegelmantel $K_{(E,\,\mathfrak{U}_\varepsilon)}$ von $(n-1)$-ter Ordnung und schlicht projizierend ist (denn E kann ja als innerer Punkt eines mit F beginnenden Bogens n-ter Ordnung nicht in T^F_{n-1} liegen; es gelten also die Ausführungen von Nr. 1, 3). Jede durch E gelegte Hyperebene kann dann nur höchstens $(n-1)$ Erzeugende von $K_{(Z,\,\mathfrak{U}_\varepsilon)}$ enthalten, während die Hyperebene $\mathfrak{H}_0$ mindestens $(n+1)$ Erzeugende enthalten würde. Für eine genügend kleine Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ kann also der erste Fall nicht eintreten.

2. Einer der beiden Punkte P_1 und P_2 rückt in den Punkt F, bevor P_0 den Punkt E erreicht hat. Wie schon oben gezeigt, steht aber die Existenz einer Hyperebene, die den Punkt F und außerdem noch $(n+1)$ Punkte von $\mathfrak{U}$ enthält, im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{U}}$ nur die Ordnung n besitzt.

3. Die beiden Punkte P_1 und P_2 rücken gleichzeitig in den Punkt F hinein, bevor P_0 den Punkt E erreicht hat. Wie in I, Nr. 3, 4 dargelegt, geht die Hyperebene $\mathfrak{H}$ dann in eine Hyperebene über, welche die Tangente in F und außerdem noch mindestens n Punkte von $\mathfrak{U}$ enthält. Der $(n-2)$-dimensionale Durchschnitt dieser Hyperebene mit $\overline{R_{n-1}}$ hat dann aber mit $\overline{\mathfrak{U}}$ außer $\overline{F}$ noch mindestens n Punkte gemeinsam, was bei der Ordnung n von $\overline{\mathfrak{U}}$ nicht möglich ist.

Es erwiesen sich also alle drei Fälle als unmöglich. Aber auch die Annahme eines Gewinnes oder Verlustes gemeinsamer Punkte von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ führt zu keinen wesentlich neuen Fällen. In der Tat:

a) Wird der Randpunkt E als neuer gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnen, so haben wir den obigen Fall 1 vor uns.

b) Werden zwischen P_0 und E neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnen, so ersetzt man P_0 durch den nunmehr zu E nächstgelegenen Schnittpunkt von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$. Der neue Punkt P_0 hat dieselbe Bewegungsrichtung wie der ursprüngliche Punkt P_0. In der Tat: Beim Gewinn neuer Punkte im Innern von $\mathfrak{W}$ kann es sich nur um Stützpunkte handeln, die sich bei weiterer monotoner Änderung von $\mathfrak{H}$ sofort in je eine gerade Anzahl von Schnittpunkten auflösen[7]). Daher liegt zwischen dem neuen und dem früheren Punkt P_0 eine ungerade Anzahl beweglicher Schnittpunkte, woraus nach dem speziellen Monotoniesatz die Behauptung folgt.

c) Werden zwischen P_1 und P_2 neue gemeinsame Punkte von $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnen, so betrachtet man die nunmehr zu F beiderseitig nächst gelegenen gemeinsamen Punkte als Punkte P_1 und P_2 und fährt fort

[7]) Siehe Haupt (2), Nr. 1, 5.

P_1 gegen F hin zu bewegen. Der Punkt P_0 behält nach dem Monotoniesatz seine Bewegungsrichtung bei.

d) Jeder sonstige Gewinn oder Verlust gemeinsamer Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ (— ein solcher könnte nur noch auf $\mathfrak{B}$ außerhalb E, oder zwischen P_0 und dem nächstgelegenen festgehaltenen Punkt, oder auf der anderen Seite von F außerhalb aller festgehaltenen Punkte eintreten —) läßt von vornherein die Bewegung der Punkte P_0, P_1 und P_2 ungestört.

Damit sind die Untersuchungen für den Sonderfall eines Gewinnes oder Verlustes gemeinsamer Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ auf die früheren Betrachtungen zurückgeführt. Ergebnis: Es gilt eine Umgebung U_ε von F auf $\mathfrak{B}$, welche mit jeder Hyperebene $\mathfrak{H}$ höchstens $(n+1)$ Punkte gemeinsam hat. Da sich die Ordnung n zufolge I, Nr 2, 7, Satz a) ausschließt, besitzt F, wie zu beweisen war, auf $\mathfrak{B}$ die Ordnung $(n+1)$.

§ 2.

Über die Eindeutigkeit der Schmiegräume und Schmieghalbräume in einem differenzierbaren Ansatzpunkt zweier Bogen n-ter Ordnung im R_n.

2, 1. Der Begriff des k-dimensionalen linearen *Schmiegraumes* [*Paratingente*[8])] ist eine Verallgemeinerung des Begriffes Tangentialschmiegraum. Wir verstehen unter einem k-dimensionalen Schmiegraum $(1 \leqq k \leqq n-1)$ im Punkte P eines Bogens $\mathfrak{B}$ im R_n jeden k-dimensionalen Häufungsraum einer Folge von k-dim. linearen Räumen $R_k^{(\varrho)}$, deren jeder mit $\mathfrak{B}$ mindestens $(k+1)$ verschiedene[9]) Punkte $P_\varrho^{(1)}, P_\varrho^{(2)}, \ldots, P_\varrho^{(k+1)}$ gemeinsam hat, wobei $\lim_{\varrho \to \infty} P_\varrho^{(j)} = P$ für $j = 1, 2, \ldots, k+1$. Als 0-dimensionalen Schmiegraum in P an $\mathfrak{B}$ können wir den Punkt P selbst betrachten. Der k-dimensionale (vordere oder hintere) Tangentialschmiegraum T_k in P an $\mathfrak{B}$ ist auch ein k-dimensionaler Schmiegraum in diesem allgemeineren Sinn; man kann ja jeden Tangentialschmiegraum T_k in P an $\mathfrak{B}$ mit beliebiger Genauigkeit durch einen R_k annähern, der mit einer beliebig kleinen Umgebung von P auf $\mathfrak{B}$ $(k+1)$ verschiedene Punkte gemeinsam hat. Ein k-dimensionaler Schmiegraum S in $\mathfrak{B}$ wird bei Projektion aus einem nicht in S enthaltenen Punkt Z abgebildet auf einen k-dimensionalen Schmiegraum im Bildpunkt $\overline{P}$ an das Bild $\overline{\mathfrak{B}}$, falls $k = 0, \ldots, n-2$ (vgl. I Nr. 1, 4, I, 1).

---

[8]) Siehe Bouligand (1), S. 73.

[9]) Wir fordern nicht, daß die Punkte linear unabhängig sind. Diese Festsetzung spielt eine Rolle bei Nr. 2, 5 b.

Im folgenden wird ferner der Begriff eines k-dimensionalen *Schmieg-albraumes* = Schmieg-$H\,R_k$ in P an $\mathfrak{B}$ für $1 \leqq k \leqq n$ gebraucht, den wir in folgender Weise einführen: Es sei $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)})$ ein $R_{(k-1)}$, welcher die k auf $\mathfrak{B}$ gelegenen verschiedenen Punkte $P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}$ enthält, wobei $P_\varrho^{(j)} \to P$ für $\varrho \to \infty$ $(j = 1, \ldots, k)$, und es sei $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}; P_\varrho^{(k+1)})$ derjenige Halb-R_k, welcher von $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)})$ begrenzt ist und welcher in seinem Innern den Punkt $P_\varrho^{(k+1)}$ von $\mathfrak{B}$ enthält, wobei auch $P_\varrho^{(k+1)} \to P$ für $\varrho \to \infty$. Liegt nun $P_\varrho^{(k+1)}$ für jedes ϱ *vor* den k Punkten $P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}$, so bezeichnen wir jeden Häufungs-$H\,R_k$ der $H\,R_k$ $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}; P_\varrho^{(k+1)})$ für $P_\varrho^{(j)} \to P$ $(j = 1, \ldots, k+1)$ als *vorderen Schmieg-H R_k* in P an $\mathfrak{B}$. Liegt $P_\varrho^{(k+1)}$ für jedes ϱ hinter den Punkten $P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}$, so bezeichnen wir als *hinteren Schmieg-H R_k* in P an $\mathfrak{B}$ nur im Falle $k \equiv 0\,(2)$ jeden Häufungs-$H\,R_k$ von $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}; P_\varrho^{(k+1)})$ selbst, im Falle $k \equiv 1\,(2)$ dagegen deren Komplementär-$H\,R_k$ (vgl. Definition der hinteren Tangential-schmieghalbräume I, Nr. 1, 4). *Es sei noch besonders bemerkt, daß die Punkte $P_\varrho^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, k+1)$ im übrigen beliebig vor oder hinter dem Limespunkt P liegen können.*

Wenn für unendlich viele ϱ der R_{k-1} $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)})$ außer den k Punkten $P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)}$ noch einen $(k+1)$-ten Punkt $P_\varrho^{(k+1)}$ von $\mathfrak{B}$ enthält, wobei auch $P_\varrho^{(k+1)} \to P$ für $\varrho \to \infty$, so soll jeder beliebige von einem Häufungs-R_{k-1} der R_{k-1} $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(k)})$ begrenzte $H\,R_k$ als vorderer oder hinterer Schmieg-$H\,R_k$ bezeichnet werden. Wenn der Bogen $\mathfrak{B}$ die Ordnung n besitzt, kann dieser Fall nach I, Nr. 2, 6 nicht eintreten.

Man überzeugt sich leicht, daß der vordere (hintere) k-dimensionale Tangentialschmieghalbraum $T\,h_k$ in P an $\mathfrak{B}$ zugleich ein vorderer (hinterer) Schmieg-$H\,R_k$ ist und daß ein vorderer (hinterer) Schmieg-$H\,R_k$ bei Projektion aus einem nicht im zugehörigen Schmieg-R_k enthaltenen Punkt Z sich auf einen vorderen (hinteren) Schmieg-$H\,R_k$ im Bildpunkt $\overline{P}$ an das Bogenbild $\overline{B}$ abbildet; $k = 1, \ldots, n-1$ (vgl. I, Nr. 1, 4, I, 1).

2, 2. Wir werden den Begriff einer v. (h.) Schmieg-$H\,R_1$ (Schmieg-halbgeraden) auch noch im Falle $n = 1$, also für eine *Parameter„kurve" auf der Geraden* gebrauchen. Eine solche gerade Parameterkurve erhält man bei Projektion eines ebenen Bogens aus einem Punkt der Ebene auf eine Gerade. Man überzeugt sich sofort, daß auch hier noch die Beziehung gilt: Jede v. (h.) Schmieghalbgerade der Urbildkurve bildet sich, wenn das Projektionszentrum nicht auf der betreffenden Trägergeraden liegt, auf eine v. (h.) Schmieghalbgerade der Bildkurve ab. Der ebene Bogen wird im folgenden insbesondere die Summe zweier Bogen zweiter Ordnung

sein. In diesem Falle gilt für die Projektion der bei den späteren Induktionsbeweisen wichtige

Satz[10]: *Es sei P ein gewöhnlich differenzierbarer Ansatzpunkt zweier ebener Bogen von zweiter Ordnung. Bei Projektion aus einem nicht auf der Tangente in P an die Bogensumme $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkt Z ist das Bild einer hinreichend kleinen Umgebung von P auf $\mathfrak{S}$ eine schlichte Strecke, ein „Bogen 1. Ordnung“.*

Diesem Satz entspricht für Bogen n-ter Ordnung im R_n $(n > 2)$ der in I, Nr. 3, 3 angegebene Satz.

2, 3. Es soll nun die Menge der Schmiegräume und Schmieghalbräume in einem differenzierbaren Ansatzpunkt zweier Bogen n-ter Ordnung betrachtet werden. Wir behandeln zunächst (Nr. 2, 3) den Fall, daß im Ansatzpunkt F der v. und der h. Th_k an die Bogensumme $\mathfrak{S}$ überall einstimmen für $k = 1, \ldots, n$. Der Punkt F ist dann auf $\mathfrak{S}$ von n-ter Ordnung. Wir beweisen nun den

Satz: *In einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt P eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung gibt es nur einen einzigen v. wie h. Schmieg-H R_k an $\mathfrak{B}$, nämlich den (v. $=$ h.) Th_k^P; $k = 1, \ldots, n$; $n \geqq 1$.* (Dementsprechend existiert in P an $\mathfrak{B}$ auch nur ein einziger Schmieg-R_k, nämlich der T_k^P; $k = 1, \ldots, n-1$; $n \geqq 2$).

Beweis: a) Für $n = 1$, also für einen schlichten „Bogen 1. Ordnung“ auf der Geraden ist die Eindeutigkeit der v. und h. Schmieghalbgeraden selbstverständlich.

b) Aus der Annahme, der Satz gelte im R_{n-1}, folgt die Gültigkeit des Satzes im R_n für $k = 1, \ldots, n-1$. In der Tat: Wir nehmen an, es gäbe im gewöhnlich differenzierbaren Punkte P des Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung zwei verschiedene v. (h.) Schmieg-H R_k für $1 \leqq k \leqq n-1$. Dann läßt sich ein nicht in T_{n-1}^P gelegenes Projektionszentrum Z so wählen[11], daß in der Projektionshyperebene die beiden Bild-H R_k, welche v. (h.) Schmieg-H R_k an den Bogen $\overline{\mathfrak{B}}$ im gewöhnlich differenzierbaren Bildpunkt $\overline{P}$ von $(n-1)$-ter Ordnung darstellen, verschieden sind. Das widerspricht aber der Induktionsannahme.

c) Es ist noch der Fall $k = n$ zu erledigen. Die Folge der H R_n $(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(n)}; P_\varrho^{(n+1)})$ definiere im Sinne von Nr. 2. 1 einen

---

[10]) Der Satz ist enthalten in Hjelmslev (2), S. 13, Th. 3. Er folgt auch aus einem allgemeinen Satze über ebene Bogen der Relativordnung 2 [Haupt, „Über Kurven endlicher Ordnung“, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 284 ff.; noch allgemeiner „Über Kontinua von endlicher Relativordnung“, Crelles Journal 167 (1931), insbesondere S. 35].

[11]) Vgl. I, Nr. 1, 4; I, 2, Beweis, S. 514, sowie I, Nr. 3, 3, Satz.

Schmieg-$H\,R_n$ in P an $\mathfrak{B}$ als Häufungs-$H\,R_n$. Nach b) konvergieren die $R_{n-1}(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(n)})$, wobei übrigens alle Punkte $P_\varrho^{(j)}$ Schnittpunkte der betreffenden Hyperebene mit $\mathfrak{B}$ sind[12]), für $\varrho \to \infty$ gegen die Tangential-schmieghyperebene T_{n-1}^P. Es sei P_ν ein nicht in T_{n-1}^P gelegener Punkt, der auf $\mathfrak{B}$ vor allen Punkten $P_\varrho^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ liegt. Da $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung, befindet sich $P_\varrho^{(n+1)}$ für jedes ϱ auf derselben Seite der $R_{n-1}(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(n)})$ wie der Punkt P_ν; also gilt für jedes ϱ:

$$H\,R_n(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(n)};\ P_\varrho^{(n+1)}) = H\,R_n(P_\varrho^{(1)}, \ldots, P_\varrho^{(n)};\ P_\nu).$$

Daraus ergibt sich für $\varrho \to \infty$: Jeder v. Schmieg-$H\,R_n$ in P ist identisch mit dem v. Th_n in P. Entsprechend verläuft der Beweis für einen h. Schmieg-$H\,R_n$.

2, 4. Satz Nr. 2, 3 enthält die folgende Sonderaussage:

Es sei P Endpunkt eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung. Der Th_k in P an $\mathfrak{B}$ ist der einzige v. wie h. Schmieg-$H\,R_k$ in P an $\mathfrak{B}$; $1 \leqq k \leqq n$[13]). (Um die Voraussetzung von Satz 2, 3 herzustellen, hat man in P an $\mathfrak{B}$ einen „gleichgewundenen" Bogen n-ter Ordnung glatt anzusetzen, so daß v. und h. Th_n in P an die Bogensumme übereinstimmen.)

Nach dem allgemeinen Prinzip der Oberhalbstetigkeit[14]) ergibt sich hieraus der folgende

Stetigkeitssatz[13]): Es sei $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r, \ldots$ eine von vorn (bzw. von hinten) gegen den Punkt Q konvergierende Folge von Punkten eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung. Dann konvergiert jede Folge von v. bzw. h. Schmieg-$H\,R_k$, insbesondere von Th_k, in den Q_r gegen den v. (bzw. h.) Th_k in Q an $\mathfrak{B}$ für $k = 1, \ldots, n$.

2, 5. Bei der Untersuchung der Menge der Schmieghalbräume und Schmiegräume in einem differenzierbaren Ansatzpunkt zweier Bogen n-ter Ordnung wurde in Nr. 2, 3 der Sonderfall behandelt, daß im Ansatzpunkt F der v. und der h. Th_k an die Bogensumme $\mathfrak{S}$ übereinstimmen für $k = 1, \ldots, n$. Nun nehmen wir den allgemeinen Fall, in welchem für beliebig viele k der v. und der h. Th_k im differenzierbaren Punkte F an $\mathfrak{S}$ verschieden (komplementär) sein können. Wir beweisen den

Satz: Voraussetzung: *F ist ein differenzierbarer Ansatzpunkt zweier Bogen n-ter Ordnung. V. und h. Th_ν in F an die Bogensumme $\mathfrak{S}$ sollen übereinstimmen für $1 \leqq \nu \leqq k$; $1 \leqq k \leqq n$. Im Falle $k < n$ seien v. und h. Th_{k+1} in F an $\mathfrak{S}$ verschieden (komplementär).*

---

[12]) Siehe Haupt, „Über Kontinua von beschränkter Ordnung", Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt. (1931). S. 54.

[13]) Hjelmslev (2), S. 61.

[14]) Bouligand (1), S. 75.

Behauptung: a) *Es gibt in F an $\mathfrak{S}$ genau einen v. wie h. Schmieg* HR_ν, *nämlich den (v. = h.)* Th_ν; $1 \leqq \nu \leqq k$.

b) *Es gibt in F an $\mathfrak{S}$ unendlich viele Schmieg-R_ϱ für* $k+1 \leqq \varrho \leqq n-1$

Beweis der Behauptung a): Die Behauptung ist richtig im Falle $n = 1$. Im Falle des R_n $(n > 1)$ ist die Behauptung für $k = n$ unter Nr. 2, 3 bewiesen. Für $k < n$ schließen wir ähnlich wie in Nr. 2, 3 b: Gäbe es in F an $\mathfrak{S}$ zwei verschiedene v. (h.) Schmieg-HR_ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$, so könnten wir ein nicht in T^F_{n-1} gelegenes Projektionszentrum Z so wählen, daß in der Projektionshyperebene die Bild-HR_ν, welche zwei v. (h.) Schmieg-HR_ν in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{S}}$ darstellen, verschieden sind. Nun ist $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ Ansatzpunkt zweier Bogen von höchstens n-ter Ordnung (siehe I, Nr. 2, 2) und daher[15]) Ansatzpunkt zweier hinreichend kleiner Bogen $(n-1)$-ter Ordnung. Ferner ist $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ differenzierbar und es stimmen v. und h. Th_ν in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{S}}$ überein für $1 \leqq \nu \leqq k$. Nach Induktionsannahme gibt es also nur einen einzigen v. (h.) Schmieg-HR_ν in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{S}}$ für $1 \leqq \nu \leqq k$. Widerspruch.

Beweis der Behauptung b): Im Falle der Ebene $(n = 2)$ haben wir zwei Konvexbogen vor uns, die in ihrem differenzierbaren Ansatzpunkt eine Spitze bilden. Hier ist offenbar jede mit F inzidierende Gerade eine Schmieggerade in F an $\mathfrak{S}$. Im Falle des R_n $(n > 2)$ führen wir den Beweis getrennt für $\varrho < n-1$ und $\varrho = n-1$.

α) $\varrho < n-1$. Wir wenden Projektion aus einem nicht in T^F_{n-1} gelegenen, sonst beliebigen Punkt Z an. In der Projektionshyperebene erfüllt $\overline{\mathfrak{S}}$ im Punkte $\overline{F}$ die Voraussetzung unserer Behauptung (vgl. Nr. 2, 4 a). Nach Induktionsannahme gibt es also unendlich viele verschiedene Schmieg-R_ϱ in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{S}}$; $k+1 \leqq \varrho \leqq n-2$. Nun enthält aber jeder der unendlich vielen verschiedenen Verbindungs-$R_{\varrho+1}$ dieser Schmieg-R_ϱ mit Z mindestens einen Schmieg-R_ϱ in F an $\mathfrak{S}$. Der Fall, daß fast alle diese Schmieg-R_ϱ in F an $\mathfrak{S}$ in einen einzigen, den Punkt Z enthaltenden R_ϱ zusammenfallen, kann nicht eintreten, weil unsere Betrachtungen für jedes beliebige Projektionszentrum Z gelten. Damit ist die Behauptung b) für $\varrho < n-1$ bewiesen.

β) $\varrho = n-1$. Unsere Behauptung lautet hier:

Ist ein differenzierbarer Ansatzpunkt F zweier Bogen n-ter Ordnung nicht zugleich gewöhnlich differenzierbar, so gibt es unendlich viele Schmieghyperebenen in F an die Bogensumme $\mathfrak{S}$. Zusatz: Durch jeden Raumpunkt geht mindestens eine Schmieghyperebene in F an $\mathfrak{S}$.

---

[15]) Siehe Haupt (3), § 2.

Beim Beweis benutzen wir den folgenden sogleich noch zu begründenden

Hilfssatz: Auf einem Bogen $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung im R_n ist jeder differenzierbare Punkt Q zugleich gewöhnlich differenzierbar. Weil dann nach I, Nr. 2, 7, Satz a) auch v. und h. Th_n in Q an $\mathfrak{B}$ übereinstimmen, so gilt also: Stimmen im Punkte Q eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung v. und h. T_ν überein für $\nu = 1, \ldots, n-1$, so sind v. und h. Th_ν in Q an $\mathfrak{B}$ identisch für $\nu = 1, \ldots, n$.

Für den Fall der Ebene besagt der Hilfssatz: Ein Konvexbogen kann in einem differenzierbaren Punkt keine Spitze haben. Dies ist bekannt. Im Falle des R_n ($n > 2$) wendet man zum Beweis Projektion aus einem von Q verschiedenen (und nicht in T_{n-1}^{Q} enthaltenen [16])) Punkt Z von $\mathfrak{B}$ an (in welchem die Tangente existiert). Es ist sofort ersichtlich: Gilt unser Hilfssatz nicht für Q auf $\mathfrak{B}$, so ist er auch für den differenzierbaren Bildpunkt $\overline{Q}$ auf dem Bogen $\overline{\mathfrak{B}}$ von $(n-1)$-ter Ordnung durchbrochen. Widerspruch zur Induktionsannahme:

Beweis der Behauptung b), β): Wir wenden Projektion aus einem nicht in T_{n-1}^{F} enthaltenen, im übrigen beliebigen Punkt Z an. In der Projektionshyperebene ist der Bildpunkt $\overline{F}$ auf der Bogensumme $\overline{\mathfrak{S}}$ differenzierbarer Ansatzpunkt zweier (hinreichend kleiner) Bogen von $(n-1)$-ter Ordnung (vgl. Nr. 2, 5a), Beweis). Wenn nun, wie vorausgesetzt, für irgendein $\varrho \leqq n-1$ v. und h. Th_ϱ in F an $\mathfrak{S}$ verschieden (komplementär) sind, dann sind für den gleichen ϱ-Wert auch v. und h. Th_ϱ in $\overline{F}$ an $\overline{\mathfrak{S}}$ komplementär. Nach unserem Hilfssatz besitzt dann der Punkt $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ mindestens die Ordnung n. Also gibt es in der Projektionshyperebene zu jeder noch so kleinen Umgebung $\overline{\mathfrak{U}}_\gamma$ von $\overline{F}$ auf $\overline{\mathfrak{S}}$ einen R_{n-2} S_γ, der mit $\overline{\mathfrak{U}}_\gamma$ mindestens n Punkte gemeinsam hat. Es hat dann die Hyperebene $\mathfrak{H}_\gamma(S_\gamma, Z)$ mit dem Urbild $\mathfrak{U}_\gamma$ von $\overline{\mathfrak{U}}_\gamma$ ebenfalls mindestens n Punkte gemeinsam (siehe I, Nr. 1, 3, III, a)). Wir betrachten nun eine Folge von Umgebungen $\overline{\mathfrak{U}}_\gamma$, welche sich für $\gamma \to \infty$ auf den Punkt $\overline{F}$ zusammenziehen und eine zugehörige Folge von Hyperebenen $\mathfrak{H}_\gamma$. Jede Häufungshyperebene $\mathfrak{H}$ dieser Hyperebenenfolge ist dann Schmieghyperebene in F an $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{H}$ enthält den Punkt Z. Da nun Z beliebig,

---

[16]) Nach der [für den R_n ($n \geqq 4$)] verallgemeinerten Bemerkung von Haupt (1), Nr. 1, 12 ist die in der Klammer ausgedrückte Bedingung von selbst erfüllt. — Es gilt noch allgemeiner:

1. Eine Hyperebene, welche einen k-dimensionalen Schmiegraum in einem inneren Punkt P eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung enthält, kann außer P höchstens noch $(n-k-1)$ Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam haben.

2. Eine Hyperebene, welche als höchstdimensionalen Schmiegraum im inneren Punkte P eines Bogens $\mathfrak{B}$ von n-ter Ordnung einen k-dimensionalen Schmiegraum enthält, schneidet oder stützt $\mathfrak{B}$ in P, je nachdem $k \equiv 0\,(2)$ oder $k \equiv 1\,(2)$.

nur nicht in T^F_{n-1} gelegen, vorausgesetzt war, gibt es in der Tat unendlich viele verschiedene Schmieghyperebenen in F an $\mathfrak{S}$, und zwar geht durch jeden Punkt des R_n mindestens eine.

2, 6. Eine geringe Erweiterung des Satzes 2, 5 stellt der folgende Satz dar, der ganz entsprechend bewiesen wird:

Satz: Voraussetzung: F sei Ansatzpunkt[17]) zweier Bogen n-ter Ordnung. Es sollen v. und h. T_ν in F an die Bogensumme $\mathfrak{S}$ übereinstimmen für $\nu = 1, \ldots, k$; $1 \leqq k \leqq n-1$.

Behauptung: Es gibt dann und nur dann genau einen (eindeutig bestimmten) Schmieg-R_k in F an $\mathfrak{S}$, wenn v. Th^F_ν = h. Th^F_ν für sämtliche $\nu = 1, \ldots, k$.

Zusatz[18]): Im Ansatzpunkt zweier Bogen n-ter Ordnung sind die Schmiegräume aller Dimensionen zwischen 1 und $(n-1)$ dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn der Ansatzpunkt gewöhnlich differenzierbar (also insbesondere von der Ordnung n oder $(n+1)$) ist.

---

[17]) Der Ansatzpunkt wird jetzt *nicht* mehr, wie in Satz 2, 5, als *differenzierbar* vorausgesetzt.

[18]) Auf die Vermutung dieses Satzes kam Herr Haupt bei der Lektüre von Scherk (1).

(Eingegangen am 9. 11. 1936.)

Neue periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Kürzlich konnte ich für das Dreikörperproblem[1]) und für das Vierörperproblem[2]) nach einheitlicher Methode einparametrige Scharen periodischer Lösungen nachweisen, wobei die drei bzw. vier Massen ganz beliebig sein durften. Dabei ging ich — die Sache mag hier am *Vier*körperproblem erläutert werden — aus von der bekannten Lagrangeschen Lösung des *Drei*körperproblems, bei der alle drei Massen in einem mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem in Ruhe bleiben und zwar auf gerader Linie. Wenn dann eine der drei Massen in zwei Teilmassen gespalten wird, entsteht das *Vier*körperproblem und man wird vermuten, daß es Lösungen gibt, bei denen die vier Massen in dem rotierenden Koordinatensystem lange Zeit in beliebiger Nähe der drei Ruhepunkte der erwähnten Lagrangeschen Lösung bleiben, die beiden Teile der gespaltenen Masse also insbesondere nahe beieinander. In der Tat konnte ich derartige Bewegungen nachweisen und sogar eine einparametrige Schar periodischer Umläufe um die Ruhepunkte. Sie ergab sich unter Benutzung des aus den Differentialgleichungen der Bewegung leicht ersichtlichen Umstands, daß simultane Bahnkurven, welche die Gerade der drei Ruhepunkte zu zwei verschiedenen Zeitpunkten senkrecht schneiden, notwendig periodisch werden. Dieser Ansatz lieferte nach Einführung eines Scharparameters λ als Periodizitätsbedingungen sechs Gleichungen mit sechs den Anfangszustand der Bewegung charakterisierenden Unbekannten, die als Funktionen von λ zu bestimmen waren. Ihre eindeutige Erfüllbarkeit folgte aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante. — Ähnlich war die Sache beim *Drei*körperproblem; hier wurde von der Kreis-

[1]) Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen), Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1936, S. 157—176.

[2]) Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Vierkörperproblems, Math. Annalen 113 (1936), S. 95—109.

bewegung des *Zwei*körperproblems ausgegangen, die sich ja in einem rotierenden Koordinatensystem als Ruhe darstellt, und dann wurde die eine der beiden Massen gespalten.

Nun kann man fragen, ob es nicht auch periodische Lösungen gibt, bei denen die Bedingung des zweimaligen Senkrechtschneidens nicht erfüllt ist. Stellt man demgemäß unter Beibehaltung der übrigen Bestandteile meiner Methode, insbesondere des Scharparameters λ, die Periodizitätsbedingungen in der allgemeinen Form auf, daß man einfach nach bestimmter Zeit Wiederkehr des Anfangszustands fordert, so erhält man — um die Sache wieder am *Vier*körperproblem zu erläutern — zwölf Gleichungen mit zwölf den Anfangszustand charakterisierenden Unbekannten. Aber die Weiterbehandlung ist wesentlich schwieriger, weil es sich zeigt, daß die jetzt zwölf-reihige Funktionaldeterminante verschwindet. Dabei ist dieses Verschwinden allerdings vorauszusehen, weil ja periodische Bahnen an einer beliebigen Stelle ihres Weges begonnen werden können, so daß die zwölf Gleichungen, wenn sie überhaupt lösbar sind, gewiß unendlich viele Lösungen haben müssen, indem eine der zwölf Unbekannten willkürlich bleiben darf. Aber diese Voraussicht nützt nichts für den Nachweis der Lösbarkeit.

Nun kennt man aber von den Bewegungsgleichungen das Integral der lebendigen Kraft, und dieses bewirkt, daß eine der zwölf Gleichungen eine Folge der elf anderen ist, so daß man sich nur um die Lösbarkeit dieser elf zu kümmern braucht. Damit sind aber die Schwierigkeiten noch nicht behoben. In Wahrheit zerfällt nämlich die zwölf-reihige Funktionaldeterminante in drei vierreihige Faktoren, von denen *zwei* verschwinden, während der dritte nicht verschwindet. Nur das Verschwinden des ersten Faktors war vorauszusehen und findet seine Erklärung in dem geschilderten Sachverhalt. *Das Verschwinden des zweiten Faktors ist dagegen eine wirkliche Überraschung*; es deutet an, daß die Lösungsschar größer ist als vermutet, indem noch eine weitere Unbekannte willkürlich bleiben darf. Nun kennt man außer dem Integral der lebendigen Kraft auch noch das Integral der Flächen, und beide zusammen bewirken, daß von den zwölf Gleichungen sogar *zwei* eine Folge der zehn anderen sind. Diese letzteren erweisen sich bei willkürlicher Wahl von zwei Unbekannten als eindeutig lösbar. So gelangt man zu einer *zweiparametrigen* Schar periodischer Lösungen, von der die a. a. O. gefundene Schar eine einparametrige Unterschar ist. Die beiden Parameter, die sich nicht etwa auf einen reduzieren lassen, sind dabei λ und die eine der beiden willkürlich gebliebenen Unbekannten, während die andere nur die Willkürlichkeit des Anfangspunktes innerhalb der gleichen Bahn bezeichnet und daher ohne Verlust an Allgemeinheit auch als fest gewählt werden kann.

Ebenso stellt sich auch beim *Drei*körperproblem die a. a. O. nachgewiesene inparametrige Schar als Unterschar einer zweiparametrigen heraus.

Die befolgte Methode läßt sich verallgemeinern, indem man von $n + 1$ Massenpunkten ausgeht, die unter dem Einfluß der Schwerkraft in einem mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem in Ruhe bleiben. Derartige Konfigurationen sind mehrere bekannt. Speziell bei zwei Punkten, also $n = 1$, ist es die triviale Planetenkreisbahn; bei drei Punkten, also $n = 2$, gibt es außer dem obigen Fall noch den ebenfalls von Lagrange angegebenen Fall, daß die drei Ruhepunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden (und keinen weiteren Fall); auch für $n > 2$ sind schon Fälle angegeben worden[3]). Indem man eine der $n + 1$ Massen in zwei Teile spaltet[4]), so daß das $(n + 2)$-Körperproblem entsteht, erhält man nach Einführung eines Scharparameters λ als Periodizitätsbedingungen $4 + 4n$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Die $(4 + 4n)$-reihige Funktionaldeterminante zerfällt in eine vierreihige und zwei $(2n)$-reihige Determinanten. Der eine $(2n)$-reihige Faktor verschwindet nicht, während der vierreihige und der andere $(2n)$-reihige Faktor verschwinden. Die bekannten Integrale der lebendigen Kraft und der Flächen bewirken aber, daß zwei der $4 + 4n$ Gleichungen eine Folge der übrigen sind. Wählt man dann zwei der Unbekannten willkürlich oder auch ohne Verlust an Allgemeinheit eine davon fest (vgl. oben), so sind noch $3 + (4n - 1)$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten zu lösen. Dabei bleibt die nichtverschwindende $(2n)$-reihige Determinante erhalten; an Stelle der verschwindenden vierreihigen aber tritt eine dreireihige, die nicht verschwindet. Statt der verschwindenden $(2n)$-reihigen Determinante schließlich kommt eine $(2n - 1)$-reihige, die im allgemeinen wieder nicht verschwinden wird; doch konnte ich das nicht allgemein entscheiden. Jedenfalls hat man in allen Fällen, in denen diese kritische Determinante nicht verschwindet, eine zweiparametrige Schar periodischer Lösungen. Man hat sogar, da mehrere der Unbekannten (nicht alle) sich dazu eignen, als die willkürlich bleibende gewählt zu werden, eine gewisse Auswahl zwischen mehreren kritischen Determinanten; das Nichtverschwinden einer einzigen genügt schon.

---

[3]) Über die Literatur vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band VI, 2 A, S. 529.

[4]) Eine andere Klasse periodischer Lösungen erhält man, wenn man, ohne die Anzahl der Massen durch Spaltung um eine zu vermehren, Bahnkurven sucht, die in der Nähe der Ruhepunkte verlaufen. Das ist eine spezielle Aufgabe aus dem Gebiet der kleinen Schwingungen (was bei der Aufgabe des Textes nicht der Fall ist); sie kann ohne Vernachlässigung der Störungsglieder exakt durchgeführt werden, was in Münchener Dissertationen geschehen wird.

Speziell für $n = 1$ ist das Nichtverschwinden der (einreihigen) kr tischen Determinante sofort zu sehen, womit für das Dreikörperproble die zweiparametrige Schar nachgewiesen ist. Ebenso verschwindet fü $n = 2$ sowohl in dem Fall, daß die drei Ruhepunkte in gerader Lin liegen, als auch im Fall des gleichseitigen Dreiecks eine der zur Au wahl stehenden kritischen (dreireihigen) Determinanten nicht, so daß auc beim Vierkörperproblem die zweiparametrigen Scharen gesichert sind.

Im folgenden wird die Rechnung zunächst für beliebiges n durch geführt und dann speziell für $n = 1$ und $n = 2$ das Nichtverschwinde der kritischen Determinante gezeigt.

§ 2.

Die Bewegungsgleichungen.

I. Wir betrachten $n + 2$ Massenpunkte mit den Massen $m_0, m_1, \ldots, m_{n+}$ Ihre Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft soll in der Ebene e folgen. Sind x_ν, y_ν die Koordinaten des Punktes mit der Masse m_ν (kur des Punktes m_ν) in einem unbewegten Koordinatensystem und setzt ma $x_\nu + i y_\nu = z_\nu$, so lauten bei passender Wahl der Zeiteinheit die B wegungsgleichungen folgendermaßen[5]):

$$\frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = \sum_{\mu=0}^{n+1}{}' m_\mu \frac{z_\mu - z_\nu}{|z_\mu - z_\nu|^3} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n + 1 \tag{1}$$

An Integralen kennt man:
erstens den Schwerpunktsatz:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu z_\nu = C_1 t + C_2; \tag{2}$$

zweitens das Integral der lebendigen Kraft (Energiesatz):

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu \left|\frac{d z_\nu}{dt}\right|^2 = 2 \sum_{\nu=1}^{n+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|z_\mu - z_\nu|} + h; \tag{3}$$

drittens das Integral der Flächen (Flächensatz):

$$\Im\left(\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu \bar{z}_\nu \frac{d z_\nu}{dt}\right) = k, \tag{4}$$

wobei in üblicher Weise durch Überstreichen die konjugiert-komple Größe bezeichnet ist und $\Im(a)$ den durch i dividierten imaginären T

[5]) Ein Akzent an einem Summenzeichen soll stets andeuten, daß ein Summan der infolge verschwindenden Nenners sinnlos ist, nicht mitzählt. In Formel (1) also bei der Summation nach μ der Wert $\mu = \nu$ auszulassen.

er komplexen Zahl a bedeutet: $\Im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2i}$ (entsprechend wird $\Re(a)$ päter den reellen Teil bedeuten: $\Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$). Dabei sind C_1 und C_2 villkürliche komplexe, h und k willkürliche reelle Konstanten.

II. Wir führen jetzt die Relativkoordinaten der ersten $n+1$ Punkte n bezug auf den Punkt m_{n+1} ein:

5) $$z_\nu - z_{n+1} = p_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Nur diese interessieren uns; denn sobald sie bekannt sind, ergeben sich lie z_ν selbst aus dem Schwerpunktsatz (2). Aus (1) erhält man durch Subtraktion die Differentialgleichungen für die p_ν:

6) $$\frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{p_\mu - p_\nu}{|p_\mu - p_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{p_\mu}{|p_\mu|^3} - m_{n+1} \frac{p_\nu}{|p_\nu|^3}$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Für dieses System ergeben sich aus dem Energie- und Flächensatz zwei entsprechende Integrale. Zunächst folgt nämlich aus (2) und (5), wenn

7) $$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu = M$$

gesetzt wird:

8) $$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu p_\nu + M z_{n+1} = C_1 t + C_2.$$

Sodann geht der Energiesatz (3) vermöge (5) über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt} + \frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 + m_{n+1}\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|}$$
$$+ 2\sum_{\mu=0}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h,$$

oder mit Benutzung der Formel $|a+b|^2 = |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$ in

9) $$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 + \frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + \frac{d\bar{z}_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2$$
$$= 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h.$$

Hier kann man aber z_{n+1} mit Hilfe von (8) herausschaffen. Aus (8) olgt nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt} = C_1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + M\frac{d\bar{z}_{n+1}}{dt} = \bar{C}_1,$$

und hieraus durch Multiplikation

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 + M\frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + M\frac{d\bar{z}_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M^2\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 = C_1\bar{C}_1.$$

Dividiert man diese Gleichung durch M und subtrahiert sie dann von (9), so kommt

$$(10)\quad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 - \frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h_1,$$

wo auch h_1 eine willkürliche reelle Konstante ist. Das ist der Energiesatz für die Relativkoordinaten.

Der Flächensatz (4) geht vermöge (5) über in

$$(11)\quad \Im\Big(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + \overline{z_{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + \frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M\,\overline{z_{n+1}}\,\frac{dz_{n+1}}{dt}\Big) = k.$$

Hier kann man wieder z_{n+1} mit Hilfe von (8) herausschaffen. Nach (8) ist nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M\overline{z_{n+1}} = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2, \quad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt} = C_1,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\,\overline{z_{n+1}}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M^2\,\overline{z_{n+1}}\frac{dz_{n+1}}{dt} = \bar{C}_1 C_1 t + \bar{C}_2 C_1$$

Der imaginäre Teil der linken Seite ist also konstant. Dividiert man ihn durch iM und subtrahiert dann von (11), so erhält man

$$(12)\quad \Im\Big(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \frac{dp_\nu}{dt} - \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\Big) = k_1,$$

wo auch k_1 wieder eine willkürliche reelle Konstante ist. Das ist der Flächensatz für die Relativkoordinaten.

III. Wir führen jetzt ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α rotierendes Koordinatensystem ein, indem wir

$$p_\nu = e^{i\alpha t} u_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{13}$$

setzen. Die Bewegungsgleichungen (6) gehen dann über in

$$\boxed{\frac{d^2 u_\nu}{dt^2} + 2i\alpha \frac{du_\nu}{dt} - \alpha^2 u_\nu = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{u_\mu - u_\nu}{|u_\mu - u_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{u_\mu}{|u_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{u_\nu}{|u_\nu|^3}} \tag{14}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Der Energiesatz (10) geht über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right|^2 - \frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right)\right|^2$$

$$= 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|u_\mu - u_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|u_\mu|} + h_1, \tag{15}$$

und der Flächensatz (12) in

$$\Im\left(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{u}_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right)\right) - \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{u}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right) = k_1. \tag{16}$$

IV. Denkt man jetzt vorübergehend die Masse m_0 mit m_{n+1} in einem Punkt vereinigt, so daß es sich um das $(n+1)$-Körperproblem mit den Massen $m_1, \ldots, m_n, m_0 + m_{n+1}$ handelt, so lauten die Bewegungsgleichungen analog zu (14):

$$\frac{d^2 u_\nu}{dt^2} + 2i\alpha \frac{du_\nu}{dt} - \alpha^2 u_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{u_\mu - u_\nu}{|u_\mu - u_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{u_\mu}{|u_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1})\frac{u_\nu}{|u_\nu|^3}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Sie haben als Lösung u. a. die Ruhelage $u_\nu = a_\nu$, wenn die n Konstanten a_ν aus den n Gleichungen

$$\boxed{-\alpha^2 a_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1})\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}} \tag{17}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

berechnet werden. Dieses Gleichungssystem soll hier nicht diskutiert werden. Jedenfalls ist im Fall $n = 1$ die Lösung trivial; im Fall $n = 2$ gibt es die Lagrangeschen Lösungen, bei denen die zwei Ruhepunkte mit dem dritten, dem Nullpunkt, in gerader Linie liegen oder ein gleichseitiges Dreieck bilden, und auch für $n > 2$ sind einzelne Lösungen bekannt (vgl. Einleitung). *Wir*

werden daher im folgenden einfach unter α *und* $m_0, m_1, \ldots, m_{n+1}$ *irgendwelche positive, unter* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *komplexe Zahlen verstehen, die durch die Gleichungen* (17) *aneinander gebunden sind.* Natürlich sind wegen des auftretenden Nenner die a_ν voneinander und von 0 verschieden.

V. Wird nun die Masse $m_0 + m_{n+1}$ wieder in ihre beiden Teile m_0 und m_{n+1} gespalten, so ist zu vermuten, daß das entstehende durch die Gleichungen (14) dargestellte $(n+2)$-Körperproblem eine Schar von Lösungen hat, bei denen die Masse m_0 kleine Umläufe um m_{n+1} beschreibt und die anderen Massen m_ν kleine Umläufe um die Ruhepunkte a_ν beschreiben. Man wird weiter, wenn m_0 sehr nahe bei m_{n+1} bleibt, so daß die von den übrigen Massen m_ν auf m_0 und m_{n+1} ausgeübte Anziehungskraft gegenüber der Kraft, mit der sich m_0 und m_{n+1} gegenseitig anziehen, nicht sehr ins Gewicht fällt, vermuten, daß die Schar der Umläufe von m_0 um m_{n+1} annähernd dem dritten Keplerschen Gesetz folgt. Diese Erwägungen führen zu der in ähnlicher Weise wohl zuerst beim sog. eingeschränkten Dreikörperproblem von Herrn Birkhoff[6]) angewandten Transformation

$$(18)\qquad \begin{cases} t = \lambda^3 \tau, \\ u_0 = \lambda^3 V, \\ u_\nu = a_\nu + \lambda^2 U_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

wo λ ein reeller Scharparameter ist. Die Bewegungsgleichungen (14) gehen dann, wenn die Differentiation nach τ (nicht nach t) durch einen Akzent bezeichnet wird, über in:

$$(19)\quad \begin{cases} V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V = -(m_0 + m_{n+1})\dfrac{V}{|V|^3} \\ \quad + \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^3 (U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)|^3} - \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3}, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} U_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 U_\nu' - \alpha^2\lambda^4 (a_\nu + \lambda^2 U_\nu) \\ \quad = -m_0 \dfrac{V}{|V|^3} + \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)|^3} \\ \quad - \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} - \lambda^4 m_0 \frac{a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)}{|a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)|^3} \\ \quad - \lambda^4 m_{n+1} \dfrac{a_\nu + \lambda^2 U_\nu}{|a_\nu + \lambda^2 U_\nu|^3} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

[6]) G. D. Birkhoff, The restricted problem of three bodies, Rendiconti del circolo matematico di Palermo 39 (1915), S. 265–334; speziell S. 299. Natürlich fallen beim Birkhoffschen Problem die letzten n Transformationsgleichungen weg.

Setzt man schließlich noch

21) $$m_0 + m_{n+1} = \beta^2 \qquad (\beta > 0),$$

22) $$U_\nu = \frac{m_0}{\beta^2} V + W_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so gehen die Gleichungen (19), (20) mit den Unbekannten $V, U_1, \ldots, U_n$ über in die folgenden endgültigen Gleichungen mit den Unbekannten $V, W_1, \ldots, W_n$:

23)
$$V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} + \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \left(\frac{a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)|^3} - \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} \right),$$

24)
$$\begin{aligned} W_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 W_\nu' - \alpha^2\lambda^6 W_\nu &= \alpha^2 a_\nu \lambda^4 + \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)|^3} \\ &- \lambda^4 \frac{m_0}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)|^3} - \lambda^4 \frac{m_{n+1}}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} \\ &- \lambda^4 m_0 \frac{a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)}{|a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)|^3} - \lambda^4 m_{n+1} \frac{a_\nu + \lambda^2 U_\nu}{|a_\nu + \lambda^2 U_\nu|^3} \\ &\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}.$$

Dabei sind auf der rechten Seite die U_ν vermöge (22) durch V und W_ν auszudrücken.

Die rechten Seiten der Gleichungen (23) und (24) lassen sich unter Benutzung der Formel

$$\frac{a + \lambda^2 U}{|a + \lambda^2 U|^3} = \frac{a}{|a|^3} \left(1 + \lambda^2 \frac{U}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \lambda^2 \frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a}{|a|^3} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{U}{a} + 3 \frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right) + \ldots\right]$$

nach Potenzen von λ^2 entwickeln, und diese Entwicklungen werden, solange V und die W_ν beschränkt bleiben, für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ gelten. Dabei sieht man sofort, daß in (23) das Glied mit λ^4 herausfällt. Das gleiche ist aber auch bei (24) der Fall; hier ist der Koeffizient von λ^4 nämlich gleich

$$\alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_0}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - \frac{m_{n+1}}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - m_0 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}$$

$$- m_{n+1} \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3} = \alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1}) \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3},$$

also wegen (17) gleich 0. Auch der Koeffizient von λ^6 ist leicht zu be rechnen, wobei die U_ν natürlich durch die Ausdrücke (22) zu ersetzen sind So erhält man

$$\text{(23a)}\qquad \boxed{\begin{aligned} &V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V \\ &\quad = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} + \frac{\lambda^6}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{V}{a_\mu} + 3\frac{\overline{V}}{\overline{a}_\mu}\right) + \sum_{r=8}^{\infty} F_r \lambda^r \end{aligned}},$$

$$\text{(24a)}\qquad \boxed{\begin{aligned} &W_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 W_\nu' - \alpha^2\lambda^6 W_\nu \\ &= \frac{\lambda^6}{2}\Big[-\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{W_\mu - W_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{\overline{W}_\mu - \overline{W}_\nu}{\overline{a}_\mu - \overline{a}_\nu}\right) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{W_\mu}{a_\mu} + 3\frac{\overline{W}_\mu}{\overline{a}_\mu}\right) \\ &\quad + \beta^2 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{W_\nu}{a_\nu} + 3\frac{\overline{W}_\nu}{\overline{a}_\nu}\right)\Big] + \sum_{r=8}^{\infty} G_{\nu r}\lambda^r \end{aligned}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei die F_r und $G_{\nu r}$ Polynome von $V, \overline{V}, W_1, \overline{W}_1, \ldots, W_n, \overline{W}_n$ sind

VI. Der Energiesatz (15) nimmt vermöge (18) die Form[7])

$$\begin{aligned} &m_0|V' + i\alpha\lambda^3 V|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |U_\nu' + i\alpha\lambda(a_\nu + \lambda^2 U_\nu)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{M}\Big|m_0(V' + i\alpha\lambda^3 V) + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (U_\nu' + i\alpha\lambda(a_\nu + \lambda^2 U_\nu))\Big|^2 \\ &= 2\lambda^2 \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2(U_\mu - U_\nu)|} + 2\lambda^2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_0 m_\nu}{|a_\nu + \lambda^2(U_\nu - V)} \\ &\quad + 2\lambda^2 \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|} + 2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + h_2 \end{aligned}$$

an, wo h_2 wieder eine willkürliche Konstante ist ($h_2 = \lambda^2 h_1$). Auch hie kann man nach Potenzen von λ entwickeln, wobei die Formel

$$\frac{1}{|a + \lambda^2 U|} = \frac{1}{|a|}\left(1 + \lambda^2\frac{U}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \lambda^2\frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|a|}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{U}{a} + \frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right) + \ldots\right.$$

zu benutzen ist. Dadurch ergibt sich zunächst

$$m_0|V'|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |U_\nu'|^2 - \frac{1}{M}\Big|m_0 V' + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U_\nu'\Big|^2 - 2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + \lambda P = h_2$$

---

[7]) Im Fall $n = 1$ fällt die Doppelsumme, die für $n = 1$ keinen Sinn ha („leer" ist), einfach weg. Ebenso ist es auch später bei leeren Summen.

wo P eine Potenzreihe von

$$\lambda,\ V,\ \overline{V},\ V',\ \overline{V}',\ U_\nu,\ \overline{U}_\nu,\ U'_\nu,\ \overline{U}'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

ist. Führt man noch an Stelle der U_ν wieder vermöge (22) die W_ν ein, so kommt schließlich nach leichter Rechnung

$$\boxed{\frac{m_0 m_{n+1}}{\beta^2}|V'|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |W'_\nu|^2 - \frac{1}{M}\Big|\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W'_\nu\Big|^2 - 2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + \lambda P_1 = h_2}, \tag{26}$$

wo jetzt P_1 eine Potenzreihe der folgenden Größen ist:

$$\lambda,\ V,\ \overline{V},\ V',\ \overline{V}',\ W_\nu,\ \overline{W}_\nu,\ W'_\nu,\ \overline{W}'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \tag{27}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Potenzreihe der Größen

$$\lambda,\ \Re(V),\ \Im(V),\ \Re(V'),\ \Im(V'),\ \Re(W_\nu),\ \Im(W_\nu),\ \Re(W'_\nu),\ \Im(W'_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{27a}$$

und zwar in dieser letzteren Form augenscheinlich mit reellen Koeffizienten.

Schließlich geht der Flächensatz (16) durch die Transformation (18) über in

$$\Im\Big(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\, U'_\nu - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\Big(m_0 V' + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U'_\nu\Big) + \lambda Q\Big) = k_2,$$

wo Q ein Polynom der Größen (25) und k_2 wieder eine willkürliche Konstante ist ($k_2 = \lambda k_1$). Führt man auch hier wieder die W_ν an Stelle der U_ν ein, so kommt schließlich

$$\boxed{\Im\Big(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu} W'_\nu - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W'_\nu + \lambda Q_1\Big) = k_2}, \tag{28}$$

wo auch Q_1 ein Polynom der Größen (27) bzw. (27a) ist.

Bei den Konstanten h_2 und k_2 in (26) und (28) ist zu beachten, daß sie nur von τ unabhängig sind, aber keineswegs von λ; sie stellen einfach den Wert der linken Gleichungsseite für den Anfangswert $\tau = 0$ dar.

§ 3.

Integration durch Reihen.

I. Es handelt sich jetzt um die Integration des Systems (23), (24) oder, was dasselbe ist: (23a), (24a). Speziell für $\lambda = 0$ hat dieses System u. a. die Lösung

$$V = e^{i\beta\tau}, \quad W_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

die die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ hat und deren Anfangswerte für $\tau = 0$ die folgenden sind:

$$V(0) = 1, \quad V'(0) = i\beta,$$
$$W_\nu(0) = 0, \quad W_\nu'(0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun läßt sich die Lösung des Systems (23a), (24a), also des Systems (23), (24) mit den modifizierten Anfangswerten

$$V(0) = 1 + \delta_0, \quad V'(0) = i\beta + \varepsilon_0,$$
$$W_\nu(0) = \delta_\nu, \quad W_\nu'(0) = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

bekanntlich[8]) in Reihen nach Potenzen der δ_ν, ε_ν und λ entwickeln, die für hinreichend kleine Werte von $|\delta_\nu|$, $|\varepsilon_\nu|$, $|\lambda|$ absolut konvergieren; und zwar gilt das für ein beliebig langes Intervall von τ, gewiß etwa im Intervall $0 \leqq \tau \leqq \frac{2\pi}{\beta}$, wenn nur $|\delta_\nu|$, $|\varepsilon_\nu|$, $|\lambda|$ klein genug sind. Wählen wir daher speziell die Anfangswerte[9])

$$(29) \qquad \begin{aligned} V(0) &= 1 + a\lambda^3, \quad V'(0) = i\beta + i\beta b\lambda^3, \\ W_\nu(0) &= c_\nu\lambda, \qquad W_\nu'(0) = i d_\nu \lambda^4 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

wo die a, b, c_ν, d_ν beliebige (später noch genauer zu bestimmende) komplexe Konstanten sind, so läßt sich die Lösung für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ nach Potenzen von λ entwickeln:

$$(30) \qquad V = e^{i\beta\tau}\Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_r(\tau)\lambda^r\Big),$$

$$(31) \qquad W_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} g_{\nu r}(\tau)\lambda^r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Anfangswerte der Funktionen f_r, $g_{\nu r}$ sind dabei wegen (29) die folgenden:

$$(32) \qquad \begin{cases} f_3(0) = a, & f_r(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 3, \\ f_3'(0) = i\beta(b-a), & f_r'(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 3, \end{cases}$$

$$(33) \qquad \begin{cases} g_{\nu 1}(0) = c_\nu, & g_{\nu r}(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 1, \\ g_{\nu 4}'(0) = i d_\nu, & g_{\nu r}'(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 4. \end{cases}$$

---

[8]) Vgl. etwa meine Arbeit: Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte, Math. Annalen **118** (1936), S. 292—303.

[9]) In meinen früheren Arbeiten habe ich bei $W_\nu'(0)$ den Exponenten von λ gleich 7 statt 4 gewählt. Das würde auch jetzt zum Ziele führen, nur ist die Rechnung mit dem Exponenten 4 diesmal etwas bequemer. Alles läuft auf das gleiche hinaus; in Wahrheit werden nämlich die erst später aus den Periodizitätsbedingungen richtig zu berechnenden $W_\nu'(0)$ mit λ von mindestens siebenter Ordnung unendlich klein (was sich natürlich nicht voraussehen läßt), d. h. also die jetzigen d_ν noch mindestens von dritter Ordnung.

Mit Rücksicht auf diese Anfangswerte erkennt man sofort, daß bei Einsetzen des Ansatzes (30), (31) in die Gleichungen (23a), (24a) die $f_r(\tau)$, $g_{\nu r}(\tau)$ Polynome von

(34) $$a, \bar{a}, b, \bar{b}, c_\nu, \bar{c}_\nu, d_\nu, \bar{d}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, oder, was dasselbe sagt, von

(34a) $$\Re(a), \Im(a), \Re(b), \Im(b), \Re(c_\nu), \Im(c_\nu), \Re(d_\nu), \Im(d_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

II. Wir wollen jetzt die Koeffizienten $f_r(\tau)$, $g_{\nu r}(\tau)$ in (30) und (31) wirklich berechnen, soweit es für unsere Zwecke nötig ist. Ganz leicht ist die Berechnung von $g_{\nu r}(\tau)$ für $r \leqq 7$. Setzt man nämlich die Reihen (30) und (31) in (24a) ein, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^7$ der Reihe nach:

$$g''_{\nu 1} = 0, \quad g''_{\nu 2} = 0, \quad g''_{\nu 3} = 0, \quad g''_{\nu 4} + 2i\alpha g'_{\nu 1} = 0,$$
$$g''_{\nu 5} + 2i\alpha g'_{\nu 2} = 0, \quad g''_{\nu 6} + 2i\alpha g'_{\nu 3} = 0,$$

$$g''_{\nu 7} + 2i\alpha g'_{\nu 4} - \alpha^2 g_{\nu 1} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{g_{\mu 1} - g_{\nu 1}}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{\overline{g_{\mu 1}} - \overline{g_{\nu 1}}}{\overline{a_\mu} - \overline{a_\nu}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{g_{\mu 1}}{a_\mu} + 3\frac{\overline{g_{\mu 1}}}{\overline{a_\mu}}\right) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{g_{\nu 1}}{a_\nu} + 3\frac{\overline{g_{\nu 1}}}{\overline{a_\nu}}\right).$$

Hieraus folgt durch Integration mit Rücksicht auf die durch (33) vorgeschriebenen Anfangswerte:

$$g_{\nu 1}(\tau) = c_\nu, \quad g_{\nu 2}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 3}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 4}(\tau) = i d_\nu \tau,$$
$$g_{\nu 5}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 6}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 7}(\tau) = (K_\nu + 2\alpha d_\nu)\frac{\tau^2}{2},$$

wobei

(35) $$K_\nu = \alpha^2 c_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{c_\mu - c_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{\overline{c_\mu} - \overline{c_\nu}}{\overline{a_\mu} - \overline{a_\nu}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{c_\mu}{a_\mu} + 3\frac{\overline{c_\mu}}{\overline{a_\mu}}\right) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{c_\nu}{a_\nu} + 3\frac{\overline{c_\nu}}{\overline{a_\nu}}\right).$$

Also ist schließlich

(36) $$W_\nu = c_\nu \lambda + i d_\nu \tau \lambda^4 + (K_\nu + 2\alpha d_\nu)\frac{\tau^2}{2}\lambda^7 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

III. Umständlicher ist die Berechnung der Funktionen $f_r(\tau)$, die wir bis zum Index $r = 6$ benötigen werden. Wir machen zunächst die Transformation

(37) $$V = e^{i\beta\tau} P,$$

wobei dann nach (30)

$$P = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_r(\tau)\,\lambda^r \tag{38}$$

ist. Dadurch geht die Gleichung (23a) über in

$$P'' + 2i\beta P' - \beta^2 P + 2i\alpha\lambda^3 (P' + i\beta P) - \alpha^2\lambda^6 P$$
$$= -\beta^2 \frac{P}{|P|^3} + \frac{\lambda^6}{2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} \left(\frac{P}{a_\mu} + 3\, e^{-2i\beta\tau} \frac{\overline{P}}{\overline{a_\mu}} \right) + e^{-i\beta\tau} \sum_{r=8}^{\infty} F_r \lambda^r \tag{39}$$

Setzt man hier für P die Reihe (38) ein, so ergibt der Koeffizientenvergleich von λ:

$$f_1'' + 2i\beta f_1' - \beta^2 f_1 = \tfrac{1}{2}\beta^2 (f_1 + 3\bar{f}_1).$$

Mit Rücksicht auf die in (32) vorgeschriebenen Anfangswerte folgt hieraus

$$f_1(\tau) = 0. \tag{40}$$

Unter Berücksichtigung dieses Resultats liefert sodann der Koeffizientenvergleich von λ^2 für f_2 genau dieselbe Differentialgleichung, die sich soeben für f_1 ergab, und mit Rücksicht auf die Anfangswerte ist auch wieder

$$f_2(\tau) = 0. \tag{41}$$

Genau so liefert alsdann auch der Koeffizientenvergleich von λ^4, λ^5, λ^7 der Reihe nach die Formeln

$$f_4(\tau) = 0, \quad f_5(\tau) = 0, \quad f_7(\tau) = 0, \tag{42}$$

von denen wir die letzte übrigens nicht mehr brauchen.

Der Koeffizientenvergleich von λ^3 ergibt dagegen:

$$f_3'' + 2i\beta f_3' - \beta^2 f_3 - 2\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\beta^2 (f_3 + 3\bar{f}_3), \tag{43}$$

und schließlich der von λ^6:

$$f_6'' + 2i\beta f_6' - \beta^2 f_6 + 2i\alpha (f_3' + i\beta f_3) - \alpha^2$$
$$= \frac{1}{2}\beta^2 \left(f_6 + 3\bar{f}_6 - \frac{3}{4} f_3^2 - \frac{3}{2} f_3 \bar{f}_3 - \frac{15}{4} \bar{f}_3^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} \left(\frac{1}{a_\mu} + 3\, e^{-2i\beta\tau} \frac{1}{\overline{a_\mu}} \right). \tag{44}$$

IV. Die Gleichung (43) kann, wenn man ihre beiden Seiten in den reellen und imaginären Teil zerlegt, nach bekannten Methoden integriert werden. Ihr allgemeines Integral lautet, wie man sofort verifiziert,

$$f_3(\tau) = -\frac{2\alpha}{3\beta} + C_1 i + C_2 (3i\beta\tau - 2) + C_3 (e^{i\beta\tau} - 3\, e^{-i\beta\tau})$$
$$+ C_4 i (e^{i\beta\tau} + 3\, e^{-i\beta\tau}), \tag{45}$$

wobei die C_ν willkürliche *reelle* Konstanten sind. Wegen der durch (32) vorgeschriebenen Anfangswerte muß

$$-\frac{2\alpha}{3\beta}+C_1 i-2C_2-2C_3+4C_4 i=a,$$

$$3i\beta C_2+4i\beta C_3+2\beta C_4=i\beta(b-a)$$

sein; oder, indem man in den reellen und imaginären Teil zerlegt,

$$-\frac{2\alpha}{3\beta}-2C_2-2C_3=\Re(a), \qquad C_1+4C_4=\Im(a),$$

$$3C_2+4C_3=\Re(b-a), \qquad -2C_4=\Im(b-a).$$

Die Auflösung ergibt

$$(46)\quad \begin{cases} C_1=-\Im(a)+2\Im(b), \\ C_2=-\Re(a)-\Re(b)-\frac{4\alpha}{3\beta}, \\ C_3=\frac{1}{2}\Re(a)+\Re(b)+\frac{\alpha}{\beta}, \\ C_4=\frac{1}{2}\Im(a)-\frac{1}{2}\Im(b). \end{cases}$$

Wir werden die Formel (45) und die durch Differentiation daraus entstehende Formel speziell für den Wert $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$ brauchen:

$$(47)\quad \begin{cases} f_3\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-f_3(0)=6i\pi C_2, \\ f_3'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-f_3'(0)=0. \end{cases}$$

V. Nun ist noch die Gleichung (44) zu integrieren, die wir in die Gestalt

$$(48)\qquad f_6''+2i\beta f_6'-\tfrac{3}{2}\beta^2(f_6+\bar{f}_6)=p$$

setzen; dabei ist p bereits bekannt, nämlich

$$(49)\quad p=-\frac{3\beta^2}{8}(f_3^2+2f_3\bar{f}_3+5\bar{f}_3^2)-2i\alpha(f_3''+i\beta f_3)+\alpha^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{1}{a_\mu}+3e^{-2i\beta\tau}\frac{1}{\bar{a}_\mu}\right).$$

Die Gleichung (48) kann wieder nach bekannten Methoden unter Berücksichtigung der Anfangswerte $f_6(0)=0$, $f_6'(0)=0$ integriert werden; doch wird das nur zum Teil nötig sein. Schreibt man neben (48) noch die Gleichung für die konjugiert-komplexen Größen hin, so erhält man durch Addition und Subtraktion

$$(50)\qquad (f_6+\bar{f}_6)''+2i\beta(f_6-\bar{f}_6)'-3\beta^2(f_6+\bar{f}_6)=p+\bar{p},$$

$$(51)\qquad (f_6-\bar{f}_6)''+2i\beta(f_6+\bar{f}_6)'=p-\bar{p}.$$

Aus (51) folgt durch Integration von 0 bis τ

$$(52) \qquad (f_6 - \bar{f}_6)' + 2i\beta(f_6 + \bar{f}_6) = \int_0^\tau (p - \bar{p})\,d\tau,$$

und wenn man diese Gleichung nach Multiplikation mit $2i\beta$ von (50) subtrahiert, erhält man weiter

$$(53) \qquad (f_6 + \bar{f}_6)'' + \beta^2(f_6 + \bar{f}_6) = q,$$

wobei q bekannt ist, nämlich

$$(54) \qquad q = p + \bar{p} - 2i\beta \int_0^\tau (p - \bar{p})\,d\tau.$$

Integration der Differentialgleichung (53) unter Berücksichtigung der Anfangswerte $f_6(0) = 0$, $f_6'(0) = 0$ ergibt:

$$(55) \qquad f_6 + \bar{f}_6 = \frac{1}{2i\beta} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau - \frac{1}{2i\beta} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau,$$

$$(56) \qquad (f_6 + \bar{f}_6)' = \frac{1}{2} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau + \frac{1}{2} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau.$$

Aus (52) und der mit $2i\beta$ multiplizierten Formel (55) folgt durch Subtraktion

$$(57) \qquad (f_6 - \bar{f}_6)' = \int_0^\tau (p - \bar{p})\,d\tau - e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau + e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau$$

und, indem man (57) zu (56) addiert, ergibt sich schließlich

$$(58) \qquad f_6' = \tfrac{1}{2} \int_0^\tau (p - \bar{p})\,d\tau - \tfrac{1}{4} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau + \tfrac{3}{4} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau.$$

Weiter brauchen wir die Integration nicht durchzuführen. Wir werden nur die Formeln benötigen, die aus (55) und (58) für den Spezialwert $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ hervorgehen:

$$(59) \qquad f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)} = \frac{1}{2i\beta} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau - \frac{1}{2i\beta} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau,$$

$$(60) \qquad f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} (p - \bar{p})\,d\tau - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{-i\beta\tau}\,d\tau + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{i\beta\tau}\,d\tau.$$

VI. Nun sind noch für p und q die Werte einzusetzen und die Integrale auszuwerten. p und q erweisen sich als Polynome zweiten Grades von C_1, C_2, C_3, C_4; jedoch werden wir nur die linearen Glieder benötigen und von diesen wieder das Glied mit C_2 nicht. Wir wollen daher von jetzt an nur noch

$$\text{modulo } C_2,\ C_1^2,\ C_3^2,\ C_4^2,\ C_1 C_3,\ C_1 C_4,\ C_3 C_4$$

rechnen und uns dabei des Kongruenzzeichens $\equiv$ bedienen. Nach (45) ist

$$f_3(\tau) \equiv -\frac{2\alpha}{3\beta} + C_1 i + C_3 (e^{i\beta\tau} - 3e^{-i\beta\tau}) + C_4 i (e^{i\beta\tau} + 3e^{-i\beta\tau})$$

und entsprechend sieht $\overline{f_3(\tau)}$ aus, wobei zu beachten ist, daß die C_ν reell sind. Setzt man das in (49) ein, so erhält man

$$p \equiv -4\alpha\beta (C_3 + iC_4) e^{i\beta\tau} + A_1 + (A_2 + A_3 i) e^{-2i\beta\tau},$$

wobei A_1, A_2, A_3 reelle Konstanten sind, die nur von den m_ν und a_ν abhängen und auf deren genauen Wert es nicht ankommen wird. Durch Einsetzen dieses Resultats in (54) kommt weiter

$$q \equiv 4\alpha\beta C_3 (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau} - 4) + 4\alpha\beta C_4 i (e^{i\beta\tau} - e^{-i\beta\tau}) + B_1 + B_2 e^{2i\beta\tau} + B_3 e^{-2i\beta\tau},$$

wo jetzt B_1, B_2, B_3 komplexe Konstanten sind, die wieder nur von den m_ν und a_ν abhängen.

Hiernach können nun die Integrale in (59) und (60) leicht ausgewertet werden und man erhält:

$$f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)} \equiv \frac{8\alpha\pi}{\beta} C_4, \quad \text{also} \quad \Re\left(f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) \equiv \frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4,$$

$$f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) \equiv 4\alpha\pi (C_3 - 2C_4 i).$$

Geht man jetzt von der Kongruenz zur Gleichheit über, so besagen diese Formeln:

$$(61) \qquad \begin{cases} \Re\left(f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = \frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4 + L C_2 + \sum_{rs} L_{rs} C_r C_s, \\ \Re\left(f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = 4\alpha\pi C_3 + L' C_2 + \sum_{rs} L'_{rs} C_r C_s, \\ \Im\left(f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = -8\alpha\pi C_4 + L'' C_2 + \sum_{rs} L''_{rs} C_r C_s, \end{cases}$$

wobei die $L, L', L'', L_{rs}, L'_{rs}, L''_{rs}$ reelle Konstanten sind, die nur von den m_ν und a_ν abhängen und auf deren genauen Wert es nicht ankommen wird.

VII. Nach (30) und der aus (30) durch Differentiation entstehenden Formel ist

$$V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[f_r\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - f_r(0)\right]\lambda^r,$$

$$V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left[f_r'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - f_r'(0)\right]\lambda^r.$$

Setzt man hier die Werte aus (40), (41), (42), (47), (61) ein, so erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Formeln

$$(62)\quad \begin{aligned} \Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) &= \left(\frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4 + L C_2 + \sum_{rs} L_{rs} C_r C_s\right)\lambda^6 + (\lambda^7), \\ \Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) &= 6\pi C_2 \lambda^5 + (\lambda^6), \end{aligned}$$

$$(63)\quad \begin{aligned} &\Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) \\ &\qquad = (4\alpha\pi C_3 + L' C_2 + \sum_{rs} L'_{rs} C_r C_s)\lambda^6 + (\lambda^7), \\ &\Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) \\ &\qquad = (-8\alpha\pi C_4 + L'' C_2 + \sum_{rs} L''_{rs} C_r C_s)\lambda^6 + (\lambda^7). \end{aligned}$$

Dabei steht das Symbol (λ^r) als Abkürzung für eine Potenzreihe von λ, die frühestens mit der Potenz λ^r beginnt und deren Koeffizienten reelle Polynome der Größen (34 a) sind.

§ 4.

Die Periodizitätsbedingungen.

I. Die Lösung (30), (31) des Differentialgleichungssystems (23), (24) hat speziell für $\lambda = 0$ die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$. Sie wird auch, da in den Differentialgleichungen die unabhängige Variable τ nicht vorkommt, bei beliebigem (absolut hinreichend kleinem) λ diese Periode haben, wenn die Bedingungen

$$(64)\quad \begin{cases} V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0) = 0, & V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) = 0, \\ W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0) = 0, & W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu'(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

erfüllt sind. Die ihr vermöge der Transformationen (18) und (22) entsprechende Lösung des ursprünglichen Systems (14) hat dann die Periode

$= \frac{2\pi}{\beta}\lambda^3$. Es fragt sich also, ob man die in (29) eingeführten kom-
lexen Konstanten a, b, c_ν, d_ν so als Funktionen von λ bestimmen kann,
aß die Bedingungen (64) erfüllt sind. Es sind das aber nicht, wie es
cheinen könnte, $2+2n$ Gleichungen für die $2+2n$ Unbekannten a,
, c_ν, d_ν; denn in (64) treten auch die konjugiert-komplexen Größen
, $\bar{b}$, $\bar{c}_\nu$, $\bar{d}_\nu$ auf. Man muß daher die Gleichungen (64) in ihre reellen
nd imaginären Teile zerlegen und hat dann $4+4n$ Gleichungen für
ie $4+4n$ reellen Unbekannten (34a). Statt der ersten vier Un-
ekannten $\Re(a)$, $\Im(a)$, $\Re(b)$, $\Im(b)$ kann man vermöge der eindeutig um-
ehrbaren Formeln (46) auch die Größen C_1, C_2, C_3, C_4 einführen, so
aß man die folgenden $4+4n$ Unbekannten hat:

65) $$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ \Re(c_\nu),\ \Im(c_\nu),\ \Re(d_\nu),\ \Im(d_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Führt man jetzt in den Periodizitätsbedingungen (64) die Trennung
es Reellen vom Imaginären wirklich durch, so gehen sie nach (62), (63)
nd (36), wenn man überflüssige Potenzen von λ unterdrückt, über in:

66)
$$\begin{cases} \frac{4\alpha\pi}{\beta}C_4 + LC_2 + \sum_{rs} L_{rs}C_rC_s + (\lambda) = 0, \\ 6\pi C_2 + (\lambda^3) = 0, \\ 4\alpha\pi C_3 + L'C_2 + \sum_{rs} L'_{rs}C_rC_s + (\lambda) = 0, \\ -8\alpha\pi C_4 + L''C_2 + \sum_{rs} L''_{rs}C_rC_s + (\lambda) = 0, \end{cases}$$

67) $$\Re(d_\nu) + (\lambda^3) = 0, \qquad \Im(d_\nu) + (\lambda^3) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

68) $$\Re(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0, \qquad \Im(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese $4+4n$ Gleichungen haben nun, wenn man für die K_ν die
Werte aus (35) einsetzt, speziell für $\lambda = 0$ die Lösung: Alle $4+4n$
Unbekannten (65) sind gleich 0. Aber das ist nicht die einzige Lösung
nd man kann nicht schließen, daß für kleine $|\lambda|$ benachbarte Lösungen
orhanden sind; denn die Funktionaldeterminante verschwindet für das
agliche Wertsystem. In der Tat zerfällt sie in folgende drei Faktoren:
unächst die vierreihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (66) in
ezug auf die C_ν[10]); aber diese verschwindet für $C_\nu = 0$, weil C_1 gar
icht linear vorkommt. Sodann kommt ein aus den $2n$ Gleichungen (67)
errührender Faktor, die Funktionaldeterminante dieser $2n$ Gleichungen
ach den $2n$ Größen $\Re(d_\nu)$, $\Im(d_\nu)$; dieser Faktor ist offenbar gleich 1,

[10]) Natürlich ist es nicht so, daß in den vier Gleichungen (66) bloß die vier
nbekannten C_ν vorkommen; vielmehr werden in den durch die Symbole (λ)
nd (λ^3) angedeuteten Potenzreihen alle $4+4n$ Unbekannten vorkommen. Aber
e Funktionaldeterminante interessiert uns ja nur für $\lambda = 0$.

also von 0 verschieden. Dann kommt noch ein aus den $2n$ Gle chungen (68) herrührender Faktor, der sich seinerseits zusammenset aus der Funktionaldeterminante dieser Gleichungen nach den $2n$ Größe $\Re(K_\nu)$, $\Im(K_\nu)$ (dieser Faktor ist wieder gleich 1) und der Funktiona determinante der Größen $\Re(K_\nu)$, $\Im(K_\nu)$ nach den $\Re(c_\mu)$, $\Im(c_\mu)$. Die letzte ist, von einem nicht verschwindenden Faktor abgesehen, offenb identisch mit der Funktionaldeterminante der $2n$ Größen K_ν, $\overline{K_\nu}$ nac den c_μ, $\overline{c_\mu}$. Aber diese verschwindet; denn die $2n$ linearen homogene Gleichungen $K_\nu = 0$, $\overline{K_\nu} = 0$ für die $2n$ Unbekannten c_μ, $\overline{c_\mu}$ haben d nicht triviale Auflösung $c_\mu = i a_\mu$, $\overline{c_\mu} = -i\overline{a_\mu}$, weil ja für diese Spezia werte nach (35)

$$K_\nu = i\Big[\alpha^2 a_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\cdot(-2) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\cdot(-2)\Big],$$

also nach (17) gleich 0 ist und entsprechend auch $\overline{K_\nu} = 0$.

Damit ist zunächst bestätigt, was über die Funktionaldeterminan in der Einleitung gesagt wurde. Nun handelt es sich um die Übe windung der Schwierigkeit auf dem dort skizzierten Weg.

II. Wir dürfen und wollen annehmen, daß die Größe

$$k = a_n - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu a_\nu \tag{69}$$

von 0 verschieden ist. Denn für $n = 1$ trifft das von selbst zu, f $n > 1$ kann es nötigenfalls durch Umnumerierung der a_ν erreicht werde weil ja die a_ν voneinander verschieden sind. Dann ist die Periodizität bedingung $W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_n'(0) = 0$ gleichbedeutend mit

$$\bar{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_n'(0)\right] = 0.$$

Hiernach schreiben wir die sämtlichen Periodizitätsbedingungen (6 noch einmal unter Trennung des Reellen vom Imaginären in folgend Weise auf:

(A) $$\Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0,$$

(B) $\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0$, $\Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) = 0$, $\Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) =$

(C) $\Re\left(W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0)\right) = 0$, $\Im\left(W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0)\right) = 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots,$

$$\left\{\begin{aligned} &\Re\left(W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_\nu'(0)\right)=0,\quad \Im\left(W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_\nu'(0)\right)=0,\quad (\nu=1,2,\ldots,n-1),\\ &\Re\left(\bar{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_n'(0)\right]\right)=0,\\ &\Im\left(\bar{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_n'(0)\right]\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Nun nehmen wir einmal an, es sei gelungen, die $4+4n$ Unkannten (65) derart als analytische Funktionen von λ (für hinreichend eines $|\lambda|$) zu wählen, daß wenigstens die $2+4n$ Bedingungen (B), (C),) erfüllt sind; wir wollen zeigen, daß dann von selbst auch die Bengungen (A) und (E) erfüllt sind. In der Tat ist zunächst nach (30)

$$V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)=1+(\lambda) \qquad [\text{sogar } 1+(\lambda^3)].$$

erner sind nach dem Energiesatz (26) und dem Flächensatz (28) die eiden Ausdrücke

$$\frac{m_0 m_{n+1}}{\beta^2}|V'|^2+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu|W_\nu'|^2-\frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W_\nu'\right|^2-2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|}+\lambda P_1,$$

$$\Im\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu \overline{a_\nu} W_\nu'-\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu W_\nu'+m_n \bar{k} W_n'+\lambda Q_1\right)$$

nabhängig von τ. Dabei sind P_1, Q_1 Potenzreihen der Argumente (27). tatt dessen kann man außer λ augenscheinlich auch die folgenden rgumente einführen:

$$\left\{\begin{aligned} &\Re(V),\quad \Im(V),\quad \Re(V'),\quad \Im(V'),\\ &\Re(W_\nu),\quad \Im(W_\nu) && (\nu=1,2,\ldots,n),\\ &\Re(W_\nu'),\quad \Im(W_\nu') && (\nu=1,2,\ldots,n-1),\\ &\Re(\bar{k}W_n'),\quad \Im(\bar{k}W_n'), \end{aligned}\right.$$

nd auch die übrigen Terme in (71) und (72) kann man als Funktionen ieser Größen aufbauen.

Nun sind die Größen (73) speziell für $\tau=0$ nach (29) bekannt. Von der ersten und letzten abgesehen haben sie aber, weil die Bedingungen (B), (C), (D) erfüllt sind, für $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$ denselben bekannten Wert wie für $\tau=0$. Bildet man daher die von τ unabhängigen Ausdrücke (71) und (72) zuerst für $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$, dann für $\tau=0$ und setzt die Differenzen gleich 0, so erhält man ein Gleichungspaar für die allein noch unbekannten Größen

$$x=\Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right),\qquad y=\Im\left(\bar{k}W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right),$$

wobei x wegen (70) die Form $1 + (\lambda)$ hat. Dieses Gleichungspaar ist wenn zur Abkürzung

$$\Re(V(0)) = 1 + \Re(a)\lambda^3 = \gamma,$$

$$\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = \Im(V(0)) = \Im(a)\lambda^3 = \delta$$

gesetzt wird, mit Rücksicht auf $W_\nu'(0) = d_\nu \lambda^4$ von der Gestalt

$$(75)\quad \begin{cases} \dfrac{m_n y^2}{|k|^2} - \dfrac{1}{M}\dfrac{m_n^2 y^2}{|k|^2} - 2\dfrac{m_0 m_{n+1}}{\sqrt{x^2+\delta^2}} + 2\dfrac{m_0 m_{n+1}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} + \lambda\Phi(\lambda, x, y) = 0, \\ y + \lambda\Psi(\lambda, x, y) = 0, \end{cases}$$

wo Φ und Ψ Potenzreihen der drei Argumente sind, und läßt nach der Entstehungsweise gewiß die Auflösung

$$(76)\qquad x = \Re(V(0)) = 1 + \Re(a)\lambda^3, \qquad y = \Im(\bar{k} W_n'(0))$$

zu. Wenn sich zeigen läßt, daß es keine andere Lösung gibt, bei der x die Form $1 + (\lambda)$ hat, so besagt das, weil ja x und y die in (74) angegebene Bedeutung haben, daß die Bedingungen (A) und (E) erfüllt sind. Nun hat das Gleichungspaar (75) speziell für $\lambda = 0$ nur die beiden Auflösungen[11])

$$y = 0, \qquad x = \pm\gamma = \pm 1,$$

und die Funktionaldeterminante ist für beide augenscheinlich von 0 verschieden. Daher gibt es für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ eindeutig bestimmte benachbarte Lösungen, aber nur bei dem oberen Vorzeichen hat x die Form $1 + (\lambda)$. Es gibt also *nur eine* solche Auflösung. Der Beweis, daß bei Erfülltsein der Bedingungen (B), (C), (D) von selbst auch die Bedingungen (A) und (E) erfüllt sind, ist damit erbracht.

III. Nun handelt es sich noch um die Erfüllbarkeit der Bedingungen (B), (C), (D). Die drei Bedingungen (B) sind offenbar den folgenden drei gleichwertig:

$$\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0, \qquad \Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) = 0,$$

$$\Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) = 0.$$

Wenn man hier die Werte aus (62) und (63) einsetzt, ergibt sich nach Unterdrückung überflüssiger Potenzen von λ:

$$(B^*)\quad \begin{cases} 6\pi C_2 + (\lambda^3) = 0, \\ -4\alpha\pi C_4 + (L'' + \beta L) C_2 + \sum_{rs} (L_{rs}'' + \beta L_{rs}) C_r C_s + (\lambda) = 0, \\ 4\alpha\pi C_3 + L' C_2 + \sum_{rs} L_{rs}' C_r C_s + (\lambda) = 0. \end{cases}$$

[11]) Hier ist wesentlich, daß wir die m_ν, insbesondere m_0, als *positiv* vorausgesetzt haben. Für das *eingeschränkte* Problem ($m_0 = 0$) gilt die Sache nicht.

Die Bedingungen (C) nehmen nach (36) wieder die Gestalt (67) an; wir schreiben sie neu:

$$\text{(C*)} \qquad \Re(d_\nu) + (\lambda^3) = 0, \qquad \Im(d_\nu) + (\lambda^3) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Entsprechend haben die Bedingungen (D) zunächst die Form

$$\Re(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0, \quad \Im(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\Re(\bar{k}(K_n + 2\alpha d_n)) + (\lambda) = 0.$$

Sie reduzieren sich vermöge (C*) auf[12])

$$\text{(D*)} \qquad \begin{cases} \Re(K_\nu) + (\lambda) = 0, \quad \Im(K_\nu) + (\lambda) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Re(\bar{k} K_n) + (\lambda) = 0. \end{cases}$$

IV. Jetzt wollen wir gemäß der Einleitung eine Unbekannte fest und eine willkürlich wählen. Wir wählen fest:

$$\text{(77)} \qquad \Im(a) = 0;$$

das besagt lediglich, daß $V(0)$, also nach (18) auch $u_0(0)$, reell und positiv ist, daß also zur Anfangszeit $t = 0$ die Richtung vom Punkt m_{n+1} nach dem ihn umlaufenden Punkt m_0 die der positiven reellen Achse (im rotierenden System) ist, bedeutet also keine Beschränkung der Allgemeinheit. Die Wahl (77) besagt, wenn man sie mit Hilfe von (46) auf die C_ν überträgt, soviel wie

$$\text{(77a)} \qquad C_1 = -4C_4;$$

von den vier Unbekannten C_ν fällt also C_1 weg.

Sodann wählen wir $\Re(c_\varkappa)$ oder $\Im(c_\varkappa)$ für irgendeinen der Werte $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ willkürlich, indem wir

$$\text{(78)} \qquad \text{entweder} \quad \Re(c_\varkappa) = \varrho\,\Re(a_\varkappa i) \quad \text{oder} \quad \Im(c_\varkappa) = \varrho\,\Im(a_\varkappa i)$$

setzen und ϱ als zweiten reellen Parameter einführen. Damit das wirklich eine Willkürlichkeit bedeutet, muß

$$\text{(79)} \qquad \Re(a_\varkappa i) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \Im(a_\varkappa i) \neq 0$$

vorausgesetzt werden; wenigstens eine dieser Bedingungen ist von selbst erfüllt, weil $a_\varkappa \neq 0$ ist. Alsdann bleiben von den $4 + 4n$ Unbekannten noch die folgenden $2 + 4n$ übrig:

$$C_2, \quad C_3, \quad C_4,$$
$$\Re(d_\nu), \quad \Im(d_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Re(c_\nu), \quad \Im(c_\nu) \qquad (\text{außer } \Re(c_\varkappa) \text{ bzw. } \Im(c_\varkappa)),$$

die den $2 + 4n$ Gleichungen (B*), (C*), (D*) genügen müssen. Die in (D*) auftretenden Größen K_ν sind dabei durch (35) gegeben.

---

[12]) Man beachte, daß nach (C*) ja insbesondere $\Re(d_n) + (\lambda^3) = 0$ und $\Im(d_n) + (\lambda^3) = 0$ ist; also auch $d_n + (\lambda^3) = 0$ und folglich $\bar{k} d_n + (\lambda^3) = 0$. Daher ist gewiß $\Re(\bar{k} d_n) + (\lambda^3) = 0$.

Speziell für $\lambda = 0$ haben diese Gleichungen wegen (78) und weil die K_ν, $\overline{K_\nu}$, also auch die Größen

$$\Re(K_\nu), \quad \Im(K_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\Re(\bar{k} K_n)$$

für $c_\nu = \varrho a_\nu i$, $\overline{c_\nu} = -\varrho \overline{a_\nu} i$ verschwinden (vgl. S. 612), die Lösung

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0,$$
$$\Re(d_\nu) = 0, \quad \Im(d_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Re(c_\nu) = \varrho\, \Re(a_\nu i), \quad \Im(c_\nu) = \varrho\, \Im(a_\nu i) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei von den $2n$ Formeln der letzten Zeile sich eine mit (78) deckt und nur die $2n-1$ übrigen die Lösung des Gleichungssystems betreffen. Die Funktionaldeterminante zerfällt wieder in drei Faktoren: Zunächst die dreireihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (B*) nach C_2, C_3, C_4; diese ist gleich $6\pi(4\alpha\pi)^2$, also $\neq 0$. Sodann die $(2n)$-reihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (C*) nach den Größen $\Re(d_\nu)$, $\Im(d_\nu)$; diese ist gleich 1, also wieder $\neq 0$. Schließlich kommt die $(2n-1)$-reihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (D*) nach den Größen

(80) $$\Re(c_\nu), \quad \Im(c_\nu) \quad \text{außer } \Re(c_\varkappa) \text{ bzw. } \Im(c_\varkappa).$$

Das ist die Determinante des linearen homogenen Gleichungssystems

(81) $$\begin{cases} \Re(K_\nu) = 0, \quad \Im(K_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Re(\bar{k} K_n) = 0 \end{cases}$$

mit den Größen (80) als Unbekannten, also diejenige Determinante, die aus der Matrix

(82) $$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Re(c_1)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Re(c_1)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Re(c_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Re(c_n)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Re(c_n)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Re(c_n)} \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Im(c_1)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Im(c_1)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Im(c_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Im(c_n)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Im(c_n)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Im(c_n)} \end{array} \right\|$$

durch Weglassen der $\varkappa$-ten bzw. $(n+\varkappa)$-ten Zeile entsteht. Wir nennen sie die $\varkappa$-te bzw. $(n+\varkappa)$-te *kritische Determinante* und bezeichnen sie mit $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$. *Wenn wenigstens eine der $2n$ kritischen Determinanten, etwa die $\varkappa$-te bzw. $(n+\varkappa)$-te nicht verschwindet, dann ist nach willkürlicher Wahl von $\Re(c_\varkappa)$ bzw. $\Im(c_\varkappa)$ die eindeutige Auflösbarkeit des Gleichungssystems*

B*), (C*), (D*) *und damit die Existenz der zweiparametrigen Schar periodischer Lösungen unseres Differentialgleichungssystems* (14) *gewährleistet.*

Dabei kann man die bisher notwendige Bedingung (79) nachträglich allen lassen; denn beim Nichtverschwinden von $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$ ist von elbst auch $\Re(a_\varkappa i)$ bzw. $\Im(a_\varkappa i)$ von 0 verschieden, also (79) erfüllt. Wenn ämlich $\Re(a_\varkappa i)$ bzw. $\Im(a_\varkappa i)$ verschwindet, so haben die linearen Gleihungen (81) für die Unbekannten (80) die unendlich vielen Auflösungen

$$\Re(c_\nu) = \varrho\,\Re(a_\nu i), \qquad \Im(c_\nu) = \varrho\,\Im(a_\nu i)$$

nit willkürlichem ϱ, so daß auch ihre Determinante verschwindet, das ist ber $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$. Auch die Bedingung $k \neq 0$ (vgl. (69)) kann nachräglich gestrichen werden, weil sie beim Nichtverschwinden einer kritischen Determinante, wie ein Blick auf die letzte Spalte zeigt, von selbst erfüllt ist.

V. Noch muß gezeigt werden, daß die zwei Parameter unserer Lösungsschar wirklich wesentlich sind und sich nicht etwa auf einen reduzieren lassen. Nun haben unsere Lösungen die Periode $t = \frac{2\pi}{\beta}\lambda^3$; ler Parameter λ bestimmt also die Periode. Wenn wir zeigen können, laß bei fester Periode, also bei festem λ, in unseren Lösungen noch mmer eine einparametrige Schar mit dem Parameter ϱ vorhanden ist, o wird die Wesentlichkeit der beiden Parameter dargetan sein. Nun erfüllen unsere Lösungen u. a. die beiden Anfangsbedingungen

$$u_0(0) = \lambda^2 V(0) = \lambda^2(1 + a\lambda^3),$$

$$u_\varkappa(0) - a_\varkappa = \lambda^2 U_\varkappa(0) = \lambda^2\left(\frac{m_0}{\beta^2} V(0) + W_\varkappa(0)\right),$$

lso ist

$$u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_0(0) = \lambda^3 W_\varkappa(0) = \lambda^3 c_\varkappa.$$

Wegen (78) ist also entweder

$$\Re\left(u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_\varkappa(0)\right) = \lambda^3 \varrho\,\Re(a_\varkappa i)$$

oder

$$\Im\left(u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_\varkappa(0)\right) = \lambda^3 \varrho\,\Im(a_\varkappa i).$$

Die Anfangslage enthält also bei festem λ noch immer in dem Parameter ϱ ein willkürliches Element. Daß dabei nicht etwa für verschiedene ϱ die gleichen Bahnkurven, an anderer Stelle beginnend, herauskommen, dafür wurde bereits oben gesorgt, indem durch (77) der Zeitanfang festgelegt wurde.

VI. Zwischen den $2n$ kritischen Determinanten bestehen einige Beziehungen, durch deren Kenntnis die Prüfung, ob eine davon nicht

verschwindet, abgekürzt werden kann. Da die K_ν homogene Polynom ersten Grades der c_μ und $\overline{c_\mu}$, also auch der $\Re(c_\mu)$ und $\Im(c_\mu)$ sind, d für $\Re(c_\mu) = \Re(a_\mu i)$, $\Im(c_\mu) = \Im(a_\mu i)$ verschwinden, gilt die Formel

$$(83)\quad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial K_\nu}{\partial \Re(c_\mu)} \Re(a_\mu i) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} \Im(a_\mu i) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

Wenn man daher der Matrix (82) eine neue Spalte anfügt, die — unter eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ verstanden — in der $\varkappa$-ten und $(n+\varkappa)$-te Zeile die Elemente $\Im(a_\varkappa i)$ und $-\Re(a_\varkappa i)$ und sonst lauter Nullen enthäl so wird die entstehende $(2n)$-reihige Determinante den Wert 0 haben denn wenn man für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ die Elemente der μ-ten Zeile m $\Re(a_\mu i)$ und die der $(n+\mu)$-ten Zeile mit $\Im(a_\mu i)$ multipliziert und dan nach μ summiert, kommt mit Rücksicht auf (83) in jeder Spalte ein Null. Entwickelt man die $(2n)$-reihige Determinante aber nach de Elementen der neu hinzugefügten Spalte, so ergibt sich

$$(84)\quad \Im(a_\varkappa i)\, \Delta_\varkappa - (-1)^n \Re(a_\varkappa i)\, \Delta_{n+\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n$$

Wenn daher bei der Prüfung des Nichtverschwindens sich heraus stellt, daß etwa $\Delta_\varkappa$ verschwindet, und wenn zugleich $\Re(a_\varkappa i) \neq 0$ is so muß von selbst auch $\Delta_{n+\varkappa}$ verschwinden, so daß eine besonder Prüfung sich erübrigt. Analog, wenn ein $\Delta_{n+\varkappa}$ verschwindet und zugleic $\Im(a_\varkappa i) \neq 0$ ist, dann muß auch $\Delta_\varkappa$ verschwinden.

In dem besonderen Fall, daß alle Ruhepunkte in gerader Linie liegen kann man die reelle Achse in diese Linie legen, so daß alle $a_\varkappa$ reell sind Dann ist $\Re(a_\varkappa i) = 0$ und die Formel (84) lehrt, daß dann $\Delta_\varkappa$ verschwindet Man kann sich also auf die Prüfung der n Determinanten $\Delta_{n+\varkappa}$ beschränken Aber auch von diesen braucht nur eine einzige geprüft zu werden; wen sie nämlich verschwindet, so läßt sich zeigen, daß auch alle andere verschwinden. Das beruht auf der (nur für $r \neq s$ interessierenden, abe für $r = s$ trivialerweise auch gültigen) Formel

$$(85)\quad a_s \Delta_{n+r} - (-1)^{r-s} a_r \Delta_{n+s} = 0 \quad \text{(falls alle } a_\varkappa \text{ reell)}$$

Zum Beweis von (85) bemerken wir, daß die Formel (35) im Fall reelle $a_\varkappa$ folgende Gestalt annimmt:

$$K_\nu = \alpha^2 c_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} (c_\mu - c_\nu + 3\overline{c} - 3\overline{c_\nu})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu}{|a_\mu|^3} (c_\mu + 3\overline{c_\mu}) + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{|a_\nu|^3} (c_\nu + 3\overline{c_\nu}$$

Daher ist

$$\frac{1}{i}\frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\nu)} = \alpha^2 - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3}(-1+3) + \frac{1}{2}(m_\nu+\beta^2)\frac{1}{|a_\nu|^3}(1-3)$$

$$= \alpha^2 - \sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_\nu+\beta^2}{|a_\nu|^3},$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} = -\frac{1}{2}\frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3}(1-3) + \frac{1}{2}\frac{m_\mu}{|a_\mu|^3}(1-3)$$

$$= \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_\mu}{|a_\mu|^3} \qquad \text{für } \mu \neq \nu,$$

und daraus folgt sogleich

$$\frac{1}{i}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} = \alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - \beta^2 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3},$$

also gleich 0 nach (17). Wenn man daher der Matrix (82) eine neue Spalte anfügt, die — unter r und s zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ verstanden — in der $(n+r)$-ten und $(n+s)$-ten Zeile die Elemente a_s und $-a_r$ und sonst lauter Nullen enthält, so wird die entstehende $(2n)$-reihige Determinante den Wert 0 haben; denn wenn man für $u = 1, 2, \ldots, n$ die Elemente der $(n+\mu)$-ten Zeile mit a_μ multipliziert und dann nach μ summiert, kommt in jeder Spalte eine Null. Entwickelt man die $(2n)$-reihige Determinante aber nach den Elementen der neu hinzugefügten Spalte, so erhält man gerade die zu beweisende Formel (85).

§ 5.

Die kritischen Determinanten in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$.

I. Im Fall $n = 1$ hat man die kritischen Determinanten

$$\Delta_1 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Im(c_1)}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Re(c_1)}.$$

Nach (17) ist

$$-\alpha^2 a_1 = -\frac{M a_1}{|a_1|^3} \qquad (a_1 \neq 0).$$

Dabei darf a_1 als reell angenommen werden, so daß Δ_1 nach § 4, VI verschwindet. Aber Δ_2 verschwindet nicht. Denn nach (35) ist

$$K_1 = \alpha^2 c_1 + \frac{1}{2}\frac{M}{|a_1|^3}(c_1 + 3\overline{c_1}),$$

also vermöge der vorigen Gleichung

$$K_1 = \alpha^2 c_1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 (c_1 + 3\bar{c}_1) = 3\alpha^2 \Re(c_1).$$

Schließlich ist nach (69)

$$k = a_1 - \frac{m_1 a_1}{M} = \frac{\beta^2}{M} a_1 = \text{reell}.$$

Daher

$$\Delta_2 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Re(c_1)} = \frac{\beta^2}{M} a_1 \cdot 3\alpha^2 \neq 0.$$

Die zweiparametrige Schar existiert also.

II. Im Fall $n = 2$ ist nach (17)

$$(86) \quad \begin{cases} -\alpha^2 a_1 = m_2 \dfrac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|^3} - (m_1 + \beta^2) \dfrac{a_1}{|a_1|^3} - m_2 \dfrac{a_2}{|a_2|^3}, \\ -\alpha^2 a_2 = m_1 \dfrac{a_1 - a_2}{|a_1 - a_2|^3} - (m_2 + \beta^2) \dfrac{a_2}{|a_2|^3} - m_1 \dfrac{a_1}{|a_1|^3}. \end{cases}$$

Wir behandeln zuerst den Fall, daß die drei Ruhepunkte in gerader Linie liegen; dann kann man die a_ν als reell annehmen, so daß Δ_1 und Δ_2 nach § 4, VI verschwinden. Wir betrachten daher die Determinante

$$(87) \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Re(c_1)} \\ \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_2)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_2)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Re(c_2)} \\ \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_2)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_2)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Im(c_2)} \end{vmatrix}.$$

Nach (35) und (69) ist jetzt

$$K_1 = \alpha^2 c_1 - \frac{1}{2} \frac{m_2}{|a_2 - a_1|^3} (c_2 - c_1 + 3\bar{c}_2 - 3\bar{c}_1) + \frac{1}{2} \frac{m_1 + \beta^2}{|a_1|^3} (c_1 + 3\bar{c}_1) + \frac{1}{2} \frac{m_2}{|a_2|^3} (c_2 + 3\bar{c}_2),$$

$$K_2 = \alpha^2 c_2 - \frac{1}{2} \frac{m_1}{|a_1 - a_2|^3} (c_1 - c_2 + 3\bar{c}_1 - 3\bar{c}_2) + \frac{1}{2} \frac{m_2 + \beta^2}{|a_2|^3} (c_2 + 3\bar{c}_2) + \frac{1}{2} \frac{m_1}{|a_1|^3} (c_1 + 3\bar{c}_1),$$

$$k = a_2 - \frac{1}{M} (m_1 a_1 + m_2 a_2) = \text{reell}.$$

In der Determinante Δ_3 kann man daher den reellen Faktor $\bar{k} = k$ herausziehen und erhält dann

$$\Delta_3 = k \begin{vmatrix} \alpha^2 + \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2(m_1+\beta^2)}{|a_1|^3} & 0 & -\frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2m_1}{|a_1|^3} \\ -\frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2m_2}{|a_2|^3} & 0 & \alpha^2 + \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2(m_2+\beta^2)}{|a_2|^3} \\ 0 & \frac{m_3}{|a_2-a_1|^3} - \frac{m_2}{|a_2|^3} & 0 \end{vmatrix} = k\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\Phi,$$

wobei

$$\Phi = \left(\alpha^2 + \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2(m_1+\beta^2)}{|a_1|^3}\right)\left(\alpha^2 + \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2(m_2+\beta^2)}{|a_2|^3}\right) - \left(\frac{2m_2}{|a_2|^3} - \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1|^3} - \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3}\right)$$

$$> \left(\frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2m_1}{|a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2m_2}{|a_2|^3}\right) - \left(\frac{2m_2}{|a_2|^3} - \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1|^3} - \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3}\right)$$

$$= \frac{4m_1^2 + 4m_1m_2}{|a_1|^3|a_1-a_2|^3} + \frac{4m_2^2 + 4m_1m_2}{|a_2|^3|a_1-a_2|^3} > 0.$$

Das Nichtverschwinden von Δ_3 läuft daher auf das Nichtverschwinden des Produkts

$$k\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right) = \frac{1}{M}(Ma_2 - m_1a_1 - m_2a_2)\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)$$

hinaus oder, da der letzte Faktor wegen $a_1 \neq 0$ nur für $a_1 = 2a_2$ verschwindet, auf das Nichtverschwinden des Produkts

$$(Ma_2 - m_1a_2 - m_2a_2)(2a_2 - a_1). \tag{88}$$

Wenn die beiden Ruhepunkte ihre Rollen tauschen, ergibt sich das Produkt

$$(Ma_1 - m_1a_1 - m_2a_2)(2a_1 - a_2). \tag{88 a}$$

Die zweiparametrige Schar wird daher gesichert sein, wenn wenigstens eines der beiden Produkte nicht verschwindet. Falls nun $a_1 \neq 2a_2$ und auch $a_2 \neq 2a_1$ ist, trifft das sicher zu, weil die beiden ersten Faktoren der Produkte voneinander verschieden sind, also nicht beide zugleich verschwinden können. Falls aber etwa $a_1 = 2a_2$ ist, ergibt sich aus (86) durch Elimination von α^2 nach leichter Rechnung: $\beta^2 = m_1$; daher ist

$$M - m_1 = m_2 + \beta^2 = m_2 + m_1$$

und folglich das Produkt (88a) gleich

$$[(M - m_1)\,2a_2 - m_2 a_2]\,3a_2 = [(m_2 + m_1)\,2a_2 - m_2 a_2]\,3a_2$$
$$= (2m_1 + m_2)\,3a_2^2 > 0.$$

Im Fall $a_2 = 2a_1$ tauschen die Ruhepunkte ihre Rolle, so daß in jedem Fall eines der Produkte (88), (88a) nicht verschwindet, womit die Existenz der zweiparametrigen Schar gesichert ist.

III. Jetzt kommt noch der Fall, daß die drei Ruhepunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden. Wenn wir die Dreieckseite als Längeneinheit wählen, ist $|a_1| = |a_2| = |a_1 - a_2| = 1$. Durch geeignete Numerierung der a_ν und Wahl der reellen Achse kann man weiter erreichen, daß

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \tag{89}$$

ist. Jede der Gleichungen (86) ergibt dann

$$\alpha^2 = m_1 + m_2 + \beta^2 = M. \tag{90}$$

Die Gleichungen (35) gehen über in

$$K_1 = \alpha^2 c_1 - \frac{m_2}{2}(c_2 - c_1 - 3\bar{c}_2 + 3\bar{c}_1) + \frac{m_2}{2}\left(c_2 + 3\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\bar{c}_2\right)$$
$$+ \frac{m_1+\beta^2}{2}\left(c_1 + 3\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\bar{c}_1\right),$$

$$K_2 = \alpha^2 c_2 - \frac{m_1}{2}(c_1 - c_2 - 3\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2) + \frac{m_1}{2}\left(c_1 + 3\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\bar{c}_1\right)$$
$$+ \frac{m_2+\beta^2}{2}\left(c_2 + 3\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,\bar{c}_2\right),$$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung von (90):

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial K_1}{\partial \Re(c_1)} &= \alpha^2 - m_2 + \frac{m_1+\beta^2}{2}\left(1 + 3\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1+\beta^2)(\sqrt{3}+i), \\
\frac{\partial K_1}{\partial \Re(c_2)} &= m_2 + \frac{m_2}{2}\left(1 + 3\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2(\sqrt{3}-i), \\
\frac{\partial K_1}{\partial \Im(c_2)} &= -2m_2 i + \frac{m_2}{2}i\left(1 - 3\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}m_2(-1-\sqrt{3}\,i),
\end{aligned}\right. \tag{91}$$

$$92)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial K_2}{\partial \Re(c_1)} = m_1 + \dfrac{m_1}{2}\left(1 + 3\,\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,m_1(\sqrt{3}+i), \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial \Re(c_2)} = \alpha^2 - m_1 + \dfrac{m_2+\beta^2}{2}\left(1 + 3\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \qquad\qquad = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,(m_2+\beta^2)(\sqrt{3}-i), \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial \Im(c_2)} = \alpha^2 i + 2\,m_1 i + \dfrac{m_2+\beta^2}{2}\left(i - 3i\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \qquad\qquad = 3\,m_1 i + \dfrac{3}{4}\,(m_2+\beta^2)(i-\sqrt{3}). \end{cases}$$

Weiter ist nach (69) und (89)

$$\bar{k} = \bar{a}_2 - \frac{1}{M}(m_1\bar{a}_1 + m_2\bar{a}_2) = \frac{1}{2M}[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2 + 2m_1)i].$$

Multipliziert man hiermit die Formeln (92), so kommt

$$93)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Re(c_1)} = \dfrac{3\sqrt{3}\,m_1}{8M}(\sqrt{3}+i)[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2+2m_1)i], \\ \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Re(c_2)} = \dfrac{3\sqrt{3}\,(m_2+\beta^2)}{8M}(\sqrt{3}-i)[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2+2m_1)i], \\ \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Im(c_2)} = \dfrac{3}{8M}[4m_1 i + (m_2+\beta^2)(i-\sqrt{3})][\beta^2\sqrt{3} \\ \qquad\qquad + (\beta^2+2m_1)i]. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt wieder die Determinante Δ_3 prüfen. Wenn man in den Formeln (91) und (93) das Reelle vom Imaginären trennt und die entstehenden Ausdrücke in (87) einsetzt, ergibt sich

$$\Delta_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{8M}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} (m_1+\beta^2)\sqrt{3} & m_1+\beta^2 & \sqrt{3}\,m_1(2\beta^2 - 2m_1) \\ m_2\sqrt{3} & -m_2 & \sqrt{3}\,(m_2+\beta^2)(4\beta^2+2m_1) \\ -m_2 & -m_2\sqrt{3} & -(m_2+\beta^2)(4\beta^2+2m_1) - 4m_1(\beta^2+2m_1) \end{vmatrix}.$$

Wenn man hier zu den Elementen der dritten Zeile die durch $\sqrt{3}$ dividierten Elemente der zweiten Zeile hinzuzählt, geht die dritte Zeile über in

$$0 \qquad -\frac{4m_2}{\sqrt{3}} \qquad -4m_1(\beta^2+2m_1).$$

Entwickelt man alsdann nach den Elementen der dritten Zeile, so ergibt sich für die vorstehende Determinante der Ausdruck

$$-4m_1(\beta^2+2m_1)\begin{vmatrix}(m_1+\beta^2)\sqrt{3} & m_1+\beta^2\\ m_2\sqrt{3} & -m_2\end{vmatrix}$$

$$+\frac{4m_2}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}(m_1+\beta^2)\sqrt{3} & \sqrt{3}\,m_1(2\beta^2-2m_1)\\ m_2\sqrt{3} & \sqrt{3}\,(m_2+\beta^2)(4\beta^2+2m_1)\end{vmatrix}$$

Hier sieht man sofort, daß beim Ausrechnen nur ein einziges negatives Glied kommt und daß dieses durch ein positives mit doppelt so großen Koeffizienten verschluckt wird. Der Gesamtausdruck ist also positiv, daher ist auch Δ_3 von 0 verschieden, womit die Existenz der zweiparametrigen Schar wieder nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 20. November 1936.)

Über die rationale Lagerung des regulären Simplex.

Von

Hugo Hadwiger in Bern (Schweiz).

Es bezeichne $\mathfrak{S}_N$ das *reguläre Simplex* des N-dimensionalen Raumes R_N. Wenn K ein fest gewähltes orthogonales Koordinatensystem im R_N ist, so nennen wir einen Punkt (in bezug auf K) rational, wenn jede seiner N Koordinaten rational ist. $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller rationalen Punkte.

Wenn sämtliche $N+1$ Eckpunkte des regulären Simplex $\mathfrak{S}_N$ zu $\mathfrak{M}$ gehören, so sagen wir, daß $\mathfrak{S}_N$ in R_N *rational gelagert* ist. Eine solche rationale Lagerung ist für gewisse Dimensionen N möglich, für andere ausgeschlossen.

Der Fall $N = 2$ wird in der Literatur erwähnt:

Es ist unmöglich, ein gleichseitiges Dreieck $\mathfrak{S}_2$ in der Ebene R_2 rational zu lagern[1]).

Die Frage, für welche Dimensionen die rationale Lagerung des regulären Simplex *möglich* bzw. *unmöglich* ist, soll in dieser Mitteilung beantwortet werden für alle *geraden* Dimensionen.

Wir werden folgende Aussage beweisen:

$\mathfrak{S}_N$ *ist in* R_N { a) *rational lagerbar, falls* $N = 2\nu = 4[\mu^2 + \mu]$, b) *nicht rational lagerbar, falls* $N = 2\nu \neq 4[\mu^2 + \mu]$.

(ν, μ *ganz, positiv*).

Beweis von a): Wenn der Simplexmittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, so erfüllen die $N+1$ Ortsvektoren

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N;$$

der $N+1$ Eckpunkte des $\mathfrak{S}_N$ folgende Relationen ($A > 0$):

$$(a_i, a_k) = \begin{cases} A & (i = k) \\ -\frac{A}{N} & (i \gtrless k) \end{cases} \qquad [i, k = 0, 1, \ldots, N]. \tag{1}$$

Als Folgerung ergibt sich noch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 0. \tag{2}$$

Andererseits wird durch ein Vektorensystem, welches (1) erfüllt, ein $\mathfrak{S}_N$ aufgespannt.

[1]) E. Lucas, S. M. F. Bull. 6 (1878), S. 9. G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2 (1925), S. 156, Nr. 238. J. Springer, Berlin.

$\mathfrak{S}_N$ ist dann insbesondere rational gelagert, wenn die Komponenten di Vektoren sämtlich rationale Zahlen sind.

Die Aussage a) wird nun dadurch bewiesen, daß wir für den Fa $N = 4[\mu^2 + \mu]$ ein solches System rationaler Vektoren angeben. Fü die N Koordinatenvektoren

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv [1, 0, \ldots, 0], \\ e_2 &\equiv [0, 1, \ldots, 0], \\ &\vdots \\ e_N &\equiv [0, 0, \ldots, 1] \end{aligned}$$

gilt:

$$(3) \qquad (e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \gtrless k), \end{cases} \qquad [i, k = 1, 2, \ldots, N$$

Wir konstruieren nun das System der $N + 1 = 4[\mu^2 + \mu] + 1$ Vektore

$$(4) \qquad \begin{aligned} a_0 &= \sum_{\lambda=1}^{N} e_\lambda, \\ a_k &= (2\mu + 1)\, e_k - \frac{1}{2\mu} \sum_{\lambda=1}^{N} e_\lambda, \qquad [k = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

Man bestätigt mit Rücksicht auf (3) leicht

$$\begin{aligned} (a_0, a_k) &= -1, && [k = 1, 2, \ldots, N \\ (a_i, a_k) &= -1, && [i \gtrless k,\ i, k = 1, 2, \ldots, N \\ a_0^2 &= 4[\mu^2 + \mu] = N, \\ a_k^2 &= 4[\mu^2 + \mu] = N, && [k = 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

Diese Relationen werden zusammengefaßt:

$$(a_i, a_k) = \begin{cases} N & (i = k), \\ -1 & (i \gtrless k), \end{cases} \qquad [i, k = 0, 1, \ldots, N$$

Die Vektoren (4) bilden somit eine rationale Lösung des Relationen systems (1).

Einen Beweis für die Aussage b) gewinnen wir wie folgt: Ist S die Kantenlänge des regulären Simplex $\mathfrak{S}_N$ und v sein Volumen, so gil

$$v = \sqrt{\frac{1+N}{2^N}}\, \frac{S^N}{N!}.$$

Wenn $\mathfrak{S}_N$ rational gelagert ist, so sind die beiden Zahlen S^2 und rational. Berücksichtigt man die Voraussetzung $N = 2\nu$, so schließ man aus

$$v = \frac{\sqrt{1+2\nu}}{2^\nu}\, \frac{[S^2]^\nu}{[2\nu]!}$$

auf die Rationalität von $\sqrt{1+2\nu}$.

$1 + 2\nu = 1 + N$ muß daher eine ungerade Quadratzahl sein:

$$1 + N = (2\mu + 1)^2$$

oder also, was zu beweisen ist,

$$N = 4[\mu^2 + \mu].$$

Im folgenden wird noch ein Resultat angeschlossen aus den Untersuchungen über die rationale Lagerung in Räumen *ungerader* Dimension.

Die Räume der Dimension $N = 2^u - 1$ gestatten eine solche rationale Lagerung des regulären Simplex $\mathfrak{S}_N$, bei der die Koordinaten der Eckpunkte nur die Werte $+1$ und -1 annehmen.

Beweis: Angenommen, eine solche spezielle Lagerung sei möglich für $N = 2^{\mu_0} - 1$.

Werden die N Koordinaten der Eckpunkte zu Zeilen einer Matrix gemacht, so wird das $\mathfrak{S}_N$ in dieser speziellen Lage durch eine Matrix

$$\|\Theta_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \Theta_{N+1,1} & \dots & \Theta_{N+1,N} \end{Vmatrix}$$

von folgender Beschaffenheit dargestellt:

(A) $$\Theta_{ik} = \pm 1,$$

(B) $$\sum_{\lambda=1}^{N} \Theta_{i\lambda}\Theta_{k\lambda} = \begin{cases} N & (i = k), \\ -1 & (i \gtrless k), \end{cases} \quad [i, k = 1, 2, \dots, N+1].$$

Wir zeigen nun: Es gibt eine ebensolche Matrix für $N^* = 2^{\mu_0+1} - 1$. Wir konstruieren die Matrix von $N^* + 1 = 2N + 2$ Zeilen und $N^* = 2N + 1$ Spalten:

$$\|\Theta^*_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1N} & \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1N} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Theta_{N+1,1} & \dots & \Theta_{N+1,N} & \Theta_{N+1,1} & \dots & \Theta_{N+1,N} & 1 \\ \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1N} & -\Theta_{11} & \dots & -\Theta_{1N} & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Theta_{N+1,1} & \dots & \Theta_{N+1,N} & -\Theta_{N+1,1} & \dots & -\Theta_{N+1,N} & -1 \end{Vmatrix}$$

Wie man mit Rücksicht auf (A) und (B) leicht feststellt, gilt

(A*) $$\Theta^*_{ik} = \pm 1,$$

(B*) $$\sum_{\lambda=1}^{N^*} \Theta^*_{i\lambda}\Theta^*_{k\lambda} = \begin{cases} N^* & (i = k) \\ -1 & (i \gtrless k) \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, N^* + 1),$$

das heißt, die neu gebildete Matrix stellt ein reguläres Simplex $\mathfrak{S}_{N^*}$ der Dimension $N^* = 2^{\mu_0+1} - 1$ in eben derselben speziellen Lage dar.

Da nun die beiden Punkte $+1$ und -1 im linearen Raum R_1 ei
$\mathfrak{S}_1$ der speziellen Lage bilden, war die Annahme richtig für $\mu_0 =$
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach der im Beweise geschilderten Konstruktion erhält man zun
Beispiel für die Koordinatenmatrix des $\mathfrak{S}_7$

$$\left\| \begin{array}{rrrrrrr} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{array} \right\|.$$

(Eingegangen am 17. 12. 1936.)

Darstellungstheorie der Hyperoktaedergruppe.

Von

Wilhelm Specht in Breslau.

I.

Hyperoktaedergruppe $\mathfrak{H}_n$ vom Grade n heißt die Gruppe aller Transformationen in n Veränderlichen von der Gestalt:

$$x_\nu' = \varepsilon_\nu x_{\alpha_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \alpha_\nu \end{pmatrix}$$

eine beliebige Permutation des Grades n bedeutet, die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ aber unabhängig voneinander einen der beiden Werte ± 1 haben. Man erkennt sogleich, daß $\mathfrak{H}_n$ eine endliche Gruppe der Ordnung $2^n \cdot n!$ ist. In der Bezeichnungsweise einer meiner Arbeiten[1]) ist $\mathfrak{H}_n$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{G}_2)$ isomorph, wenn $\mathfrak{G}_2$ die (zyklische) Gruppe der Ordnung 2 bedeutet.

In der gleichen Arbeit habe ich gezeigt, wie die Charaktere und die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ aus Charakteren und Darstellungen von symmetrischen Gruppen gewonnen werden können[2]).

In der vorliegenden Arbeit sollen die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ nach dem gleichen Prinzip aufgebaut werden, nach dem ich in einer anderen Arbeit die Darstellungen der symmetrischen Gruppe erhalten habe[3]).

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Reihe von n Veränderlichen, $f(x)$ eine homogene Form in ihnen von der Dimension m mit rationalen Koeffizienten. Man übe auf die Veränderlichen eine Transformation H aus $\mathfrak{H}_n$ aus, wodurch $f(x)$ in eine Form $f^H(x)$ übergeht. Unter dem $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}(f(x))$ verstehe man dann die Menge aller Formen

$$\sum_H a_H f^H(x),$$

worin H alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ durchläuft, die Größen a_H beliebige rationale Zahlen bedeuten.

---

[1]) Vgl. W. Specht, Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe, Schriften des Math. Sem. Berlin 1 (1932), S. 1—32. (Im folgenden mit S_1 zitiert.)

[2]) Vgl. S_1, Abschnitt IV, S. 30.

[3]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 696—711. (Im folgenden mit S_2 zitiert.)

Ist nun $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$ eine linear unabhängige Basis des Moduls $\mathsf{M}(f(x))$, so gelten offensichtlich Beziehungen der Gestalt:

$$g_\alpha^H(x) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}^H g_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

mit rationalen Koeffizienten $d_{\alpha\beta}^H$; die Matrizen

$$D_H = (d_{\alpha\beta}^H)$$

vom Grade k bilden dann wegen der linearen Unabhängigkeit der Formen $g_\alpha(x)$ eine Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ vom Grade k. Die Basis $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$ des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}(f(x))$ heiße *Eigensystem der Gruppe* $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{D}$ *durch das Eigensystem erzeugte Darstellung von* $\mathfrak{H}_n$.

Ist $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)})$ allgemeiner eine homogene Form mehrerer Veränderlichenreihen $x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_n^{(\varrho)}$, die kogredient mit Elementen aus $\mathfrak{H}_n$ transformiert werden, so kann auch für eine solche Form der $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}(f(x))$ definiert werden; eine Basis dieses Moduls bildet gleichfalls in analogem Sinne ein Eigensystem der Gruppe $\mathfrak{H}_n$.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, für alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}_n$ Eigensysteme anzugeben. Das wird aber mit Hilfe der Resultate der beiden zitierten Arbeiten ein leichtes sein. Die Abschnitte II und III werden die nötigen Hilfsmittel zusammentragen; der Abschnitt IV hat die Aufstellung der $\mathfrak{H}_n$-Moduln, der Abschnitt V die Angabe von Eigensystemen zum Inhalt.

II.

Die Klassen ähnlicher Elemente in der Hyperoktaedergruppe $\mathfrak{H}_n$ können sehr leicht gekennzeichnet werden. Ist

$$H\colon\ x_\nu' = \varepsilon_\nu x_{a_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}_n$, so entsteht durch Fortlassen der Vorzeichen ε_ν eine Permutation P_H des Grades n. Diese zerlege man in Zykeln: P_H zerfalle in z_1, z_2, ..., z_n Zykeln der als Index angeschriebenen Ordnung:

$$z_1 + 2z_2 + \ldots + n z_n = n.$$

Jedem Zyklus von P_H wird nun eindeutig ein Vorzeichen zugeordnet: Ist $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu)$ ein Zyklus von P_H, so ist dieses Vorzeichen $\varepsilon_{\xi_1} \cdot \varepsilon_{\xi_2} \ldots \varepsilon_{\xi_\nu}$. Auf diese Weise ist jedes z_ν noch in zwei nichtnegative Summanden α_ν, β_ν aufgespalten, wobei α_ν die Anzahl der mit positivem, β_ν die Anzahl der mit negativem Zeichen versehenen Zykeln ν-ter Ordnung bezeichnet. Dadurch entsteht ein Zahlenschema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{bmatrix} = (\alpha, \beta),$$

der *Typus* des Elementes H von $\mathfrak{H}_n$. Für die Ähnlichkeit zweier Elemente von $\mathfrak{H}_n$ ist dann notwendig und hinreichend, daß ihre Typen übereinstimmen. Umgekehrt entspricht jedem Zahlenschema dieser Gestalt in nichtnegativen Zahlen α_ν, β_ν, die der Bedingung

$$(\alpha_1+\beta_1)+2(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+n(\alpha_n+\beta_n)=n$$

genügen, eine Ähnlichkeitsklasse in der Gruppe $\mathfrak{H}_n$ [4]).

Ist nun $\mathfrak{D}$ eine Darstellung von $\mathfrak{H}_n$ mit dem Charakter χ, der der Klasse (α, β) den Charakterwert $\chi(\alpha, \beta)$ zuordnet, so versteht man unter der *Charakteristik* der Darstellung $\mathfrak{D}$ die folgende Funktion

$$(2)\quad \Phi=\sum_{(\alpha,\beta)}\frac{\chi(\alpha,\beta)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!\,\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}\left(\frac{s_1}{2}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{4}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\frac{s_n}{2n}\right)^{\alpha_n}\left(\frac{t_1}{2}\right)^{\beta_1}\left(\frac{t_2}{4}\right)^{\beta_2}\ldots\left(\frac{t_n}{2n}\right)^{\beta_n},$$

wobei über alle Typen (α, β), also über alle Lösungen der Gleichung

$$(\alpha_1+\beta_1)+2(\alpha_2+\beta_2)+\ldots+n(\alpha_n+\beta_n)=n$$

in nichtnegativen ganzen Zahlen α_ν, β_ν zu summieren ist, und $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zwei Reihen von je n Veränderlichen bedeuten.

Die Anzahl $A(n)$ der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen der $\mathfrak{H}_n$, die gleich der Anzahl der Typen (α, β) ist, kann noch auf eine andere Weise beschrieben werden [5]). Sie ist nämlich gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichungen

$$(3)\quad n=k+l,\quad \begin{aligned} k&=\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_r \qquad (\varkappa_1\geqq\varkappa_2\geqq\ldots\geqq\varkappa_r>0),\\ l&=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_s \qquad (\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\ldots\geqq\lambda_s>0)\end{aligned}$$

in ganzen nichtnegativen Zahlen [6]). Es ist daher

$$A(n)=\sum_{k=0}^{n}z(k)\,z(n-k),$$

wenn $z(k)$ die Anzahl der Zerlegungen von k in positive ganze Summanden oder die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k$ ist [7]). Eine Lösung des Gleichungssystems (3) will ich kurz mit $(\varkappa, \lambda)$ bezeichnen und eine *Zerlegung* von n nennen.

Dagegen soll $(\varkappa)$ eine *einfache* Zerlegung von k, (λ) eine *einfache* Zerlegung von l bedeuten, also $(\varkappa)$ eine Lösung der Gleichung

$$k=\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_r \qquad (\varkappa_1\geqq\varkappa_2\geqq\ldots\geqq\varkappa_r>0)$$

---

[4]) Vgl. S_1, Satz II.

[5]) Vgl. S_1, Satz V.

[6]) Die Größen k und l können auch den Wert Null annehmen; in diesem Falle fällt eine der anderen Bedingungen aus.

[7]) In diesem Zusammenhange hat man $z(0)=1$ zu setzen.

in positiven ganzen Zahlen, ebenso (λ) eine Lösung der Gleichung

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s \qquad (\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_s > 0$$

in positiven ganzen Zahlen.

Einer festen Zerlegung $(\varkappa, \lambda)$ ist nun ein einfacher Charakter de Gruppe $\mathfrak{H}_n$ zugeordnet, dessen Charakteristik $\Phi^{(\varkappa,\lambda)}$ folgendermaßen er halten wird:

Man bilde die beiden Determinanten:

$$\Phi^{(\varkappa)}(S) = |p_{x_\alpha - \alpha + \beta}(S)| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$$

$$\Phi^{(\lambda)}(T) = |p_{\lambda_\gamma - \gamma + \delta}(T)| \qquad (\gamma, \delta = 1, 2, \ldots, s$$

in Veränderlichen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bzw. $T_1, T_2, \ldots, T_n$, wobei

$$p_\nu(x) = \sum_{(z)} \frac{1}{z_1!\, z_2! \ldots z_\nu!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{z_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{z_2} \ldots \left(\frac{x_\nu}{\nu}\right)^{z_\nu} \qquad (z_1 + 2z_2 + \ldots + \nu z_\nu = \nu$$

und $p_0 = 1$, $p_{-1} = p_{-2} = \ldots = 0$ zu setzen ist. Geht man nun noch durch die Transformation

$$S_\nu = \frac{s_\nu + t_\nu}{2}; \quad T_\nu = \frac{s_\nu - t_\nu}{2}$$

zu neuen Veränderlichen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ über, so ist

$$\Phi^{(\varkappa,\lambda)} = \Phi^{(\varkappa)}\left(\frac{s+t}{2}\right)\Phi^{(\lambda)}\left(\frac{s-t}{2}\right) \tag{5}$$

die der Zerlegung $(\varkappa, \lambda)$ von n entsprechende Charakteristik des Gruppe $\mathfrak{H}_n$ [8]).

Der Grad einer Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ [9]) mit dieser Charakteristik $\Phi^{(\varkappa,\lambda)}$ hat den Wert

$$f^{(\varkappa,\lambda)} = \frac{n!}{k!\,l!} f^{(\varkappa)} f^{(\lambda)};$$

dabei ist $f^{(\varkappa)}$ der Grad der Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k$ mit der Charakteristik $\Phi^{(\varkappa)}(S)$, $f^{(\lambda)}$ der Grad der Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_l$ mit der Charakteristik $\Phi^{(\lambda)}(T)$ [10]); man findet $f^{(\varkappa,\lambda)}$ in dem Koeffizienten von $\frac{s_1^n}{n!\,2^n}$ in der Entwicklung der Charakteristik $\Phi^{(\varkappa,\lambda)}$.

Für die einfachen Zerlegungen $(\varkappa)$ einer Zahl k kann eine Reihenfolge festgelegt werden [11]); sind $(\varkappa)$ und $(\varkappa')$ zwei solche Zerlegungen von k

---

[8]) Vgl. S_1, Abschnitt IV, S. 31.

[9]) Die Bezeichnung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ wird im folgenden stets für eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}_n$ mit der Charakteristik $\Phi^{(\varkappa,\lambda)}$ gebraucht.

[10]) Vgl. I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1908, § 1. (Im folgenden mit *Sch.* zitiert.)

[11]) Vgl. *Sch.*, § 1 und G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1903, § 4. (Im folgenden mit *F.* zitiert.)

so steht $(\varkappa)$ *vor* $(\varkappa')$, wenn die erste nichtverschwindende der Differenzen

$$\varkappa_1 - \varkappa_1', \quad \varkappa_2 - \varkappa_2', \quad \varkappa_3 - \varkappa_3', \ldots$$

positiv ist. Hierfür verwenden wir das Zeichen: $(\varkappa) < (\varkappa')$. Diese Reihenfolge überträgt sich ohne weiteres auf die Funktionen $\Phi^{(\varkappa)}(S)$. Alle diese Festsetzungen gelten natürlich auch für die einfachen Zerlegungen (λ) von l und die Funktionen $\Phi^{(\lambda)}(T)$.

III.

Die aus Funktionen $p_\nu(S)$ gebildete Funktion

$$p^{(\varkappa)}(S) = p_{\varkappa_1}(S)\, p_{\varkappa_2}(S) \ldots p_{\varkappa_r}(S)$$

ist eine Charakteristik der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k$ für jede einfache Zerlegung $(\varkappa)$ von k; ebenso ist die Funktion

$$p^{(\lambda)}(T) = p_{\lambda_1}(T)\, p_{\lambda_2}(T) \ldots p_{\lambda_s}(T)$$

eine Charakteristik der $\mathfrak{S}_l$ für jede einfache Zerlegung (λ) von l [12]). Daher ist auch

$$p^{(\varkappa,\lambda)} = p^{(\varkappa)}\left(\frac{s+t}{2}\right) p^{(\lambda)}\left(\frac{s-t}{2}\right)$$

eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{H}_n$.

Da nun für $p^{(\varkappa)}(S)$, $p^{(\lambda)}(T)$ die Beziehungen gelten: [13])

$$p^{(\varkappa)}(S) = \Phi^{(\varkappa)}(S) + \sum_{(\varkappa')<(\varkappa)} g_{\varkappa'}\, \Phi^{(\varkappa')}(S),$$

$$p^{(\lambda)}(T) = \Phi^{(\lambda)}(T) + \sum_{(\lambda')<(\lambda)} h_{\lambda'}\, \Phi^{(\lambda')}(T),$$

so wird

$$(6) \quad p^{(\varkappa,\lambda)} = \Phi^{(\varkappa,\lambda)} + \sum_{(\lambda')<(\lambda)} h_{\lambda'}\, \Phi^{(\varkappa,\lambda')} + \sum_{(\varkappa')<(\varkappa)} g_{\varkappa'}\, \Phi^{(\varkappa',\lambda)} + \sum_{\substack{(\varkappa')<(\varkappa)\\(\lambda')<(\lambda)}} g_{\varkappa'}\, h_{\lambda'}\, \Phi^{(\varkappa',\lambda')}.$$

Jeder einfachen Zerlegung $(\varkappa)$ von k ist eine assoziierte Zerlegung $(\varkappa^*)$ von k zugeordnet [14]); ist $(\varkappa)$ genauer $k = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r$, so schreibe man eine Matrix von r Zeilen und $\varkappa_1$ Spalten an, die in der ϱ-ten Zeile von links nach rechts zunächst $\varkappa_\varrho$ Einer, dann $\varkappa_1 - \varkappa_\varrho$ Nullen enthält. Die Spaltensummen liefern eine neue Zerlegung von k, die $(\varkappa)$ assoziierte Zerlegung $(\varkappa^*)$. Entsprechend bedeute (λ^*) die zu der Zerlegung (λ) assoziierte Zerlegung von l.

Bedeutet nun weiter $c_\nu(x)$ die Funktion

$$c_\nu(x) = \sum_{(z)} \frac{(-1)^{z_2+z_4+z_6+\cdots}}{z_1!\, z_2! \ldots z_\nu!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{z_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{z_2} \ldots \left(\frac{x_\nu}{\nu}\right)^{z_\nu} \quad (z_1 + 2z_2 + \ldots + \nu z_\nu = \nu),$$

---

[12]) Vgl. *Sch.*, § 1.

[13]) Vgl. *F.*, § 4 und I. Schur, Dissertation Berlin 1901, § 22.

[14]) Vgl. *F.*, § 5.

so ist auch

$$c^{(\varkappa)}(S) = c_{\varkappa_1}(S)\, c_{\varkappa_2}(S) \ldots c_{\varkappa_r}(S)$$

eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{S}_k$ für jede einfache Zerlegung $(\varkappa)$ von k; ebenso ist

$$c^{(\lambda)}(T) = c_{\lambda_1}(T)\, c_{\lambda_2}(T) \ldots c_{\lambda_s}(T)$$

eine Charakteristik der $\mathfrak{S}_l$[15]). Daher ist

$$c^{(\varkappa,\lambda)} = c^{(\varkappa)}\left(\frac{s+t}{2}\right) c^{(\lambda)}\left(\frac{s-t}{2}\right)$$

eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{H}_n$. Da nun aber die Beziehungen bestehen[16]):

$$c^{(\varkappa^*)}(S) = \Phi^{(\varkappa)}(S) + \sum_{(\varkappa')>(\varkappa)} g_{\varkappa'}\, \Phi^{(\varkappa')}(S),$$

$$c^{(\lambda^*)}(T) = \Phi^{(\lambda)}(T) + \sum_{(\lambda')>(\lambda)} h_{\lambda'}\, \Phi^{(\lambda')}(T),$$

wobei $(\varkappa^*)$ zu $(\varkappa)$ und (λ^*) zu (λ) assoziiert ist, so erhalten wir für $c^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$ die folgende Entwicklung:

$$(7)\quad c^{(\varkappa^*,\lambda^*)} = \Phi^{(\varkappa,\lambda)} + \sum_{(\varkappa')>(\varkappa)} g_{\varkappa'}\, \Phi^{(\varkappa',\lambda)} + \sum_{(\lambda')>(\lambda)} h_{\lambda'}\, \Phi^{(\varkappa,\lambda')} + \sum_{\substack{(\varkappa')>(\varkappa)\\(\lambda')>(\lambda)}} g_{\varkappa'} h_{\lambda'}\, \Phi^{(\varkappa',\lambda')}$$

Das Wesentliche an den beiden Gleichungen (6) und (7) ist die Tatsache, daß die beiden Charakteristiken $p^{(\varkappa,\lambda)}$ und $c^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$, wenn $(\varkappa)$ zu $(\varkappa^*)$ und (λ) zu (λ^*) assoziiert ist, allein die einfache Charakteristik $\Phi^{(\varkappa,\lambda)}$ und zwar genau einmal gemeinsam haben. Daher haben eine Darstellung $\mathfrak{P}^{(\varkappa,\lambda)}$ mit der Charakteristik $p^{(\varkappa,\lambda)}$ und eine Darstellung $\mathfrak{C}^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$ mit der Charakteristik $c^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$ allein den irreduziblen Bestandteil $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$, und diesen genau einmal, gemeinsam[17]).

IV.

Als Aufgabe haben wir nun zunächst die Aufstellung von Eigensystemen von $\mathfrak{H}_n$ vor uns, die Darstellungen $\mathfrak{P}^{(\varkappa,\lambda)}$ und $\mathfrak{C}^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$ erzeugen. Dazu bilde man für die einfache Zerlegung $k = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r$ den Ausdruck

$$p_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 x_2 \ldots x_{\varkappa_1})^0 (x_{\varkappa_1+1} x_{\varkappa_1+2} \ldots x_{\varkappa_1+\varkappa_2})^2 \ldots (x_{k-\varkappa_r+1} x_{k-\varkappa_r-2} \ldots x_k)^{2r-2}$$

in den ersten k Veränderlichen der Reihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$; in den weiteren Veränderlichen bilde man den Ausdruck

$$p_2^{(\lambda)}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_n\, p_1^{(\lambda)}(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

---

[15]) Vgl. *Sch.*, § 1.

[16]) Vgl. *F.*, § 5 und I. Schur, Dissertation, § 20.

[17]) Die Bezeichnungen $\mathfrak{P}^{(\varkappa,\lambda)}$ und $\mathfrak{C}^{(\varkappa,\lambda)}$ für Darstellungen mit den Charakteristiken $p^{(\varkappa,\lambda)}$ bzw. $c^{(\varkappa,\lambda)}$ werden durchwegs beibehalten.

wobei $p_1^{(\lambda)}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ analog wie $p_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k)$, nur für die einfache Zerlegung (λ) von l gebildet ist. Schließlich sei

$$P^{(\varkappa, \lambda)}(x) = p_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k)\, p_2^{(\lambda)}(x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}(P^{(\varkappa, \lambda)}(x))$ erzeugt dann als Eigensystem von $\mathfrak{H}_n$ eine Darstellung $\mathfrak{P}^{(\varkappa, \lambda)}$ dieser Gruppe.

Es bezeichne weiter $\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ die Vandermondesche Determinante oder das Differenzenprodukt der Quadrate der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$:

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots & y_\nu^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{2\nu-2} & y_2^{2\nu-2} & \ldots & y_\nu^{2\nu-2} \end{vmatrix} \qquad (\Gamma(y_1) = 1).$$

Für die Zerlegung $(\varkappa)$ von (k) bilde man nun mit r kogredient zu transformierenden Veränderlichenreihen $x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_n^{(\varrho)}$ die Funktion

$$c_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k) = \Gamma(x_1^{(1)}, \ldots, x_{x_1}^{(1)})\, \Gamma(x_{x_1+1}^{(2)}, \ldots, x_{x_1+x_2}^{(2)}) \ldots \Gamma(x_{k-x_r+1}^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}).$$

Ferner bilde man mit weiteren s Veränderlichenreihen $y_1^{(\sigma)}, y_2^{(\sigma)}, \ldots, y_n^{(\sigma)}$, die gleichfalls kogredient mit den Veränderlichenreihen $x_\nu^{(\varrho)}$ transformiert werden sollen, für die Zerlegung (λ) von l die Funktion

$$c_2^{(\lambda)}(y_{k+1}, \ldots, y_n) = y_{k+1}^{(1)} \ldots y_{k+\lambda_1}^{(1)}\, y_{k+\lambda_1+1}^{(2)} \ldots y_{k+\lambda_1+\lambda_2}^{(2)} \ldots y_{n-\lambda_s+1}^{(s)} \ldots y_n^{(s)}\, c_1^{(\lambda)}(y_{k+1}, \ldots, y_n),$$

wobei $c_1^{(\lambda)}(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ ebenso wie $c_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k)$, nur für die Zerlegung (λ) von l und mit den letzten l Veränderlichen jeder Reihe gebildet ist. Dann setze man:

$$C^{(\varkappa, \lambda)}(x, y) = c_1^{(\varkappa)}(x_1, \ldots, x_k)\, c_2^{(\lambda)}(y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

und bilde zu dieser Funktion den $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}(C^{(\varkappa, \lambda)}(x, y))$. Eine Basis dieses Moduls erzeugt dann als Eigensystem von $\mathfrak{H}_n$ eine Darstellung $\mathfrak{C}^{(\varkappa, \lambda)}$ dieser Gruppe.

Der Beweis der hier aufgestellten Behauptungen ergibt sich sehr leicht aus dem folgenden Hilfssatze:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seien zwei kogrediente Veränderlichenreihen; $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ sei eine homogene Form in den ersten Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ der ersten Reihe, $g(y) = g(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ eine homogene Form in den letzten Veränderlichen $y_{k+1}, \ldots, y_n$ der zweiten Reihe. Eine Basis des $\mathfrak{H}_k$-Moduls $\mathsf{M}(f(x))$ erzeuge eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}_k$ mit der Charakteristik Φ_1, eine Basis des $\mathfrak{H}_{n-k}$-Moduls $\mathsf{M}(g(y))$ erzeuge eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}_{n-k}$ mit der Charakteristik Φ_2. Dann

erzeugt eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}(f(x)\,g(y))$ *eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{H}_n$ *mit der Charakteristik* $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$.

$\mathfrak{H}_k^{(1)}$ bezeichne die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{H}_n$, die die letzten $n-k$ Veränderlichen festlassen, $\mathfrak{H}_{n-k}^{(2)}$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{H}_n$, die die ersten k Veränderlichen festlassen. Dann ist das direkte Produkt $\mathfrak{H}_k^{(1)} \times \mathfrak{H}_{n-k}^{(2)}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_n$. Eine Basis des $\mathfrak{H}_k$-Moduls $\mathsf{M}(f(x))$ erzeuge nun die Darstellung $\mathfrak{D}_1$ von $\mathfrak{H}_k^{(1)}$, eine Basis des $\mathfrak{H}_{n-k}$-Moduls $\mathsf{M}(g(y))$ die Darstellung $\mathfrak{D}_2$ von $\mathfrak{H}_{n-k}^{(2)}$. Dann ist das direkte Matrizenprodukt $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}_k^{(1)} \times \mathfrak{H}_{n-k}^{(2)}$[18]. Hat $\mathfrak{D}_1$ den Charakter χ_1, $\mathfrak{D}_2$ den Charakter χ_2, so hat $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ den Charakter $\chi_1 \chi_2$. Aus $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ gewinnt man nun nach dem Frobeniusschen Verfahren[19] eine Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{H}_n$, deren Charakteristik die Funktion $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$ ist[20]). Andererseits erkennt man sehr leicht, daß jede Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}(f(x)\,g(y))$ eine zu $\mathfrak{D}$ ähnliche Darstellung von $\mathfrak{H}_n$ erzeugt.

Die Funktion

$$f(x) = (x_1 x_2 \dots x_n)^r$$

mit nichtnegativem ganzem Exponenten r ist nun eine (relative) Invariante der Gruppe $\mathfrak{H}_n$; daher ist $f(x)$ eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}(f(x))$. Die von diesem Eigensystem erzeugte Darstellung hat die Form:

$$D_H = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^r.$$

Bei geradem r hat diese Darstellung die Charakteristik $p_n\left(\frac{s+t}{2}\right)$, bei ungeradem r die Charakteristik $p_n\left(\frac{s-t}{2}\right)$. Aus dieser Tatsache folgt nun aber ohne weiteres die Behauptung über den $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}(P^{(\varkappa,\lambda)}(x))$.

Ebenso ist die Funktion:

$$f(y) = \Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

eine (relative) Invariante der Gruppe $\mathfrak{H}_n$; die von $f(y)$ erzeugte Darstellung hat die Gestalt:

$$D_H = \pm 1,$$

wobei das Vorzeichen positiv oder negativ ist, je nachdem die zu H gehörige Permutation P_H gerade oder ungerade ist. Ihr entspricht daher die Charakteristik $c_n\left(\frac{s+t}{2}\right)$. Auch die Funktion

$$f(y) = y_1 y_2 \dots y_n \Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

---

[18]) Vgl. G. Frobenius. Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1901, § 4.

[19]) Vgl. G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, Sitzungsber. Akad. Berlin 1898, § 3.

[20]) Vgl. S_1, Satz VII.

ist eine (relative) Invariante von $\mathfrak{H}_n$; sie erzeugt die Darstellung

$$D_H = \pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n,$$

wobei sich wieder das Vorzeichen nach der zu H gehörigen Permutation P_H richtet. Die zugehörige Charakteristik ist daher die Funktion $c_n\left(\frac{s-t}{2}\right)$. Hieraus ergibt sich leicht der Beweis der Behauptung über den $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}\left(C^{(\varkappa,\lambda)}(x, y)\right)$ [21].

Um nun Eigensysteme für irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ von $\mathfrak{H}_r$ zu erhalten, bilde man zu der Zerlegung

$$n = k + l, \quad \begin{matrix} k = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_\nu, & (\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \dots \geqq \varkappa_\nu > 0), \\ l = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s, & (\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \dots \geqq \lambda_s > 0) \end{matrix}$$

die Funktion

$$\begin{aligned} D^{(\varkappa,\lambda)}(x) = {} & \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_{\varkappa_1})\, \Gamma(x_{\varkappa_1+1}, \dots, x_{\varkappa_1+\varkappa_2}) \dots \Gamma(x_{k-\varkappa_\nu+1}, \dots, x_k) \\ & \cdot x_{k+1} \dots x_n\, \Gamma(x_{k+1}, \dots, x_{k+\lambda_1})\, \Gamma(x_{k+\lambda_1+1}, \dots, x_{k+\lambda_1+\lambda_2}) \dots \\ & \Gamma(x_{n-\lambda_s+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Dann gilt der

Satz I. *Eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa,\lambda)}(x)\right)$ erzeugt als Eigensystem von $\mathfrak{H}_n$ eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$, wobei $(\varkappa^*)$, (λ^*) die zu $(\varkappa)$ bzw. (λ) assoziierten einfachen Zerlegungen bezeichnen.*

Der Beweis dieses Satzes kann ganz analog zu dem von Satz I in S_2 geführt werden. Zweckmäßig gehen wir vom $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)\right)$ aus, um ein Eigensystem der Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ zu erhalten.

Wir finden eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)\right)$ aus einer Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}\left(C^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x, y)\right)$ durch wiederholte Identifizierung von Veränderlichenreihen. Andererseits ist aber der $\mathfrak{H}_n$-Modul $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)\right)$ ein Untermodul des $\mathfrak{H}_n$-Moduls $\mathsf{M}\left(P^{(\varkappa,\lambda)}(x)\right)$, was man sofort an den in $D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)$ auftretenden Potenzprodukten der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ erkennen kann. Demnach kann eine Basis von $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)\right)$ nur eine Darstellung erzeugen, die aus den beiden Darstellungen $\mathfrak{P}^{(\varkappa,\lambda)}$ und $\mathfrak{C}^{(\varkappa^*,\lambda^*)}$ gemeinsamen irreduziblen Bestandteilen besteht. Folglich erzeugt jede Basis dieses Moduls eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ von $\mathfrak{H}_n$ [22].

Die Bildung des Moduls $\mathsf{M}\left(D^{(\varkappa^*,\lambda^*)}(x)\right)$ zu der Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ von $\mathfrak{H}_n$ möge ein Beispiel noch erläutern:

---

[21] Diese speziellen Darstellungen ersten Grades entsprechen in der angegebenen Reihenfolge den Zerlegungen:

$$\begin{aligned} n = k + l;\ & k = n,\ l = 0 \quad \text{mit der Zerlegung} \quad k = n, \\ & k = 0,\ l = n \quad \text{mit der Zerlegung} \quad l = n, \\ & k = n,\ l = 0 \quad \text{mit der Zerlegung} \quad k = 1 + 1 + \dots + 1, \\ & k = 0,\ l = n \quad \text{mit der Zerlegung} \quad l = 1 + 1 + \dots + 1. \end{aligned}$$

[22] Vgl. den Beweis zu Satz I in S_2, S. 702.

Es seien $n = 9$, $k = 4$, $l = 5$, und die beiden Zerlegungen

$$k = 3 + 1; \qquad l = 3 + 2.$$

Die assoziierten Zerlegungen sind dann

$$k = 2 + 1 + 1; \qquad l = 2 + 2 + 1.$$

Daher hat in diesem Falle die Funktion $D(x)$ die Gestalt:

$$\begin{aligned} D(x) &= \Gamma(x_1, x_2)\,\Gamma(x_3)\,\Gamma(x_4)\,x_5\,x_6\,x_7\,x_8\,x_9\,\Gamma(x_5\,x_6)\,\Gamma(x_7\,x_8)\,\Gamma(x_9) \\ &= (x_2^2 - x_1^2)\,x_5\,x_6\,x_7\,x_8\,x_9\,(x_6^2 - x_5^2)\,(x_8^2 - x_7^2). \end{aligned}$$

V.

Von Wichtigkeit ist noch die wirkliche Aufstellung einer Basis des Moduls $\mathsf{M}(D^{(\varkappa^*, \lambda^*)}(x))$, um ein Eigensystem für die irreduzible Darstellung $\mathfrak{H}^{(\varkappa, \lambda)}$ explizit anzugeben. Zu diesem Zwecke gehe man folgendermaßen vor:

Vorgegeben ist die Zerlegung von n:

$$n = k + l, \qquad \begin{aligned} k &= \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r, \\ l &= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s. \end{aligned}$$

Man wähle aus der Menge der Ziffern $1, 2, \ldots, n$ eine beliebige Teilmenge von k Ziffern aus; es verbleibt die Komplementärmenge von l Ziffern. Diese Auswahl kann offenbar auf $\frac{n!}{k!\,l!}$ verschiedene Weisen geschehen. Bei jeder solchen Auswahl verteile man nun die ausgewählten k Ziffern auf alle möglichen Arten auf das durch die einfache Zerlegung $(\varkappa)$ von k gekennzeichnete Schema[23]):

$$(8) \qquad (s): \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varkappa_1} \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\varkappa_2} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\varkappa_r} \end{matrix},$$

so daß die Ziffern in den Zeilen von links nach rechts, in den Spalten von oben nach unten nur zunehmen:

$$(8\,a) \qquad \begin{aligned} &\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\varkappa_1};\ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{\varkappa_2};\ \ldots;\ \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{\varkappa_r}; \\ &\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \varrho_1;\ \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \varrho_2;\ \ldots. \end{aligned}$$

Genau das Gleiche geschehe mit den verbliebenen l Ziffern; diese werden auf das durch die einfache Zerlegung (λ) von l charakterisierte Schema:

$$(9) \qquad (s'): \begin{matrix} \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{\lambda_1} \\ \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{\lambda_2} \\ \vdots \\ \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{\lambda_s} \end{matrix}$$

---

[23]) Vgl. S_2, Abschnitt IV.

ebenso auf alle möglichen Weisen so verteilt, daß die Ungleichungen

$$\text{(9 a)} \qquad \begin{array}{l} \alpha'_1 < \alpha'_2 < \ldots < \alpha'_{\lambda_1};\ \beta'_1 < \beta'_2 < \ldots < \beta'_{\lambda_2};\ \ldots;\ \sigma'_1 < \sigma'_2 < \ldots < \sigma'_{\lambda_s}; \\ \alpha'_1 < \beta'_1 < \ldots < \sigma'_1;\quad \alpha'_2 < \beta'_2 < \ldots < \sigma'_2;\ \ldots \end{array}$$

erfüllt sind.

Für jedes Paar von Anordnungen (8) und (9) mit den Anordnungsbedingungen (8 a) und (9 a) bilde man dann die Form:

$$D(x) = \Gamma(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots, x_{\varrho_1})\,\Gamma(x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\varrho_2}) \ldots$$
$$x_{\alpha'_1} x_{\beta'_1} \ldots x_{\sigma'_1}\,\Gamma(x_{\alpha'_1}, x_{\beta'_1}, \ldots, x_{\sigma'_1})\,x_{\alpha'_2} x_{\beta'_2} \ldots x_{\sigma'_2}\,\Gamma(x_{\alpha'_2}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\sigma'_2}) \ldots.$$

Dann gilt

Satz II. *Die Menge aller Formen $D(x)$, die den Schemata* (8) *und* (9) *mit den Bedingungen* (8 a) *und* (9 a) *zugeordnet sind, bilden eine Basis des $\mathfrak{H}_n$-Moduls* $\mathsf{M}\,(D^{(\varkappa^*, \lambda^*)}(x))$, *also ein Eigensystem von $\mathfrak{H}_n$, das eine (irreduzible) Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa, \lambda)}$ dieser Gruppe erzeugt.*

Ein Beispiel möge dieses Verfahren noch erläutern: Für die Zerlegung der Zahl 5:

$$n = 5;\quad k = 3, l = 2;\quad k = 2 + 1;\quad l = 2$$

erhalten wir die folgenden 20 Paare von Schemata:

$$\begin{array}{cccc} \begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \end{matrix}; \begin{matrix} 4\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,3 \\ 2 \end{matrix}; \begin{matrix} 4\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,4 \\ 2 \end{matrix}; \begin{matrix} 3\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,2 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 3\,5 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\,5 \\ 2 \end{matrix}; \begin{matrix} 3\,4 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,2 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 3\,4 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,3 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,4 \\ 3 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,5 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\,3 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,4 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,5 \\ 3 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,4 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,4 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,3 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 1\,5 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 2\,3 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2\,3 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 2\,4 \\ 3 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,5 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 2\,3 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,4 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 2\,5 \\ 3 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,4 \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2\,4 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,3 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 2\,5 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,3 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 3\,4 \\ 5 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,2 \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 3\,5 \\ 4 \end{matrix}; \begin{matrix} 1\,2 \\ \end{matrix}. \end{array}$$

Dem Schema

$$\begin{matrix} \alpha_1\,\alpha_2 \\ \beta_1 \end{matrix}; \begin{matrix} \gamma_1\,\gamma_2 \\ \end{matrix}$$

entspricht die Form

$$D(x) = (x_{\beta_1}^2 - x_{\alpha_1}^2)\,x_{\gamma_1} x_{\gamma_2},$$

woraus sogleich die 20 Formen des Eigensystems entnommen werden können.

Die Anzahl der Formen $D(x)$ des Satzes II ist sehr leicht zu bestimmen. Denn zunächst haben wir $\frac{n!}{k!\,l!}$ Möglichkeiten, eine Teilmenge von k Ziffern aus den Ziffern $1, 2, \ldots, n$ auszuwählen. Schemata (8) mit den Bedingungen (8 a) können wir für die Zerlegung $(\varkappa)$ von k genau in der Anzahl $f^{(\varkappa)}$ bilden[24]); die Anzahl der Schemata (9) mit den

[24]) Vgl. S_2, S. 705.

Bedingungen (9 a), die aus den restlichen l Ziffern zu bilden sind, ist aber $f^{(\lambda)}$. Demnach erhalten wir auf dem geschilderten Wege insgesamt

$$f^{(\varkappa,\lambda)} = \frac{n!}{k!\,l!} f^{(\varkappa)} f^{(\lambda)}$$

Formen $D(x)$, also ebensoviele, wie der Grad einer Darstellung $\mathfrak{G}^{(\varkappa,\lambda)}$ angibt.

Daher haben wir lediglich noch zu zeigen, daß diese Formen $D(x)$ linear unabhängig sind. Sie mögen in beliebiger Reihenfolge mit $D_1(x)$, $D_2(x), \ldots, D_h(x)$ bezeichnet werden; wir nehmen an, es bestünde eine lineare Beziehung

$$\sum_{\varkappa} a_\varkappa D_\varkappa(x) = 0 \tag{10}$$

mit gewissen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $a_\varkappa$. Ist $D_\varkappa(x)$ eine beliebige unter den Formen mit den ihr entsprechenden Schemata (s) und (s'), so treten in ihr entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen der Veränderlichen x_ν bei festem ν auf, je nachdem ob die Ziffer ν zum Schema (s) oder zum Schema (s') gehört. Da die Beziehung (10) aber identisch in allen x_ν gilt, so kann sie in lineare Beziehungen der gleichen Gestalt zerlegt werden, in denen aber nur solche Formen $D_\varkappa(x)$ wirklich auftreten, deren Schema (s) eine feste Teilmenge von k Ziffern, etwa $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, aus den Ziffern $1, 2, \ldots, n$ enthält. Notwendig gilt dann das Gleiche für das Schema (s') aller wirklich auftretenden Formen, das aus den Ziffern $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ bestehen möge. Dann hat jede Form $D_\varkappa(x)$, die in der linearen Beziehung wirklich auftritt, die Gestalt

$$D_\varkappa(x) = f(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k})\; g(x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_l});$$

die verschiedenen, hierbei auftretenden Formen $f(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k})$ sind aber wegen (8 a), die verschiedenen, hierbei auftretenden Formen $g(x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_l})$ wegen (9 a) linear unabhängig[25]). Es sind daher alle Größen $a_\varkappa$ gleich Null im Widerspruch zur Annahme; damit ist aber Satz II vollkommen bewiesen.

---

[25]) Denn diese Formen $f(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k})$ bilden ein zur einfachen Zerlegung $(\varkappa)$ von k gehöriges Eigensystem der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_k$, ebenso die Formen $g(x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_l})$ ein zur einfachen Zerlegung (λ) von l gehöriges Eigensystem der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_l$. Vgl. S_3, Abschnitt IV.

(Eingegangen am 13. November 1936.)

Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Zweite Mitteilung.

Reihenentwicklungen.

Von

Artur Erdélyi in Brünn.

Anschließend an die erste Mitteilung[1]), in der namentlich auch die Laplacesche Transformierte der Whittakerschen Funktionen ermittelt wurde, wird in dieser Arbeit eine Anzahl besonderer Reihenentwicklungen nach N-Funktionen betrachtet, deren Summe sich in geschlossener Form angeben läßt. Die hier betrachteten Reihen können in drei Gruppen eingeteilt werden.

Dem ersten Typus gehören Reihen von der Gestalt

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+r,\,m}(t) \tag{1}$$

an, in welcher die Koeffizienten a_r als von t unabhängig angenommen werden. Besondere Reihen von diesem Typus werden in den §§ 1 bis 6 untersucht. Der Betrachtung einiger Reihen von dem zweiten Typus

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k,\,m+r}(t) \tag{2}$$

sind die §§ 7 bis 9 gewidmet, während in den §§ 10 und 11 besondere Reihen von einem dritten Typus behandelt werden, welche die Gestalt

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r N_{k+\frac{r}{2},\,m+\frac{r}{2}}(t) \tag{3}$$

haben. Die Reihen von der Gestalt (1) bzw. (2) bzw. (3) sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Entwicklungen nach N-Funktionen darstellen, bei denen nur der erste Parameter k, bzw. nur der zweite Parameter m, bzw. beide Parameter zugleich sich ändern. Der zweite Parameter m, bzw. der erste Parameter k, bzw. die Parameterdifferenz $k-m$ bleiben bei den Entwicklungen (1) bzw. (2) bzw. (3) konstant.

[1]) [4], des Literaturverzeichnisses. Diese Arbeit wird stets mit I zitiert. So bedeutet z. B. I (2, 3) die Gleichung (2, 3) der ersten Mitteilung.

Auch in bezug auf Konvergenz verhalten sich die drei erwähnten Typen von Reihen verschieden. Während (1) den Charakter einer trigonometrischen Reihe hat[2]) und demgemäß in einem Streifen um die reelle Achse der t-Ebene konvergiert (der sich gelegentlich auf die reelle t-Achse reduziert), haben (2) und (3) die Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen[3]), wobei sich die beiden letzten Typen noch darin unterscheiden, daß das Argument der „zugeordneten Potenzreihe" im Falle (2) t^2, im Falle (3) hingegen t ist.

Die Entwicklungen nach N-Funktionen enthalten als Sonderfälle eine sehr große Anzahl zum Teil bekannter, zum anderen Teil unbekannter Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen und den Funktionen des parabolischen Zylinders, nach Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen und den Polynomen von Bateman. Da es weder möglich noch auch wünschenswert war, alle diese Formeln in extenso anzuschreiben, haben wir uns jeweils mit der Ableitung der allgemeinen Beziehungen und der Angabe einiger Beispiele begnügt. Die wichtigsten Beziehungen mit allgemeinen N-Funktionen sind eingerahmt. Aus diesen allgemeinen Beziehungen ergeben sich auf Grund der im § 1 der ersten Mitteilung angegebenen Formeln sowohl die in dieser Arbeit betrachteten, als auch viele andere Entwicklungen nach den oben genannten besonderen Funktionen.

Wegen Erklärungen und Bezeichnung der hier verwendeten Funktionen sei insbesondere auf die beiden ersten Paragraphen der ersten Mitteilung verwiesen. Auch von der in I, § 5 verwendeten Bezeichnungsweise

$$(p)_0 = 1, \quad (p)_r = p(p+1)\dots(p+r-1) = \frac{\Gamma(p+r)}{\Gamma(p)} \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

wird ausgiebig Gebrauch gemacht.

§ 1.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} N_{k+\nu+r,\, m+\nu}(t)$.

In diesem Paragraphen wollen wir die Entwicklung einer konfluenten hypergeometrischen Funktion $N_{k,m}(t)$ in eine Reihe von der Form $\Sigma' a_r N_{k'+r,\, m'}$ behandeln. Je nach den besonderen Werten, welche wir den Parametern m' und k' erteilen, entstehen Entwicklungen nach

[2]) Vgl. § 1.
[3]) Vgl. §§ 7 und 9.

Hermiteschen oder Laguerreschen Polynomen, nach k-Funktionen oder auch nach allgemeineren Lösungen der Whittakerschen Differentialgleichung.

Zur Ableitung der allgemeinen Entwicklungsformel gehen wir von folgender Reihenentwicklung der Laplaceschen Transformierten der Funktion $N_{k,m}(t)$ aus:

$$\frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}} = \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+2\nu+\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}\right)^{-2\nu}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} \frac{(s-\frac{1}{2})^{k+r-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+r+m+2\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit Hilfe von I (2, 4) als Laplacesche Transformierte interpretieren, so erhalten wir

$$\mathfrak{L}\{N_{k,m}(t)\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} \mathfrak{L}\{N_{k+\nu+r,\,m+\nu}(t)\},$$

und der Übergang zu den Oberfunktionen liefert nach dem bekannten Satze von Lerch

(1, 1)
$$\boxed{N_{k,m}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} N_{k+\nu+r,\,m+\nu}(t).}$$

Die bei der zunächst rein formal vorgenommenen Ableitung dieses Ergebnisses erfolgte Vertauschung der Reihenfolge der Summation und Integration ist statthaft, wenn jedes der bei der Laplaceschen Transformation in der vorletzten Gleichung auftretenden Integrale absolut konvergiert, d. h. wenn

(1, 2) $\qquad 2m+1>0 \quad \text{und} \quad 2m+2\nu+1>0,$

und wenn außerdem die auf der rechten Seite von (1, 1) stehende Reihe absolut und in jedem endlichen Intervalle gleichmäßig konvergiert.

Um die Konvergenz der Reihe (1, 1) für reelle Werte von t untersuchen zu können, müssen wir auf eine an anderer Stelle [4]) abgeleitete asymptotische Darstellung der Funktion $M_{k,m}(t)$ für große Werte von $\mathfrak{Re}\, k$ zurückgreifen. Wenn etwa m auf einen beliebigen endlichen Bereich der komplexen Ebene und t auf ein beliebiges positives Intervall beschränkt ist, gilt in m und t gleichmäßig folgende asymptotische Darstellung für $M_{k,m}(t)$:

$$M_{k,m}(t) \backsim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2m+1)\, k^{-m-\frac{1}{4}} \sqrt[4]{t} \cos\left(2\sqrt{tk} - m\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

[4]) [3], Gleichung (9).

und daraus folgt auf Grund der Erklärung der N-Funktionen durch I (1, 4

$$N_{k+\nu+r,\,m+\nu}(t) = \frac{t^{m+\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m+2\nu+1)} M_{k+\nu+r,\,m+\nu}(t)$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} (k+\nu+r)^{-m-\nu-\frac{1}{4}} t^{m+\nu-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{tk} - m\pi - \frac{\pi}{4}\right),$$

woraus hervorgeht, daß für festgehaltene reelle t und große r

$$|N_{k+\nu+r,\,m+\nu}(t)| = O(r^{-m-\nu-\frac{1}{4}})$$

ist. Weiterhin ist nach einer Verallgemeinerung der Stirlingsche Formel [5])

$$\Gamma(2\nu+r) \sim \sqrt{2\pi}\, r^{2\nu+r-\frac{1}{2}} e^{-r},$$

also

$$\frac{(2\nu)_r}{r!} = \frac{\Gamma(2\nu+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(2\nu)} \sim \frac{r^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} = O(r^{2\nu-1}).$$

Daher ist das r-te Glied der Reihe auf der rechten Seite von (1, 1) vo der Größenordnung von $r^{\nu-m-\frac{5}{4}}$, woraus hervorgeht, daß die Reihe kon vergiert, wenn

$$\nu - m - \tfrac{5}{4} < -1,$$

d. h. wenn

(1, 3) $$\nu < m + \tfrac{1}{4}.$$

Von den Beschränkungen (1, 2) können wir uns leicht durch analytisch Fortsetzung befreien. Bei komplexen Werten von k, m und ν kon vergiert (1, 1) gewiß gleichmäßig in jedem endlichen reellen Interva $a \leqq t \leqq b$, wenn nur

(1, 4) $$\mathfrak{Re}\,(\nu - m) < \tfrac{1}{4}.$$

Da beide Seiten von (1, 1) in diesem Bereich analytische Funktionen von und ν sind, und in einem Teilbereich die Gültigkeit dieser Gleichu nachgewiesen wurde, so gilt sie ganz allgemein unter der Bedingung (1, 4

Ein besonders einfacher Sonderfall der Reihe (1, 1) ergibt sich f $\nu = \frac{1}{2}$. Da $(1)_r = r!$ ist, so erhalten wir in diesem Falle die für

(1, 5) $$\mathfrak{Re}\, m > \tfrac{1}{4}$$

konvergente Reihenentwicklung

(1, 6) $$N_{k,\,m}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} N_{k+r+\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(t).$$

Ist 2ν eine negative ganze Zahl, so bricht die Reihe auf der recht Seite von (1, 1) ab, da die Folge der Koeffizienten $(2\nu)_r$ $(r = 0, 1, 2, .$

[5]) Vgl. z. B. [6].

in diesem Falle dieselbe Eigenschaft aufweist. Der Fall $2\nu = 0$ ist trivial. Für $2\nu = -1$ bleiben nur zwei Glieder der Reihe übrig, und wir erhalten eine *Rekursionsformel* für die N-Funktionen

$$N_{k,m}(t) = N_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(t) - N_{k+\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(t), \tag{1,7}$$

welche der von Whittaker gegebenen Rekursionsformel der W-Funktionen entspricht[6]). Für $k = m + \frac{1}{2} + n$ sind alle in (1, 7) auftretenden N-Funktionen durch Laguerresche Polynome ausdrückbar. Auf Grund von I (1, 9) erhalten wir nämlich in diesem Falle

$$\frac{n!\,t^{2m}}{\Gamma(2m+n+1)} L_n^{(2m)}(t) = \frac{n!\,t^{2m-1}}{\Gamma(2m+n)} L_n^{(2m-1)}(t) - \frac{(n+1)!\,t^{2m-1}}{\Gamma(2m+n+1)} L_{n+1}^{(2m-1)}(t)$$

oder

$$t L_n^{(2m)}(t) = (2m+n) L_n^{(2m-1)}(t) - (n+1) L_{n+1}^{(2m-1)}(t).$$

Aus (1, 6) kann auch die Summe endlich vieler N-Funktionen entnommen werden, welche alle denselben zweiten Parameter m aufweisen, und deren erste Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden. Aus dieser Gleichung folgt nämlich unmittelbar

$$N_{k,m}(t) - N_{k+n,m}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} N_{k+r+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(t) - \sum_{r=0}^{\infty} N_{k+n+r+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(t),$$

also

$$N_{k,m}(t) - N_{k+n,m}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} N_{k+r+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}(t) \tag{1,8}$$

eine Beziehung, die auch auf Grund der Laplaceschen Transformation unmittelbar bewiesen werden kann. Sie enthält für $n = 1$ als Sonderfall (1, 7), wie es sofort ersichtlich wird, wenn in diesem Falle k durch $k - \frac{1}{2}$, und m durch $m - \frac{1}{2}$ ersetzt wird. (1, 8) kann auch durch wiederholte Anwendung von (1, 7) abgeleitet werden.

§ 2.

Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen und ihren Sonderfällen.

Anschließend an die Ergebnisse des vorangehenden Paragraphen sollen nunmehr einige Sonderfälle der Gleichung (1, 1) betrachtet werden, die sämtlich auf verallgemeinerte Laguerresche Polynome bzw. auf die Sonderfälle derselben, also auf Hermitesche Polynome und die Batemanschen Funktionen k_{2n} führen.

[6]) [13], S. 352, Example 3.

Wir wollen gleich mit der Entwicklung der Laguerreschen Polynome nach diesen letztgenannten Funktionen beginnen, indem wir in (1, 1)

$$\nu = \tfrac{1}{2} - m, \quad k = m + n + \tfrac{1}{2}$$

setzen und auf die entstehenden N-Funktionen I (1, 9), I (1, 4) und I (1, 18) anwenden. So erhalten wir die für

$$\Re m > \tfrac{1}{8}$$

gültige Entwicklung

(2, 1) $$L_n^{(2m)}(t) = \frac{1}{n!}\,\Gamma(2m+n+1)\,t^{-2m}e^{\frac{1}{2}t}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{n+r+1}\frac{(1-2m)_{r-1}}{(r-1)!}\,k_{2n+2r}\left(\frac{t}{2}\right),$$

in der wir in der Summe sogleich r durch $r-1$ ersetzt haben. Diese Beziehung ist ein Gegenstück zu der bekannten Entwicklung [7])

$$L_n^{(2m)}(t) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}t}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{2m+r}{r}k_{2n-2r}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Als nächstes Beispiel wollen wir Entwicklungen nach geraden bzw. ungeraden Hermiteschen Polynomen angeben. Zu diesem Zwecke setzen wir in (1, 1)

$$\nu = -\tfrac{1}{4} - m \quad \text{bzw.} \quad \nu = \tfrac{1}{4} - m \quad \text{und} \quad k = m + n + \tfrac{1}{2}$$

und erhalten unter Anwendung von I (1, 9), I (1, 4) und I (1, 10) die beiden für

$$\Re m > -\tfrac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad \Re m > 0$$

gültigen Entwicklungen

(2, 2) $$L_n^{(2m)}(t) = \frac{\Gamma(2m+n+1)}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2})}\,t^{-2m-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{n+r}\frac{(-\frac{1}{2}-2m)_r\,(n+r)!}{r!\,(2n+2r)!}\,H_{2n+2r}(\sqrt{t})$$

und

(2, 3) $$L_n^{(2m)}(t) = \frac{\Gamma(2m+n+1)}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2})}\,t^{-2m}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{n+r+1}\frac{(\frac{1}{2}-2m)_r\,(n+r)!}{r!\,(2n+2r+1)!}\,H_{2n+2r+1}(\sqrt{t}).$$

Eine besondere Wichtigkeit kommt jenen Fällen zu, in denen diese Reihen abbrechen, und zwar tritt dieser Fall ein, wenn $-\frac{1}{2}-2m$ bzw. $\frac{1}{2}-2m$ eine negative ganze Zahl oder Null ist. Setzen wir also

$$2m = n' - \tfrac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2m = n' + \tfrac{1}{2} \qquad (n' = 0, 1, 2, \ldots),$$

so gehen (2, 2) bzw. (2, 3) über in

(2, 4) $$L_n^{(n'-\frac{1}{2})}(t) = \frac{\Gamma(n+n'+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2})}\,t^{-n'}\sum_{r=0}^{n'}(-1)^{n+r}\frac{(-n')_r\,(n+r)!}{r!\,(2n+2r)!}\,H_{2n+2r}(\sqrt{t}),$$

bzw.

(2, 5) $$L_n^{(n'+\frac{1}{2})}(t) = \frac{\Gamma(n+n'+\frac{3}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2})}\,t^{-n'-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{n'}(-1)^{n+r+1}\frac{(-n')_r\,(n+r)!}{r!\,(2n+2r+1)!}\,H_{2n+2r+1}(\sqrt{t}).$$

[7]) Vgl. z. B. [1], Gleichung (2, 81).

Schließlich wollen wir noch die Entwicklungen nach verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen anführen. Setzen wir in (1, 1) $k = m + \frac{1}{2}$, so erhalten wir unter Heranziehung von I (1, 8) und I (1, 9) sofort die unter der Bedingung (1, 4) geltende Entwicklung

$$t^{-2\nu} = \Gamma(2m+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r \, L_r^{(2m+2\nu)}(t)}{\Gamma(2m+2\nu+r+1)}. \tag{2, 6}$$

Ebenso erhalten wir für $k = m + n + \frac{1}{2}$ die allgemeinere, unter denselben Bedingungen konvergente Entwicklung

$$t^{-2\nu} L_n^{(2m)}(t) = \frac{1}{n!} \Gamma(2m+n+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r (n+r)! \, L_{n+r}^{(2m+2\nu)}(t)}{r! \, \Gamma(2m+2\nu+n+r+1)}. \tag{2, 7}$$

Die unendlichen Reihen auf den rechten Seiten von (2, 6) und (2, 7) brechen ab, wenn 2ν eine negative ganze Zahl oder Null ist.

Diese Beispiele könnte man durch die Angabe der Entwicklungen Hermitescher Polynome nach Laguerreschen und nach Batemanschen Polynomen usw. beliebig vermehren. Alle diese Relationen sind auf Grund der in I, § 1 mitgeteilten Formeln sehr leicht zu gewinnen, so daß sie hier nicht im Einzelnen angeschrieben werden müssen. Im übrigen sind sie ebenso wie Gleichungen (2, 1) bis (2, 6) Sonderfälle von (2, 7).

§ 3.

Reihen mit Funktionen des parabolischen Zylinders.

Um zu zeigen, welche Fülle von Einzelformeln außer den in dem vorigen Paragraphen abgeleiteten bzw. nur erwähnten Beziehungen (1, 1) enthält, wollen wir noch einige zum Teil bekannte, zum größeren Teil anscheinend neue Reihenentwicklungen nach den Funktionen des parabolischen Zylinders angeben, die aus (1, 1) bei besonderen Werten von k und m folgen.

Zunächst setzen wir in (1, 1)

$$k = n + \tfrac{3}{4}, \quad m = \tfrac{1}{4}, \quad \nu = \tfrac{1}{4}$$

und erhalten unter Heranziehung von I (1, 4), I (1, 12) und I (1, 18) nach einigen einfachen Zwischenrechnungen

$$D_{2n+1}(\sqrt{2t}) = 2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_r}{r!} (-1)^r k_{2n+2r+2}\left(\frac{t}{2}\right), \tag{3, 1}$$

eine bereits bekannte Beziehung[8]).

Um zu Entwicklungen *nach* parabolischen Zylinderfunktionen zu gelangen, setzen wir in (1, 1) etwa $m = \frac{1}{4} - \nu$ und $k = \frac{3}{4} - \nu$ und erhalten für

$$\mathfrak{Re}\, \nu < \tfrac{1}{4} \tag{3, 2}$$

[8]) [8], Gleichung (6, 2).

unter Verwendung von I (1, 8), I (1, 4) und I (1, 12) nach Zwischenrechnungen, die weggelassen werden mögen

$$(3,3)\quad t^{\frac{1}{2}-2\nu}e^{-\frac{1}{2}t}=\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\nu\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{(2r+1)!}(-2)^r D_{2r+1}(\sqrt{2t}).$$

Ein interessanter Sonderfall von (3, 3) ergibt sich für $2\nu=-n$. In diesem Falle bricht die unendliche Reihe ab, und wir erhalten

$$(3,4)\quad t^{n+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t}=\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r}{(2r+1)!}(-2)^r D_{2r+1}(\sqrt{2t}),$$

eine recht interessante Beziehung, die ebenso wie die allgemeinere (3, 3) bisher anscheinend unbekannt war. Ein bekannter Sonderfall von (3, 3) entsteht für $\nu=\frac{1}{2}$. In diesem Falle erhalten wir die *divergente* Reihe[9])

$$(3,5)\qquad \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{2t}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r!}{(2r+1)!}(-2)^r D_{2r+1}(\sqrt{2t}),$$

die — etwa mit Hilfe des Borelschen oder Eulerschen Verfahrens — summiert werden kann.

Reihen von ähnlichem Typus, in welchen Funktionen des parabolischen Zylinders mit geradem Index auftreten, erhalten wir, wenn wir in (1, 1) $k=\frac{1}{4}-\nu$ und $m=-\frac{1}{4}-\nu$ setzen. Und zwar ergibt sich für

$$(3,6)\qquad \Re\nu<0$$

unter Heranziehung von I (1, 14), I (1, 12) und I (1, 8)

$$(3,7)\qquad t^{-2\nu}e^{-\frac{1}{2}t}=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\nu\right)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{(2r)!}(-2)^r D_{2r}(\sqrt{2t}),$$

und insbesondere für $\nu=-\frac{1}{2}n$

$$(3,8)\qquad t^n e^{-\frac{1}{2}t}=\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r}{(2r)!}(-2)^r D_{2r}(\sqrt{2t}).$$

Allgemeinere Entwicklungen ergeben sich aus (1, 1) durch die Annahme $m=\frac{1}{4}-\nu$, $k=\frac{3}{4}+n-\nu$, die ähnlich wie bei der Ableitung von (3, 3), unter der Bedingung (3, 2)

$$(3,9)\quad t^{\frac{1}{2}-2\nu}e^{-\frac{1}{2}t}L_n^{(\frac{1}{2}-2\nu)}(t)$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n-2\nu)}{n!\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r(-2)^{-n-r}}{r!\,\Gamma(\frac{3}{2}+n+r)}D_{2n+2r+1}(\sqrt{2t})$$

---

[9]) [10], Gleichung (6). An der genannten Stelle wird die Reihe formal abgeleitet, ohne daß ihre Divergenz vermerkt wird. Daß sie tatsächlich divergiert, folgt aus (3, 2) und kann auch unmittelbar mit Hilfe der bekannten asymptotischen Darstellungen der Funktionen des parabolischen Zylinders für große Werte des Index bestätigt werden.

liefert. Für $n = 0$ geht (3, 9) in (3, 3) über. Für $\nu = -\frac{1}{2}n'$ erhalten wir aus (3,9)

$$(3,10)\quad t^{\frac{1}{2}+n'}e^{-\frac{1}{2}t}L_n^{(n'+\frac{1}{2})}(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n+n')}{n!\sqrt{2}}\sum_{r=0}^{n'}\frac{(-n')_r(-2)^{-n-r}}{r!\,\Gamma(\frac{3}{2}+n+r)}D_{2n+2r+1}(\sqrt{2t}),$$

für $\nu = -\frac{1}{2}$ wegen I (1, 9), I (1, 4) und I (1, 18) nach Ersetzung von n durch $n-1$ die von Shastri abgeleitete Beziehung [10])

$$(3,11)\quad k_{2n}\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})_r(-1)^{r+1}}{r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+r)}2^{-n-r+\frac{1}{2}}D_{2n+2r+1}(\sqrt{2t}).$$

Ein Gegenstück zu den Beziehungen (3, 9) bis (3, 11) erhalten wir aus (1, 1) durch die Annahme $m = -\frac{1}{4}-\nu$, $k = \frac{1}{4}+n-\nu$, die unter der Bedingung (3, 6)

$$(3,12)\quad t^{-2\nu}e^{-\frac{1}{2}t}L_n^{(-\frac{1}{2}-2\nu)}(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-2\nu+n)}{n!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r(-2)^{-n-r}}{r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+r)}D_{2n+2r}(\sqrt{2t})$$

ergibt. Für $n = 0$ geht (3, 12) in (3, 7) über. Für $\nu = -\frac{1}{2}n'$ erhalten wir

$$(3,13)\quad t^{n'}e^{-\frac{1}{2}t}L_n^{(n'-\frac{1}{2})}(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n+n')}{n!}\sum_{r=0}^{n'}\frac{(-n')_r(-2)^{-n-r}}{r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+r)}D_{2n+2r}(\sqrt{2t}),$$

während sich für $\nu = -\frac{3}{4}$ auf der linken Seite von (3, 12) wieder [wie in (3, 10)] eine k-Funktion ergibt:

$$(3,14)\quad \sqrt{t}\,k_{2n+2}\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-\frac{3}{2})_r(-1)^r}{r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+n+r)}2^{-n-r}D_{2n+2r}(\sqrt{2t}).$$

Bis auf drei Beziehungen, bei denen das Gegenteil ausdrücklich vermerkt ist, scheinen diese Beziehungen neu zu sein. Die aus I (1, 10) und I (1, 12) folgenden Formeln

$$(3,15)\quad \begin{aligned} D_{2n}(\sqrt{2t}) &= 2^{-n}e^{-\frac{1}{2}t}H_{2n}(\sqrt{t}),\\ D_{2n+1}(\sqrt{2t}) &= -2^{-n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t}H_{2n+1}(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

gestatten alle diese Beziehungen in solche mit Hermiteschen Polynomen zu „übersetzen".

§ 4.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{r!}N_{k+r+\nu,\,m+\nu}(t)\,x^r$.

Wir betrachten nunmehr eine Verallgemeinerung der in § 1 untersuchten Reihe. Die Laplacesche Transformierte der im Titel dieses Para-

[10]) [8], Gleichung (6, 1).

graphen genannten Reihe kann ebenso leicht summiert werden wie in § 1, und ergibt

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{r!}N_{k+r+\nu,\,m+\nu}(t)\,x^r\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{r!}\frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m+r-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+2\nu+r+\frac{1}{2}}}\,x^r$$

$$=\frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+2\nu+\frac{1}{2}}}\left(1-x\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}\right)^{-2\nu}=\frac{(1-x)^{-2\nu}\,(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s+\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{2\nu}\left(s+\frac{1}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}.$$

Da jedenfalls auf der positiven reellen s-Achse $\left|\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}\right|<1$, so konvergiert die in dieser Rechnung auftretende Binomialreihe sicher, wenn

$$|x|<1 \tag{4,1}$$

ist. Ferner müssen wir zunächst voraussetzen, daß $\mathfrak{Re}\,(m+\nu)>-\frac{1}{2}$, damit die verwendeten Laplaceschen Transformierten überhaupt einen Sinn haben. Setzen wir darüber hinaus voraus, daß sogar

$$\mathfrak{Re}\,m>-\tfrac{1}{2}\quad\text{und}\quad\mathfrak{Re}\,\nu>0, \tag{4,2}$$

so ist

$$\frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}=\mathfrak{L}\{N_{k,m}(t)\}\quad\text{und}\quad\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}\right)^{2\nu}}=\mathfrak{L}\left\{\frac{t^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}\right\}$$

und es ergibt sich nach dem Faltungssatz

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!}N_{k+r+\nu,\,m+\nu}(t)\,x^r&=(1-x)^{-2\nu}N_{k,m}(t)*t^{2\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}\\&=(1-x)^{-2\nu}\int_0^t N_{k,m}(\tau)\,(t-\tau)^{2\nu-1}e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}(t-\tau)}\,d\tau.\end{aligned}} \tag{4,3}$$

Die in dieser Beziehung enthaltene unendliche Reihe konvergiert unter der Voraussetzung (4, 1) für alle endlichen von Null verschiedenen reellen oder komplexen Werte von t sicher, wenn nur

$$|\arg t|<\frac{3\pi}{4} \tag{4,4}$$

ist. Denn unter dieser Voraussetzung gilt der in § 1 mitgeteilte asymptotische Ausdruck für die N-Funktion, aus der die Konvergenz der Reihe sofort gefolgert werden kann. Für Werte von z, die außerhalb des durch (4, 4) bestimmten Sektors liegen, kann die Konvergenz auf Grund der Umlaufsrelationen der N-Funktionen bewiesen werden. Die Bedingungen (4, 2) dienen dazu, die Konvergenz des auf der rechten Seite

von (4, 3) auftretenden Faltungsintegrals zu sichern. Sie können in der üblichen Weise durch Einführung von Doppelschleifenintegralen entbehrlich gemacht werden.

Interessant ist der Sonderfall $\nu = \frac{1}{2}$, der eine (1, 6) entsprechende Beziehung, nämlich

$$(4,5)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} N_{k+r+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(t)\, x^r = \frac{1}{1-x}\, N_{k,\,m}(t) * e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}$$

ergibt, aus der wieder die entsprechende endliche Summe

$$(4,6)\qquad \boxed{\sum_{r=0}^{n-1} N_{k+r+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(t)\, x^r = \frac{1}{1-x}\left[N_{k,\,m}(t) - x^n\, N_{k+n,m}(t)\right] * e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}}$$

abgeleitet werden kann[11]). (4, 6) gilt, wenn $\mathfrak{Re}\, m > -\frac{1}{2}$ ist, und zwar für alle reellen oder komplexen Werte von x. Für $x = 1$ erscheint die rechte Seite allerdings in unbestimmter Form, doch brauchen wir den Grenzwert für diesen Fall nicht erst zu ermitteln, da offenbar für $x \to 1$ (4, 6) in (1, 8) übergehen muß.

Besonders einfach werden die Formeln für $x = -1$. Da erhalten wir aus (4,3)

$$(4,7)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!}\, \Gamma(2\nu + r)\, N_{k+r+\nu,\, m+\nu}(t) = 2^{-2\nu} \int_0^t N_{k,\,m}(\tau)\, (t-\tau)^{2\nu-1}\, d\tau,$$

aus (4, 6)

$$(4,8)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r\, N_{k+r+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(t)\\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^t \left[N_{k,\,m}(\tau) - (-1)^n\, N_{k+n,\,m}(\tau)\right] d\tau,\end{aligned}}$$

und indem wir in dieser letzten Gleichung $n \to \infty$ gehen lassen

$$(4,9)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r\, N_{k+r+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_0^t N_{k,\,m}(\tau)\, d\tau.$$

Die unendliche Reihe auf der linken Seite von (4, 7) konvergiert nur, wenn außer (4, 2) noch (1, 4) erfüllt ist. Ist (1, 4) nicht erfüllt, so ist die Reihe wenigstens etwa nach dem Eulerschen Summierungsverfahren summierbar, und ihre Euler-Summe ist die rechte Seite von (4, 7).

---

[11]) Vgl. die Ableitung von (1, 8).

§ 5.

Sonderfälle.

Einige wenige Sonderfälle der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Beziehungen mögen explizite angeschrieben werden. Wieder fangen wir mit Reihen an, welche die k-Funktionen von Bateman enthalten.

Setzen wir in (4, 3) zunächst $m = \frac{1}{2} - \nu$ und $k = n - \nu$, so erhalten wir unter Anwendung von I (1, 4), I (1, 18) und I (1, 9) für

$$0 < \Re e\, \nu < 1$$

$$(5,1)\quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!}(-1)^{n+r-1} k_{2n+2r}\left(\frac{t}{2}\right) x^r$$

$$= \frac{(n-1)!\,(1-x)^{-2\nu}}{\Gamma(n-2\nu+1)} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t} \int_0^t L_{n-1}^{(1-2\nu)}(\tau)\, e^{\frac{x\tau}{1-x}} \left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{2\nu-1} d\tau.$$

Setzen wir in (5, 1) insbesondere $\nu = \frac{1}{2}$, so ergibt sich die einfachere Beziehung

$$(5,2)\quad \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{n+r-1} k_{2n+2r}\left(\frac{t}{2}\right) x^r = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}}{1-x} \int_0^t L_{n-1}(\tau)\, e^{\frac{x\tau}{1-x}} d\tau.$$

Während die Beziehungen (5, 1) und (5, 2) in ihrer allgemeinen Form bisher in der Literatur nicht vermerkt worden zu sein scheinen, ist der einfachste Sonderfall von (5, 2), nämlich der für $n = 1$ bereits von Shastri angegeben worden. Setzen wir in (5, 2) $n = 1$, ersetzen r durch $r - 1$ und beachten, daß $L_0(\tau) = 1$ ist, so ergibt sich aus (5, 2) sofort

$$(5,3)\quad \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} k_{2r}\left(\frac{t}{2}\right) x^r$$

$$= x \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}}{1-x} \int_0^t e^{\frac{x\tau}{1-x}} d\tau = e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}t}\ ^{12}).$$

Setzen wir in (4, 7) $m = \frac{1}{2} - \nu$ und $k = n - \nu$, so erhalten wir ähnlich wie vorhin die für

$$0 < \Re e\, \nu < \tfrac{3}{8}$$

gültige Beziehung

$$(5,4)\quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!} k_{2n+2r}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^{-2\nu}}{\Gamma(1-2\nu+n)} \int_0^t L_{n-1}^{(1-2\nu)}(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\tau} \left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{2\nu-1} d\tau.$$

---

[12]) [8], Gleichungen (5, 2), (5, 4) und (5, 5).

Die Summe der auf der linken Seite dieser Beziehung stehenden Reihe wurde in anderer Form von Shastri angegeben [13]).

Setzen wir in (4, 3) $m = \frac{1}{4} - \nu$ und $k = \frac{3}{4} + n - \nu$, so kommen wir auf Hermitesche Polynome. Nach I (1, 12) und I (1, 8) erhalten wir nämlich in diesem Falle nach Ersetzung von x durch $-x$ und τ durch $t - \tau$

$$(5,5)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{(2n+2r+1)!}\,\frac{(n+r)!}{n!\,r!}\,x^r H_{2n+2r+1}(\sqrt{t})$$
$$= \sqrt{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}(1+x)^{-2\nu}}{\Gamma(\frac{3}{2}+n-2\nu)}\int_0^t L_n^{(\frac{1}{2}-2\nu)}(t-\tau)\,e^{\frac{x\tau}{1+x}}\left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{1-2\nu}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

und insbesondere für $n = 0$ wegen $L_0^{(\alpha)}(\tau) = 1$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{(2r+1)!}\,x^r H_{2r+1}(\sqrt{t})$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}\,(1+x)^{-2\nu}}{\Gamma(\frac{3}{2}-2\nu)}\int_0^t \tau^{2\nu-1}(t-\tau)^{\frac{1}{2}-2\nu}\,e^{\frac{x\tau}{1+x}}\,d\tau.$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser letzten Beziehung stellt eine M-Funktion dar, wie man nach der Substitution $\tau = \frac{u+1}{2}\,t$ durch Vergleich mit einer bekannten Integraldarstellung [14]) dieser Funktionen sofort feststellt. Daher ergibt sich folgendes nicht uninteressantes Ergebnis

$$(5,6)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{(2r+1)!}\,x^r H_{2r+1}(\sqrt{t})$$
$$= -2\sqrt{t}\,(1+x)^{-2\nu}\,e^{\frac{1}{2}\frac{xt}{1+x}}\left(\frac{xt}{1+x}\right)^{-\frac{3}{4}} M_{\frac{3}{4}-2\nu,\,\frac{1}{4}}\left(\frac{xt}{1+x}\right),$$

welches für $2\nu = -n$ in das Multiplikationstheorem der Hermiteschen Polynome übergeht. Auf demselben Wege können für $m = -\frac{1}{4} - \nu$ und $k = \frac{1}{4} + n - \nu$ entsprechende Formeln für gerade Hermitesche Polynome erhalten werden, deren ausführliche Notierung unterblieben ist, um die Anzahl der Beispiele nicht ungebührlich zu steigern.

Wir übergehen viele andere nicht ganz uninteressante Sonderfälle, deren Anschreibung auf Grund der aufgestellten Formeln dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten dürfte, und wollen nur noch die der Beziehung (5, 6) entsprechende Formel mit Laguerreschen Polynomen angeben. Diese erhalten wir, wenn wir in (4, 3) zunächst $k = m + \frac{1}{2}$ setzen, hierauf $m + \nu$ durch m ersetzen und dann I (1, 8) und I (1, 9) verwenden, wodurch sich nach Ersetzung von x durch $-x$ zunächst

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)\,(-x)^r}{\Gamma(2m+r+1)}\,L_r^{(2m)}(t)$$
$$= \frac{(1+x)^{-2\nu}\,t^{-2m}}{\Gamma(2m-2\nu+1)}\int_0^t \tau^{2m-2\nu}(t-\tau)^{2\nu-1}\,e^{\frac{x}{1+x}(t-\tau)}\,d\tau$$

[13]) [7], Gleichung (5, 7).

[14]) [13], S. 352, Example 1.

ergibt. Das in dieser Gleichung auftretende Integral berechnen wir wieder auf Grund der oben angeführten Integraldarstellung der Whittakerschen Funktion und erhalten nach Eintragen seines Wertes in die letzte Gleichung

$$(5,7)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r\,(-x)^r}{(2m+1)_r}\,L_r^{(2m)}(t) = (1+x)^{-2\nu}\,e^{\frac{1}{2}\frac{xt}{1+x}}\left(\frac{xt}{1+x}\right)^{-m-\frac{1}{2}} M_{m-2\nu+\frac{1}{2},\,m}\left(\frac{xt}{1+x}\right).$$

Diese Reihe, welche noch eine Anzahl besonderer Reihen als Spezialfälle enthält, gilt für $|x|<1$ für alle Werte von m und ν, ausgenommen solche Werte, für welche $2m$ eine negative ganze Zahl wird. Insbesondere ergibt sie für $2\nu = 2m+1$ nach I (1, 8) die bekannte erzeugende Funktion der Laguerreschen Polynome

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-x)^r\,L_r^{(2m)}(t) = \frac{e^{\frac{xt}{1+x}}}{(1+x)^{2m+1}},$$

und für $2\nu = -n$ und $2m = \alpha$ das Multiplikationstheorem der Laguerreschen Polynome

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r}{(\alpha+1)_r}\,(-x)^r\,L_r^{(\alpha)}(t) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n}\,(1+x)^n\,L_n^{(\alpha)}\left(\frac{xt}{1+x}\right)^{15}).$$

Mit dieser Formel wollen wir die Reihe der Beispiele schließen.

§ 6.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\,N_{k+r,\,m}(t)$.

In diesem Paragraphen werden wir die für alle reelle oder komplexe Werte von x und alle von Null verschiedenen reellen oder komplexen Werte von t unter der Bedingung

$$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > \Re e\, \nu > 0$$

geltende Beziehung

$$(6,1)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\,N_{k+r,\,m}(t) = e^x\,x^{\frac{1}{2}-\nu}\,N_{k-\nu,\,m-\nu}(t) * t^{\nu-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\,J_{2\nu-1}(2\sqrt{xt}) = e^x\,x^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^t N_{k-\nu,\,m-\nu}(t-\tau)\,\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}\tau}\,J_{2\nu-1}(2\sqrt{x\tau})\,d\tau$$

[15]) Vgl. auch I (5, 4).

beweisen. Die Ableitung dieser Formel kann in derselben Weise vorgenommen werden wie die Ableitung von (4, 3), wobei nur an der Stelle der Binomialreihe eine Exponentialreihe zu summieren ist. Wir wollen jedoch einem von Doetsch[16]) in der Theorie der Laguerreschen Polynome eingeschlagenen Vorgang folgend (6, 1) geradezu aus (4, 3) ableiten, wodurch die innere Verwandtschaft dieser beiden Beziehungen besser zum Vorschein kommt. Zu diesem Behufe ersetzen wir zunächst in (4, 3) t durch z und x durch $\frac{1}{s}$, wodurch die folgende, für $\left|\frac{1}{s}\right| < 1$ also gewiß für $\Re e\, s > 1$ konvergente Entwicklung entsteht:

$$(6,2)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!\, s^{2\nu+r}} N_{k+r+\nu,\, m+\nu}(z) = \int_0^z N_{k,m}(z-\zeta)\, \zeta^{2\nu-1} (s-1)^{-2\nu} e^{-\frac{1}{2}\frac{s+1}{s-1}\zeta} d\zeta.$$

Nun ist aber

$$(6,3)\qquad \frac{\Gamma(2\nu+r)}{s^{2\nu+r}} = \mathfrak{L}\{t^{2\nu+r-1}\}\ ^{17})$$

und

$$(6,4)\qquad \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{s+1}{s-1}\zeta}}{(s-1)^{2\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\zeta} \frac{e^{-\frac{\zeta}{s-1}}}{(s-1)^{2\nu}} = e^{-\frac{1}{2}\zeta}\, \mathfrak{L}\{\zeta^{\frac{1}{2}-\nu} e^{t}\, t^{\nu-\frac{1}{2}} J_{2\nu-1}(2\sqrt{\zeta t})\}\ ^{18}) \quad (\Re e\, \nu > 0).$$

Setzen wir (6, 3) und (6, 4) in (6, 2) ein und gehen auf beiden Seiten zu den Oberfunktionen über — die hierbei vorgenommene Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation auf der linken Seite ist wegen der sogleich nachzuweisenden gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in t offenbar gestattet, ebenso wie die Vertauschung der Integrationsfolge auf der rechten Seite — so erhalten wir

$$(6,5)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2\nu+r-1}}{r!} N_{k+r+\nu,\, m+\nu}(z) = e^{t}\, t^{\nu-\frac{1}{2}} \int_0^z N_{k,m}(z-\zeta)\, \zeta^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\zeta} J_{2\nu-1}(2\sqrt{\zeta t})\, d\zeta,$$

eine Beziehung, welche bis auf die Bezeichnung mit (6, 1) übereinstimmt.

Zur Feststellung der Konvergenzbedingungen der Reihe auf der linken Seite von (6, 1) bedienen wir uns wieder des unter der Bedingung (4, 4)

---

[16]) [2].
[17]) [13], § 12, 2.
[18]) [11], S. 386, Gleichung (5).

geltenden asymptotischen Ausdruckes für die N-Funktionen[19]), aus welcher unter Heranziehung der Stirlingschen Formel $r! \sim \sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r}$

$$\left| \frac{1}{r!} x^{2\nu+r-1} N_{k+r,m}(t) \right| = |x^{2\nu+r-1}| O(e^r r^{-m-\frac{3}{4}-r}),$$

also die absolute und in jedem ganz im Endlichen gelegenen x-Bereich gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe folgt.

Wie bei der Reihe (4, 3) ergibt sich ein interessanter und verhältnismäßig einfacher Sonderfall von (6, 1) für $\nu = \frac{1}{2}$, nämlich

$$(6,6) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k+r,m}(t) = e^x \int_0^t N_{k-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2}}(t-\tau) J_0(2\sqrt{x\tau})\, e^{-\frac{1}{2}\tau}\, d\tau.$$

Ein weiterer, noch einfacherer Sonderfall ergibt sich wegen

$$J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \sin w^{20})$$

für $\nu = \frac{3}{4}$. Dann wird nämlich aus (6, 1)

$$(6,7) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k+r,m}(t) = \frac{e^x}{\sqrt{\pi x}} \int_0^t N_{k-\frac{3}{4},m-\frac{3}{4}}(t-\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\tau} \sin 2\sqrt{x\tau}\, d\tau.$$

Im Gegensatz zu der Reihe (4, 3) spielen bei (6, 1) und ihren Sonderfällen die Punkte $x = \pm 1$ keine bevorzugte Rolle, da sie nicht am Rande des (unendlich ausgedehnten) Konvergenzkreises dieser Reihe liegen.

Ist

$$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > \Re e\, k > 0,$$

so können wir in (6, 1) $\nu = k$ setzen und erhalten wegen I (1, 4) und I (1, 13) nach einigen Zwischenrechnungen

$$(6,8) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k+r,m}(t) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^x x^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t J_{2k-1}(2\sqrt{x\tau})\, I_{m-k}\left(\frac{t-\tau}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}\tau}\, \tau^{k-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{m-k} d\tau$$

worin wie üblich

$$(6,9) \quad I_\nu(w) = i^{-\nu} J_\nu(iw)$$

gesetzt ist. Die rechte Seite von (6, 8) kann als erzeugende Funktion der Whittakerschen Funktionen aufgefaßt werden. Übrigens hätten wir auf dieselbe Weise aus (4, 3) eine vielleicht noch einfachere erzeugende Funktion der Whittakerschen Funktionen gewinnen können.

[19]) Vgl. § 1.

[20]) [11], S. 54, Gleichung (3), vgl. auch [12], S. 48, Gleichung (11).

Wir verzichten darauf, die Tragweite und Allgemeinheit der in diesem Paragraphen abgeleiteten allgemeinen Beziehungen wie in den früheren Paragraphen durch Beispiele zu belegen. Der Leser wird ohne weiteres imstande sein, etwa dieselben Sonderfälle auf Grund der angegebenen Formeln durchzurechnen, die wir früher in den §§ 2, 3 und 5 behandelt haben.

§ 7.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k,m+r}(t)$.

Nachdem wir in den vorangehenden Paragraphen einige besondere Reihen von der Form (1) verhältnismäßig ausführlich untersucht haben, können wir uns bei den beiden anderen Typen umso kürzer fassen. In der Regel werden wir die Behandlung von Sonderfällen dem Leser überlassen und nur solche anführen, die aus irgendeinem Grunde besonders bemerkenswert erscheinen. Zunächst wollen wir Reihen vom Typus (2) betrachten.

Einleitend sei einiges über die Konvergenz solcher Reihen gesagt. Für große Werte von r ist, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe[21]),

$$N_{k,m+r}(t) = \frac{t^{m+r+\frac{1}{2}} M_{k,m+r}(t)}{\Gamma(2m+2r+1)} = \frac{t^{2m+2r}}{\Gamma(2m+2r+1)}[1+O(r^{-1})],$$

und aus diesem einfachen asymptotischen Verhalten der N-Funktionen für große r folgt sofort, daß die Reihe (2) dieselben Konvergenzeigenschaften hat, wie die „ihr zugeordnete Potenzreihe“

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{t^{2r}}{\Gamma(2m+2r+1)},$$

und also insbesondere gewiß in jedem abgeschlossenen, ganz im Innern des Kreises

$$|t| = \left\{ \overline{\lim_{r\to\infty}} \left| \sqrt[2r]{\frac{a_r}{\Gamma(2m+2r+1)}} \right| \right\}^{-1}$$

liegenden Bereich absolut und in t gleichmäßig konvergiert, vorausgesetzt, daß der den Radius dieses Kreises bestimmende Grenzwert existiert und von Null verschieden ist. Aus diesem Konvergenzkriterium folgt sofort, daß die im Titel dieses Paragraphen genannte Reihe absolut und in beiden Veränderlichen x und t gleichmäßig konvergiert, vorausgesetzt, daß diese Veränderlichen auf ganz im Endlichen gelegene, aber im Übrigen beliebige Gebiete der komplexen Ebene beschränkt werden.

Gelingt es, die Summe der in Rede stehenden Reihe in geschlossener Form darzustellen, so haben wir eine weitere erzeugende Funktion der

[21]) [5], Gleichung (3, 6).

Whittakerschen Funktionen gewonnen. Wir bestimmen die Summe dieser Reihe vermittels ihrer Laplaceschen Transformierten unter der Voraussetzung

(7, 1) $$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > |\Re e\, k|.$$

Es ist

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k,m+r}(t)\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r\,(s-\frac{1}{2})^{k-m-r-\frac{1}{2}}}{r!\,(s+\frac{1}{2})^{k+m+r+\frac{1}{2}}} = \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}\, e^{\frac{x}{s^2-\frac{1}{4}}} = \frac{\exp\left(-\frac{x}{s+\frac{1}{2}}\right)}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}\,\frac{\exp\frac{x}{s-\frac{1}{2}}}{(s-\frac{1}{2})^{-k+m+\frac{1}{2}}}.$$

Nun ist unter den angegebenen Voraussetzungen

(7, 2) $$\frac{\exp\left(-\frac{x}{s+\frac{1}{2}}\right)}{(s+\frac{1}{2})^{m+k+\frac{1}{2}}} = \mathfrak{L}\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t}\, J_{m+k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{xt})\right\}$$

und

$$\frac{\exp\frac{x}{s-\frac{1}{2}}}{(s-\frac{1}{2})^{m-k+\frac{1}{2}}} = \mathfrak{L}\left\{\left(\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{m-k-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}t}\, I_{m-k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{xt})\right\}$$ [22].

Daher ergibt sich auf Grund des Faltungssatzes die gesuchte erzeugende Funktion in der Gestalt

(7, 3)
$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k,m+r}(t)\\ &= \left(\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} J_{m+k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{xt}) * \left(\sqrt{\frac{t}{x}}\right)^{m-k-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}t} I_{m-k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{xt})\\ &= x^{\frac{1}{2}-m} e^{\frac{1}{2}t} \int_0^t e^{-\tau} \tau^{\frac{1}{2}(m+k-\frac{1}{2})} (t-\tau)^{\frac{1}{2}(m-k-\frac{1}{2})} J_{m+k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x\tau})\, I_{m-k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x(t-\tau)})\, d\tau\end{aligned}.$$

[22]) Diese Laplaceschen Transformierten können etwa auf Grund einer von Hankel stammenden Formel berechnet werden.

Ist $|\Re k| < 1$, so erhalten wir insbesondere für $m = \frac{1}{2}$

$$(7,4) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k,\frac{1}{2}+r}(t) = e^{\frac{1}{2}t} \int_0^t e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2}k} J_k(2\sqrt{x\tau})\, I_{-k}(2\sqrt{x(t-\tau)})\, d\tau,$$

während im Falle $|\Re k| < \frac{1}{2}$ die Annahme $m = 0$

$$(7,5) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k,r}(t) = e^{\frac{1}{2}t} \sqrt{x} \int_0^t e^{-\tau} \tau^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-k)} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)} J_{k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x\tau})\, I_{-k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x(t-\tau)})\, d\tau$$

liefert.

Aus (7,3) gewinnen wir noch eine Integraldarstellung der Funktion $N_{k,m}(t)$, indem wir die rechte Seite dieser Gleichung nach Potenzen von x entwickeln und die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf beiden Seiten vergleichen. Dabei verwenden wir folgende bekannte Entwicklung[23])

$$(7,6) \qquad J_{m+k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x\tau})\, I_{m-k-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x(t-\tau)})$$
$$= \frac{(x\tau)^{\frac{1}{2}(m+k-\frac{1}{2})}\,[x(t-\tau)]^{\frac{1}{2}(m-k-\frac{1}{2})}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x\tau)^r}{r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m+r)} F\left(-r,\ \frac{1}{2}-k-m-r;\ \frac{1}{2}-k+m;\ 1-\frac{t}{\tau}\right),$$

welche sofort die Entwicklung des Integranden in (7,3) nach Potenzen von x ergibt. Setzen wir (7,6) in (7,3) ein, integrieren wir gliedweise und setzen die Koeffizienten von x^r auf beiden Seiten einander gleich, so erhalten wir nach Ersetzung von m durch $m - r$ folgende anscheinend noch nicht bekannte Integraldarstellung

$$(7,7) \qquad N_{k,m}(t) = \frac{(-1)^r e^{\frac{1}{2}t}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m-r)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)}$$
$$\cdot \int_0^t e^{-\tau} \tau^{k+m-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{-k+m-r-\frac{1}{2}} \cdot F\left(-r,\ \frac{1}{2}-k-m;\ \frac{1}{2}-k+m-r;\ 1-\frac{t}{\tau}\right) d\tau.$$

---

[23]) [11], § 5, 41, Gleichung (2).

Diese Integraldarstellung gilt unter folgenden Bedingungen: r ist eine nichtnegative ganze Zahl, und es ist

$$\Re e\,(m \pm k) > r - \tfrac{1}{2}. \tag{7,8}$$

Durch die Substitution $\tau = \frac{u+1}{2}\,t$ bringen wir noch (7, 7) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} N_{k,m}(t) = {} & \frac{(-1)^r\,(\frac{1}{2}t)^{2m-r}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m-r)\,\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} \\ & \cdot\int_{-1}^{+1} e^{-\frac{1}{2}ut}\,(1+u)^{k+m-\frac{1}{2}}\,(1-u)^{-k+m-r-\frac{1}{2}} \\ & \cdot F\Big(-r,\ \tfrac{1}{2}-k-m;\ \tfrac{1}{2}-k+m-r;\ \frac{u-1}{u+1}\Big)\,du \end{aligned} \tag{7,9}$$

Insbesondere ergibt sich für $r = 0$ eine bekannte Integraldarstellung der Whittakerschen Funktion[24]).

§ 8.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!}\,x^r\,N_{k,m+r}(t)$.

Die im Titel dieses Paragraphen genannte Reihe konvergiert für alle Werte von x und t absolut und gleichmäßig und es ist daher für $\Re e\,m > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\Big\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{r!}\,x^r\,N_{k,m+r}(t)\Big\} &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)^r}{r!}\,x^r\,\frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-r-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+r+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}\Big(1-\frac{x}{s^2-\frac{1}{4}}\Big)^{-2\nu}, \end{aligned} \tag{8,1}$$

wofür wir unter der Voraussetzung, daß

$$\Re e\,m + \tfrac{1}{2} > \Re e\,2\nu > 0, \tag{8,2}$$

auf Grund der Formel[25])

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}\{t^{2\nu-\frac{1}{2}}\,I_{2\nu-\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+4x})\} \\ &\quad = i^{\frac{1}{2}-2\nu}\int_0^{\infty} e^{-st}\,t^{2\nu-\frac{1}{2}}\,J_{2\nu-\frac{1}{2}}\Big(\frac{i}{2}\,t\sqrt{1+4x}\Big)\,dt = \frac{(1+4x)^{\nu-\frac{1}{4}}\,\Gamma(2\nu)}{\sqrt{\pi}\,(s^2-\frac{1}{4}-x)^{2\nu}} \end{aligned}$$

---

[24]) [13], S. 352, Example 1.
[25]) [11], S. 386, Gleichung (5).

auch

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\nu)_r}{r!}\,x^r\,N_{k,m+r}(t)\right\}$$

$$=\mathfrak{L}\{N_{k,m-2\nu}(t)\}\;\mathfrak{L}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,t^{2\nu-\frac{1}{2}}\,I_{2\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\,t\sqrt{1+4x}\right)}{(1+4x)^{\nu-\frac{1}{4}}\,\Gamma(2\nu)}\right\}$$

schreiben können. Der Übergang zu den Oberfunktionen ergibt unter Heranziehung des Faltungssatzes

(8, 3)
$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!}\,x^r\,N_{k,m+r}(t)\\&=\sqrt{\pi}\,(1+4x)^{\frac{1}{4}-\nu}\,N_{k,m-2\nu}(t)*t^{2\nu-\frac{1}{2}}\,I_{2\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\,t\sqrt{1+4x}\right)\\&=\sqrt{\pi}\,(1+4x)^{\frac{1}{4}-\nu}\int_0^t\tau^{2\nu-\frac{1}{2}}\,I_{2\nu-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\,\tau\sqrt{1+4x}\right)N_{k,m-2\nu}(t-\tau)\,d\tau,\end{aligned}$$

eine Beziehung, die für alle endlichen Werte der Veränderlichen x und t und alle den Bedingungen (8, 2) genügenden Werte der Parameter k, m und ν gilt. Sowohl Veränderliche als auch Parameter können reell oder komplex sein.

Für besondere Werte der Parameter erhalten wir noch einfachere Beziehungen. Für $2\nu = m - k + \frac{1}{2}$ erhalten wir wegen I (1, 8) für

$$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > \Re e\, k > 0.$$

(8, 4)
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+m+r)\,N_{k,m+r}(t)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2k)}\,(1+4x)^{\frac{1}{2}(k-m)}\,e^{-\frac{1}{2}t}\int_0^t\tau^{m-k}\,(t-\tau)^{2k-1}\,e^{\frac{1}{2}\tau}\,I_{m-k}\left(\tfrac{1}{2}\,\tau\sqrt{1+4x}\right)d\tau.$$

Entsprechend ergibt sich unter der Voraussetzung

$$\Re e\, m + \tfrac{1}{2} > -\Re e\, k > 0$$

für $2\nu = m + k + \frac{1}{2}$

(8, 5)
$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+k+m+r)\,N_{k,m+r}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-2k)}\,(1+4x)^{-\frac{1}{2}(k+m)}\,e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\cdot\int_0^t\tau^{m+k}\,(t-\tau)^{-2k-1}\,e^{-\frac{1}{2}\tau}\,I_{m+k}\left(\tfrac{1}{2}\,\tau\sqrt{1+4x}\right)d\tau.$$

Ferner erhalten wir für $2\nu = 1$ aus (8, 3) wegen

$$I_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\,\mathfrak{Sin}\,w \tag{8,6}$$

die für $\Re e\, m > \frac{1}{2}$ gültige Entwicklung

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r N_{k,\,m+r}(t) = 2(1+4x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^t N_{k,\,m-1}(t-\tau)\,\mathfrak{Sin}\,\tfrac{1}{2}\tau\sqrt{1+4x}\cdot d\tau. \tag{8,7}$$

Ganz besonders einfach wird diese Beziehung noch, wenn wir insbesondere $k = \pm(m-\frac{1}{2})$ setzen und I (1, 8) heranziehen. Es ergibt sich nämlich unter dieser Annahme zunächst

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r N_{\pm(m-\frac{1}{2}),\,m+r}(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4x}} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2m-2} e^{\mp\frac{1}{2}(t-\tau)}}{\Gamma(2m-1)} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}\tau\sqrt{1+4x}} - e^{-\frac{1}{2}\tau\sqrt{1+4x}}}{2}\, d\tau,$$

wobei der hyperbolische Sinus im Integranden bereits durch Exponentialfunktionen ausgedrückt wurde. Das auf der rechten Seite stehende Integral zerfällt somit in die Differenz zweier Integrale, die beide mittels der unvollständigen Gammafunktion[26])

$$\gamma(\nu, x) = \int_0^x u^{\nu-1} e^{-u}\, du \tag{8,8}$$

ausgedrückt werden können, und für die auf der linken Seite der vorletzten Gleichung stehende Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r N_{\pm(m-\frac{1}{2}),\,m+r}(t) = \frac{(1+4x)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2m-1)} \left\{ \left(\frac{\pm 1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{1-2m} e^{\frac{1}{2}t\sqrt{1+4x}}\, \gamma\left[2m-1, \frac{\pm 1+\sqrt{1+4x}}{2}t\right] - \left(\frac{\pm 1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{1-2m} e^{-\frac{1}{2}t\sqrt{1+4x}}\, \gamma\left[2m-1, \frac{\pm 1-\sqrt{1+4x}}{2}t\right] \right\} \tag{8,9}$$

$$(\Re e\, m > \tfrac{1}{2})$$

ergeben. Auf beiden Seiten dieser Beziehung sind jeweils nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen zu nehmen.

---

[26]) Vgl. etwa [13], § 16, 2 (II).

§ 9.

Beziehungen mit Besselschen Funktionen.

Durch die besondere Annahme $k = 0$ entstehen aus den in den beiden vorangehenden Paragraphen abgeleiteten Beziehungen ebenso viele Formeln mit Besselschen Funktionen, von denen manche bekannt sind, andere hinwieder nicht bekannt zu sein scheinen. Einige von diesen Sonderformeln mögen im folgenden hergeleitet werden.

Setzen wir zunächst in (7, 3) $k = 0$, so erhalten wir nach I (1, 13), I (1, 4) und Gleichung (6, 9) dieser Arbeit nach einigen Vereinfachungen, bei denen unter anderen auch die Verdopplungsformel der Gammafunktion [27])

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m+1) = 2^{2m}\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(m+1)$$

heranzuziehen ist, die für $\Re m > -\frac{1}{2}$ gültige Beziehung

$$(9,1)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\,\frac{t^{m+r}}{\Gamma(m+r+\frac{1}{2})}\,I_{m+r}\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{1}{2}-m}\,e^{\frac{1}{2}t}\int_0^t J_{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x\tau})\,I_{m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{x(t-\tau)})\,e^{-\tau}\,[\tau(t-\tau)]^{\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2})}\,d\tau.$$

Ganz entsprechend ergibt sich aus (7, 4)

$$(9,2)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(xt)^r}{(r!)^2}\,I_{r+\frac{1}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^t J_0(2\sqrt{x\tau})\,I_0(2\sqrt{x(t-\tau)})\,e^{-\tau}\,d\tau.$$

Setzen wir in (7, 5) $k = 0$ und berücksichtigen, daß

$$(9,3)\qquad J_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\cos w \qquad \text{und} \qquad I_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\,\mathfrak{Cof}\,w,$$

so erhalten wir die Beziehung

$$(9,4)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(4xt)^r}{(2r)!}\,I_r\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}\,e^{\frac{1}{2}t}\int_0^t \cos 2\sqrt{x\tau}\,\mathfrak{Cof}\,2\sqrt{x(t-\tau)}\,\frac{e^{-\tau}\,d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}.$$

Ganz entsprechend erhalten wir aus (7, 9) für $k = 0$ eine Integraldarstellung der Besselschen Funktionen, die wir nach Ersetzung von t durch $2it$ in folgender Form schreiben können:

$$(9,5)\qquad J_m(t) = \frac{(-i)^r\,2^{-m}\,t^{m-r}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m-r+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{iut}(1+u)^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{m-r-\frac{1}{2}}\,F\Big(-r,\,\tfrac{1}{2}-m;\,\tfrac{1}{2}+m-r;\,\frac{u-1}{u+1}\Big)\,du.$$

Hierbei bedeutet r eine der Ungleichung $0 \leq r < \Re m + \frac{1}{2}$ genügende ganze Zahl. Für $r = 0$ erhalten wir insbesondere die bekannte Poissonsche Integraldarstellung

[27]) [13], § 12, 15.

der Besselschen Funktionen[28]), während die allgemeine Formel (9, 5) einer von Gegenbauer angegebenen Integraldarstellung entspricht[29]).

Setzen wir in (8, 1) $k = 0$ und $2\nu = m + \frac{1}{2}$, so ergibt sich wegen I (1, 13) und I (1, 4) nach einigen Vereinfachungen

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}\, x^r i^{-m-r}}{r!\,\Gamma(m+\frac{1}{2})} t^{m+r} J_{m+r}\left(\frac{it}{2}\right)\right\} = \left(s^2 - \frac{1}{4} - x\right)^{-m-\frac{1}{2}}$$

$$= \mathfrak{L}\left\{\frac{\sqrt{\pi}\, t^m}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} (i\sqrt{1+4x})^{-m} J_m\left(\frac{it}{2}\sqrt{1+4x}\right)\right\}^{30})$$

und der Übergang zu den Oberfunktionen liefert das bekannte Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen[31])

$$(9, 6) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-ixt)^r}{r!} J_{m+r}\left(\frac{it}{2}\right) = (1+4x)^{-\frac{m}{2}} J_m\left(\frac{it}{2}\sqrt{1+4x}\right).$$

Als letztes Beispiel dieser Art schreiben wir noch den entsprechenden Sonderfall von (8, 3) an. Unter der Voraussetzung

$$0 < \Re e\, 2\nu < \Re e\, m + \tfrac{1}{2}$$

ergibt sich aus dieser Gleichung für $k = 0$ genau so wie in den vorigen Fällen

$$(9, 7) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!\,\Gamma(m+r+\frac{1}{2})} x^r t^{m+r} I_{m+r}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(1+4x)^{\frac{1}{4}-\nu}}{\Gamma(m-2\nu+\frac{1}{2})} \int_0^t \tau^{2\nu-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{m-2\nu} I_{2\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{2}\sqrt{1+4x}\right) I_{m-2\nu}\left(\frac{t-\tau}{2}\right) d\tau.$$

§ 10.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)$.

Als dritte größere Gruppe betrachten wir Reihen von der Gestalt (3). Bevor wir in die Behandlung einiger besonderer Reihen von diesem Typus eintreten, schicken wir wieder einige Bemerkungen über die Konvergenz der Reihe (3) voraus. Um hierüber Aufschluß zu gewinnen, ermitteln wir aus der Potenzreihenentwicklung von $N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)$ das asym-

---

[28]) [11], S. 48, Gleichung (4).
[29]) [11], S. 80, Gleichung (1).
[30]) Vgl. auch Anmerkung [25]).
[31]) [11], S. 142, Gleichung (16).

ptotische Verhalten dieser Funktion für große positive Werte von r. Aus I (1, 4) folgt sofort

$$(10,1)\quad N_{k+\frac{r}{2},\,m+\frac{r}{2}}(t) = \frac{t^{2m+r-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+r+1)}\left[1+\frac{\frac{1}{2}+m-k}{2m+r+1}\frac{t}{1!}+\dots\right]$$
$$= \frac{t^{2m+r}e^{-\frac{1}{2}t}}{\Gamma(2m+r+1)}[1+O(r^{-1})].$$

Aus dieser asymptotischen Darstellung geht hervor, daß die Reihe (3) im wesentlichen die Konvergenzeigenschaften der ihr „zugeordneten Potenzreihe"

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a_r t^r}{\Gamma(2m+r+1)}$$

hat, und insbesondere für

$$(10,2)\qquad |t| \leqq \left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\left|\sqrt[r]{\frac{a_r}{\Gamma(2m+r+1)}}\right|\right\}^{-1}-\varepsilon \qquad (\varepsilon>0)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

Aus (10, 2) ist nun sofort ersichtlich, daß die im Titel dieses Paragraphen genannte Reihe, in der $a_r = \frac{x^r}{r!}$ zu setzen ist, also der in (10, 2) auftretende Grenzwert gleich Null ist, absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn die beiden Veränderlichen x und t auf beliebige, ganz im Endlichen gelegene Gebiete der komplexen Ebene beschränkt werden. Daher erhalten wir nach I (2, 4), wie schon wiederholt, nach einfachen Zwischenrechnungen

$$(10,3)\quad \mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{r!}N_{k+\frac{r}{2},\,m+\frac{r}{2}}(t)\right\} = \frac{(s-\frac{1}{2})^{k-m-\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^{k+m+\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x}{s+\frac{1}{2}}}$$
$$= \mathfrak{L}\{N_{k-\nu,\,m-\nu}(t)\}\,\mathfrak{L}\left\{\left(\frac{t}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}t}J_{2\nu-1}(2\sqrt{xt})\right\},$$

wenn ν eine der Ungleichung

$$(10,4)\qquad 0 < \Re\,\nu < \Re\,m+\tfrac{1}{2}$$

genügende, im übrigen beliebige reelle oder komplexe Zahl bedeutet[32]). Daher ist auf Grund des Faltungssatzes unter der Voraussetzung (10, 4)

$$(10,5)\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{r!}N_{k+\frac{r}{2},\,m+\frac{r}{2}}(t) = x^{\frac{1}{2}-\nu}\int_0^t N_{k-\nu,\,m-\nu}(t-\tau)\,J_{2\nu-1}(2\sqrt{x\tau})\,e^{-\frac{1}{2}\tau}\tau^{\nu-\frac{1}{2}}\,d\tau.$$

[32]) Vgl. auch (6, 4).

Zahlreiche Sonderfälle dieser recht allgemeinen Beziehung dürfen ein selbständiges Interesse beanspruchen. Setzen wir zunächst in (10, 5) $\nu = \frac{1}{4}$, so ergibt sich wegen (9, 2)

$$(10,6)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t N_{k-\frac{1}{4},\, m-\frac{1}{4}}(t-\tau) \cos 2\sqrt{x\tau} \cdot e^{-\frac{1}{2}\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

$$(\Re e\, m > -\tfrac{1}{4}),$$

während sich für $\nu = \frac{3}{4}$ wegen

$$(10,7)\qquad J_{\frac{1}{2}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \sin\omega$$

$$(10,8)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^t N_{k-\frac{3}{4},\, m-\frac{3}{4}}(t-\tau) \sin 2\sqrt{x\tau}\, e^{-\frac{1}{2}\tau} d\tau$$

$$(\Re e\, m > \tfrac{1}{4})$$

ergibt. Ferner erhalten wir für $\nu = k$ aus (10, 5) wegen I (1, 13) und Gleichung (6, 9) dieser Mitteilung

$$(10,9)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \frac{\sqrt{\pi}\, x^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t I_{m-k}\left(\frac{t-\tau}{2}\right) J_{2k-1}(2\sqrt{x\tau})\, e^{-\frac{1}{2}\tau} \tau^{k-\frac{1}{2}} (t-\tau)^{m-k} d\tau$$

$$(0 < \Re e\, k < \Re e\, m + \tfrac{1}{2}).$$

Setzen wir in (10, 3) $k = \nu = m + \frac{1}{2}$, so ergibt sich eine Reihe, die sehr leicht summiert werden kann und auf eine Besselsche Funktion führt, nämlich

$$\mathfrak{L}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!} N_{m+\frac{r}{2}+\frac{1}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)\right\} = \frac{e^{-\frac{x}{s+\frac{1}{2}}}}{(s+\frac{1}{2})^{2m+1}} = \mathfrak{L}\left\{\left(\frac{t}{x}\right)^m e^{-\frac{1}{2}t} J_{2m}(2\sqrt{xt})\right\}$$

und der Übergang zu den Oberfunktionen liefert

$$(10,10)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r!} N_{m+\frac{r}{2}+\frac{1}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \left(\frac{t}{x}\right)^m e^{-\frac{1}{2}t} J_{2m}(2\sqrt{xt})\,^{33}).$$

---

[33]) Auf Grund von I (1, 8) sieht man sofort, daß (10, 10) mit der Potenzreihenentwicklung der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Besselschen Funktion identisch ist.

Auf Grund von (10, 10) ergibt die Annahme $k = m + \frac{1}{2}$ in (10, 5), (10, 6) und (10, 8) wegen I (1, 8) der Reihe nach

$$(10,11)\quad J_{2m}(2\sqrt{xt}) = \frac{x^{m-\nu+\frac{1}{2}}\,t^{-m}}{\Gamma(2m-2\nu+1)}\int_0^t \tau^{\nu-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{2m-2\nu}J_{2\nu-1}(2\sqrt{x\tau})\,d\tau$$
$$(0 < \Re\,\nu < \Re\,m + \tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{x^m\,t^{-m}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m+\frac{1}{2})}\int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{2m-\frac{1}{2}}\cos 2\sqrt{x\tau}\,d\tau \qquad (\Re\,m > -\tfrac{1}{4})$$

$$= \frac{x^{m-\frac{1}{2}}\,t^{-m}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m-\frac{1}{2})}\int_0^t (t-\tau)^{2m-\frac{3}{2}}\sin 2\sqrt{x\tau}\,d\tau \qquad (\Re\,m > \tfrac{1}{4}).$$

Diese Formeln wurden vor kurzer Zeit von Tricomi [34]) angegeben, der auch auf ihren Zusammenhang mit dem sogenannten „ersten Sonineschen Integral“ [35]) hingewiesen hat.

Wir wollen noch die Entwicklungen vermerken, welche aus den in Gleichungen (10, 5), (10, 6) und (10, 8) gegebenen für $k = m + n + \frac{1}{2}$ hervorgehen. Dieser Fall führt bekanntlich nach I (1, 9) auf Laguerresche Polynome. Wir erhalten der Reihe nach aus den angegebenen Gleichungen

$$(10,12)\quad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r\,t^{2m+r}\,L_n^{(2m+r)}(t)}{r!\,\Gamma(2m+r+n+1)}$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma(2m-2\nu+n+1)}\int_0^t \tau^{\nu-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{2m-2\nu}L_n^{(2m-2\nu)}(t-\tau)J_{2\nu-1}(2\sqrt{x\tau})\,d\tau$$
$$(0 < \Re\,\nu < \Re\,m + \tfrac{1}{2}),$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r\,t^{2m+r}\,L_n^{(2m+r)}(t)}{r!\,\Gamma(2m+r+n+1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m+n+\frac{1}{2})}\int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{2m-\frac{1}{2}}L_n^{(2m-\frac{1}{2})}(t-\tau)\cos 2\sqrt{x\tau}\,d\tau$$
$$(\Re\,m > -\tfrac{1}{4}),$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r\,t^{2m+r}\,L_n^{(2m+r)}(t)}{r!\,\Gamma(2m+r+n+1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi x}\,\Gamma(2m+n-\frac{1}{2})}\int_0^t (t-\tau)^{2m-\frac{3}{2}}L_n^{(2m-\frac{3}{2})}(t-\tau)\sin 2\sqrt{x\tau}\,d\tau$$
$$(\Re\,m > \tfrac{1}{4}).$$

Für $n = 0$ gehen Gleichungen (10, 12) in die Gleichungen (10, 11) über.

---

[34]) [9], Gleichungen (11′), (14) und (13). In Gleichung (14) bei Tricomi ist ein kleiner Druckfehler. Anstatt $d\tau$ sollte dort richtig heißen $\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$.

[35]) [11], S. 373, Gleichung (1).

§ 11.

Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)\, x^r$.

Die im Titel angezeigte Reihe wollen wir aus (10, 5) gewinnen. Hierzu ersetzen wir in (10, 5) $-x$ durch u, multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit $u^{2\nu-1} e^{-\frac{u}{x}}\, du$ und integrieren nach u von Null bis ∞, was unter den Voraussetzungen (10, 4) gestattet ist. Auch dürfen wir auf der linken Seite gliedweise integrieren und auf der rechten Seite die Reihenfolge der Integrationen nach τ und u vertauschen. Auf diese Weise erhalten wir nach (6, 3) und (6, 4)

$$(11,1)\qquad \boxed{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+r)}{r!} x^r N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \int_0^t \tau^{2\nu-1} e^{(x-\frac{1}{2})\tau} N_{k-\nu,\, m-\nu}(t-\tau)\, d\tau.}$$

Insbesondere ist für $x = 1$, da nach I (1, 8)

$$\tau^{2\nu-1} e^{\frac{1}{2}\tau} = \Gamma(2\nu)\, N_{-\nu,\, \nu-\frac{1}{2}}(\tau)$$

und nach dem ersten Additionstheorem[36])

$$\int_0^t N_{-\nu,\, \nu-\frac{1}{2}}(\tau)\, N_{k-\nu,\, m-\nu}(t-\tau)\, d\tau = N_{k-2\nu,\, m}(t)$$

ist,

$$(11,2)\qquad \boxed{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)_r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = N_{k-2\nu,\, m}(t).}$$

Diese Formel bildet gewissermaßen ein Gegenstück zu (1, 1), gilt aber zum Unterschied von (1, 1) für alle Werte von m und ν.

Wieder verlohnt es sich, einige Sonderfälle von (11, 1) und (11, 2) anzuschreiben. Für $2\nu = 1$ ergibt sich zunächst aus (11, 1) für $\Re m > 0$

$$(11,3)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} x^r N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \int_0^t e^{(x-\frac{1}{2})(t-\tau)} N_{k-\frac{1}{2};\, m-\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau$$

und insbesondere für $x = \frac{1}{2}$

$$(11,4)\qquad \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = \int_0^t N_{k-\frac{1}{2},\, m-\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau.$$

---

[36]) I (3, 1).

während dieselbe Annahme $2\nu = 1$ in (11, 2)

(11, 5) $$\sum_{r=0}^{\infty} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = N_{k-1,\, m}(t)$$

liefert. Setzen wir in (11, 1) $k = \nu$, so erhalten wir auf Grund von I (1, 13) und Gleichung (6, 9) dieser Mitteilung

(11, 6) $$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+r)}{r!}\, x^r N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m-k+\frac{1}{2})} \int_0^t \tau^{m-k}(t-\tau)^{2k-1} e^{(x-\frac{1}{2})(t-\tau)} I_{m-k}\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau$$

$$(0 < \Re e\, k < \Re e\, m + \tfrac{1}{2}).$$

Setzen wir in der für alle Werte von ν geltenden Gleichung (11, 2) insbesondere $2\nu = -n$, so erhalten wir die *endliche* Reihe

(11, 7) $$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_r}{r!} N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = N_{k+n,\, m}(t)}$$

und insbesondere für $n = 1$ die Rekursionsformel

(11, 8) $$N_{k,\, m}(t) - N_{k+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}}(t) = N_{k+1,\, m}.$$

Wir wollen noch einen letzten Fall besprechen, den wir so erhalten, daß wir unter der Voraussetzung

(11, 9) $$|\Re e\, k| < \Re e\, m + \tfrac{1}{2}$$

in (11, 1) $2\nu = k + m + \frac{1}{2}$ setzen. Dieser Fall wird uns auch Gelegenheit bieten, das zweite Additionstheorem der N-Funktionen zur Anwendung zu bringen. Es ist zunächst nach I (1, 8)

$$(t-\tau)^{2\nu-1} e^{(x-\frac{1}{2})(t-\tau)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}xt} \cdot e^{\frac{1}{2}(-x)\tau} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}\, \Gamma(2\nu)(-x)^{1-2\nu} N_{\nu,\, \nu-\frac{1}{2}}[-x(t-\tau)],$$

und darauf liefert die Anwendung von I (4, 1), wenn der Reihe nach l, x, y durch $\frac{1}{2}k$, $-x$, 1 ersetzt werden, mit $2\nu = k + m + \frac{1}{2}$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m+r+\frac{1}{2})}{r!}\, x^r N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t)$$

$$= \Gamma(k+m+\tfrac{1}{2})(-x)^{\frac{1}{2}-k-m} e^{\frac{1}{2}xt}\Big[e^{-\frac{1}{2}t} N_{\frac{k}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{4},\, \frac{k}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}(-xt)$$

$$* e^{\frac{1}{2}(-x)t} N_{\frac{k}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{4},\, \frac{m}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(t)\Big]$$

$$= \Gamma(k+m+\tfrac{1}{2})(1-x)^{-2m} e^{\frac{1}{2}xt} N_{k,\, m}[(1-x)t],$$

woraus

$$(11,10)\quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+m+\frac{1}{2})_r}{r!} x^r N_{k+\frac{r}{2},\, m+\frac{r}{2}}(t) = (1-x)^{-2m} e^{\frac{1}{2}xt} N_{k,\,m}[(1-x)$$

folgt. Dies ist lediglich eine andere Schreibart des zweiten Multiplikationstheorems der N-Funktionen [37]).

Literaturverzeichnis.

H. Bateman.

[1] The k-Function, a particular case of the Confluent Hypergeometric Functio Trans. Am. Math. Soc. **33** (1931), S. 817—831.

G. Doetsch.

[2] Le formule di Tricomi sui polinomi di Laguerre. Rendiconti dei Lincei 2 (1935), S. 300—304.

A. Erdélyi.

[3] Über eine Integraldarstellung der $M_{k,\,m}$-Funktionen und ihre asymptotisch Darstellung für große Werte von $\Re e\, k$. Math. Annalen **113** (1936), S. 357—36

[4] Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Ers Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme. Math. Zeitschr. **42** (1936 S. 125—143.

[5] Entwicklung einer analytischen Funktion nach Whittakerschen Funktione Proc. Ak. Amsterdam **39** (1936), S. 1092—1098.

Ch. H. Rowe.

[6] A proof of the asymptotic series for $\log \Gamma(z)$ and $\log \Gamma(z+a)$. Ann. Math. II, **32** (1931), S. 10—16.

N. A. Shastri.

[7] On simultaneous operational calculus. J. Indian Math. Soc. New Ser. (1934), S. 235—240.

[8] On some properties of the k-Function. Phil. Mag. (7) **20** (1935), S. 468—47

F. Tricomi.

[9] Un theorema abeliano per la trasformazione di Hankel e alcune nuov applicazioni di une formula sulle funzioni di Bessel. Rendiconti dei Linc **22** (1935), S. 572—576.

R. S. Varma.

[10] Operational Representation of the parabolic Cylinder Function. Phil. Ma (7) **22** (1936), S. 29—34.

G. N. Watson.

[11] A Treatise on the Theorie of Bessel Functions. Cambridge 1922.

R. Weyrich.

[12] Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Berlin 1937.

E. T. Whittaker and G. N. Watson.

[13] A course of modern analysis. 4th Edition, Cambridge 1927.

---

[37]) I (6, 1).

(Eingegangen am 28. November 1936.)

Über die Blochsche Konstante.

Von

L. V. Ahlfors, Cambridge, Mass. und H. Grunsky, Berlin.

1. Die Blochsche Konstante $\mathfrak{B}$ ist so definiert: Zu jedem Wert $R < \mathfrak{B}$ gibt es in jeder Riemannschen Fläche, die aus $|z| < 1$ vermöge einer Abbildung $w = f(z)$ mit $|f'(0)| = 1$ entsteht, eine schlichte Kreisscheibe mit Radius R; zu jedem $R > \mathfrak{B}$ gibt es dagegen eine Riemannsche Fläche besagter Art, in der keine solche Kreisscheibe Platz hat. Man gewinnt also für $\mathfrak{B}$ eine obere Abschätzung, $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}'$, indem man irgendeine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ mit $|f'(0)| = 1$ nimmt und die obere Grenze $\mathfrak{B}'$ der Radien der in der zugehörigen Fläche schlicht unterzubringenden Kreise ermittelt. Wir wählen für $f(z)$ eine Funktion, die den Einheitskreis auf eine Riemannsche Fläche abbildet, welche in jedem Eckpunkt eines Netzes regulärer Dreiecke einen zweiblättrigen Windungspunkt hat, und zwar in jedem Blatt der Fläche; $z = 0$ soll dabei in den Mittelpunkt eines der Dreiecke übergehen. Offenbar gelangt man zu einer solchen Funktion, wenn man ein gleichseitiges Kreisbogendreieck Δ_1 der z-Ebene mit den Winkeln $\frac{\pi}{6}$ auf ein reguläres Dreieck Δ_2 der w-Ebene konform abbildet, derart, daß die Ecken und Mittelpunkte sich entsprechen. Durch Anwendung des Spiegelungsprinzips läßt sich die Abbildungsfunktion im Innern des Orthogonalkreises von Δ_1 unbeschränkt fortsetzen und liefert offenbar eine Riemannsche Fläche von der beschriebenen Art.

Wir treffen die Normierung so, daß der Orthogonalkreis den Radius 1 erhält, wobei der Umkreisradius von Δ_1 gleich Θ sei. Elementargeometrisch bestimmt man leicht

$$\Theta = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}. \tag{1}$$

Ferner sei die Abbildung von Δ_1 auf Δ_2 so bestimmt, daß die Ableitung im Mittelpunkt gleich 1 wird. Das Verhältnis der Umkreisradien von Δ_2 und Δ_1 sei bei dieser Festsetzung $= \lambda$. Dann ergibt sich für $\mathfrak{B}'$ der Wert

$$\mathfrak{B}' = \Theta\lambda. \tag{2}$$

2. Lemma. — *Die Funktion*

$$w = C\,\zeta \frac{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}(1-t)^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}}(1-\zeta^3 t)^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{2k}}dt}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}(1-t)^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{2k}}(1-\zeta^3 t)^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}}dt}$$

vermittelt die konforme Abbildung des Kreises $|\zeta| < 1$ *auf ein gleichseitiges Kreisbogendreieck mit den Winkeln* π/k $(k > 1)$. *Die Punkte* 1, ε, ε^2 $\left(\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ *entsprechen den Eckpunkten.*

Man findet die Abbildungsfunktion am einfachsten, wenn man von der Schwarzschen Beziehung

$$\{w, \zeta\} = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\frac{\zeta}{(\zeta^3-1)^2}$$

ausgeht und die assoziierte lineare Differentialgleichung

$$\frac{y''}{y} = -\frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\frac{\zeta}{(\zeta^3-1)^2}$$

zuerst durch die Substitution $y = (\zeta^3-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}v$, $\zeta^3 = \xi$, dann durch $y = \zeta(\zeta^3-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}u$, $\zeta^3 = \xi$ auf eine hypergeometrische reduziert.

Bestimmt man C so, daß $w'(0) = 1$ wird, so ergibt sich

$$w(1) = \frac{\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, \frac{1}{6}+\frac{1}{2k}\right)}{\mathsf{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, \frac{5}{6}+\frac{1}{2k}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Die uns interessierenden Fälle sind $k = 3$ und $k = 6$. Man findet durch Einsetzung

$$\lambda = \frac{w_2(1)}{w_1(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) erhält man jetzt endlich

$$\mathfrak{B}' = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\pi}\cdot 2^{1/4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)}\right)^{1/2} = 0{,}4719\ldots$$

und es ist somit bewiesen, daß

$$\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{B}' < 0{,}472.$$

Früher bekannt war die Landausche Abschätzung[1])

$$0{,}396 < \mathfrak{B} < 0{,}555.$$

[1]) Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten. Mathem. Zeitschr. 30 (1929), 608—634. insbesondere S. 614.

3. Es gibt gute Gründe, zu vermuten, daß $\mathfrak{B}'$ der wahre Wert der Blochschen Konstanten ist. Denn die Aufgabe, die (oder eine) Extremalfunktion aufzusuchen, ist offenbar gleichwertig damit, unter allen Riemannschen Flächen, die so beschaffen sind, daß in ihnen keine Kreisscheibe schlicht Platz hat, deren Radius eine vorgeschriebene Schranke übertrifft, eine solche auszusuchen, die bei Auswahl eines geeigneten einfachen inneren Punktes w_0 und Abbildung der Fläche auf einen Kreis um $z = 0$ durch $z = \varphi(w)$ mit $\varphi(w_0) = 0$, $\varphi'(w_0) = 1$ einen möglichst großen Bildradius ergibt. Da der Bildradius mit wachsender „Stärke der Verzweigtheit" der Fläche abnimmt, so wird also die gesuchte Fläche unter allen zur Konkurrenz zugelassenen „möglichst schwach verzweigt" sein müssen (darin, daß dieser Aussage allgemein ein genauer Sinn noch nicht beigelegt werden kann, ist gerade die Schwierigkeit des Problems beschlossen). Man wird also die Einschränkung für die in der Fläche schlicht unterzubringenden Kreisscheiben dadurch verwirklichen, daß man den Rand einer jeden mit möglichst wenigen Verzweigungspunkten von möglichst niedriger Ordnung besetzt. Dieser Bedingung gemäß ist die von uns zu unserer Abschätzung herangezogene Fläche gewählt. Unter allen anderen dieser Bedingung genügenden ist sie diejenige von höchster Symmetrie. Einen Weg zu einem strengen Beweis unserer Vermutung können wir noch nicht sehen. Wir veröffentlichen sie in der Hoffnung, daß sie einen Fingerzeig zur Lösung des Problems enthalte.

(Eingegangen am 9. Dezember 1936.)

Über die Zielwerte einer ganzen Funktion.

Von

Helmut Grunsky in Berlin.

Der von Denjoy vermutungsweise ausgesprochene Satz, daß eine ganze Funktion der endlichen Ordnung ϱ höchstens 2ϱ verschiedene endliche Zielwerte besitze, ist zuerst von Ahlfors bewiesen worden, und zwar mit zwei Verschärfungen [1]). In neuester Zeit hat Macintyre einen Beweis gegeben [2]), der auf demselben Prinzip fußt, wie der Ahlforssche, jedoch durch eine etwas andere Anordnung einige lästige Nebenbetrachtungen vermeidet und daher beträchtlich kürzer ausfällt; er führt zudem zu einer weiteren Verschärfung. Die Absicht der nachstehenden Ausführungen ist, einen neuen Beweis des Satzes mit denselben Verschärfungen zu geben. Er folgt in der Anordnung dem von Macintyre, jedoch wird der entscheidende Hilfssatz, durch den die eigentliche Schwierigkeit des Beweises überwunden wird, auf ein ganz anderes Prinzip gegründet. Es ist dasselbe, wie das in der Dissertation des Verfassers zur Gewinnung von Verzerrungssätzen angewendete [3]) (die Schwierigkeit beim Beweise des Denjoy-Ahlforsschen Satzes ist ja gleichfalls ein Verzerrungsproblem) [4]). Genau formuliert lautet der zu beweisende

---

[1]) L. V. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sci. Fennicae, A, (2) 1 (1930), Nr. 9.

[2]) A. J. Macintyre, On the asymptotic paths of integral functions of finite order, Journ. London math. Soc. **10** (1935), S. 34—39.

[3]) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schriften math. Semin. Inst. angew. Math. Univ. Berlin **1** (1932), Nr. 3.

[4]) Zum Beweise der ersten Behauptung von Satz 1, also insbesondere der Denjoyschen Vermutung, ohne die von Ahlfors und Macintyre angegebenen Verschärfungen bei gewundenen Zielwegen, reicht ein von H. Grötzsch (Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Berichte Verhandl. Akad. Wiss. Leipzig. math.-phys. Klasse 84 (1932), S. 45, Satz 5) und später von Verf. (loc. cit. S. 121, Satz 1) bewiesener Verzerrungssatz für mehrfach zusammenhängende Bereiche aus. Schneidet man nämlich aus der z-Ebene, in der die betreffende ganze Funktion definiert ist, einen Kreis $|z| = r$ aus und schlitzt ihn längs der Zielwege von ihrem Anfang bis zu ihrem ersten Schnittpunkt mit seiner Peripherie auf (die Wege sollen sich nicht schneiden und nicht durch $z = 0$ gehen), so genügt es, zu wissen, daß der so aufgeschlitzte Kreis in einen solchen mit größerem Radius übergeht, wenn man ihn durch $z' = \psi(z)$ mit $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ auf einen radial aufgeschlitzten Kreis abbildet, derart, daß die Schlitze in die

Satz 1: *Ist* $f(z)$ $(z = re^{i\varphi})$ *eine ganze Funktion mit* k *verschiedenen Zielwerten, so gilt mit* $M(r) = \operatorname{Max} |f(re^{i\varphi})|$:

$$\underline{\lim} \frac{\log M(r)}{r^{\frac{k}{2}}} > 0;$$

gilt auf den Zielwegen mit $z \to \infty$:

(1) $$\overline{\lim} \frac{|\varphi|}{\log r} = \lambda > 0,$$

so folgt

$$\overline{\lim} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \geqq \frac{k}{2}(1 + \lambda^2);$$

gilt dagegen auf den Zielwegen:

(2) $$\underline{\lim} \frac{|\varphi|}{\log r} = \lambda > 0,$$

so folgt:

$$\underline{\lim} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \geqq \frac{k}{2}(1 + \lambda^2).$$

Bemerkung: Liegt ein System von Zielwegen vor, die alle zu verschiedenen Zielwerten gehören, so gilt (1), und ebenso (2), auf jedem Weg mit demselben λ; denn andernfalls würden sich zwei Wege unendlich oft schneiden.

Ich beweise den Satz vollständig, auch soweit ich dabei bekannte Wege gehe.

Hilfssatz 1: $\mathfrak{B}$ bezeichne eine ganz im Endlichen der ζ-Ebene liegende Punktmenge, die gebildet sei aus endlich vielen schlichten, endlich vielfach zusammenhängenden Gebieten. Der Rand R von $\mathfrak{B}$ bestehe aus rektifizierbaren Kurven. $\omega = \varphi(\zeta)$ sei eine im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig erklärte Funktion[5]), $\mathfrak{B}'$ das eventuell auf einer Riemannschen Fläche liegende Bild von $\mathfrak{B}$; I sei der Flächeninhalt von $\mathfrak{B}$, I' derjenige von $\mathfrak{B}'$. Dann gilt:

$$I \cdot I' \geqq |K|^2 \quad \text{mit} \quad K = \frac{1}{2i} \int_R \overline{\omega}\, d\zeta;$$

das Integral ist dabei im positiven Sinne über R zu erstrecken. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $\varphi(\zeta) = a\zeta + b$ (a, b Konstanten).

Zum Beweise bilden wir die Funktion

$$\Phi(\zeta) = p\varphi(\zeta) + q\zeta,$$

Schlitze übergehen. Durch Spiegelung der beiden Bereiche an den Kreisen erhält man zwei mehrfach zusammenhängende Bereiche, und das Gewünschte folgt aus dem genannten Satz.

[5]) Zwei Elemente von $\varphi(\zeta)$, die zu zwei nicht zusammenhängenden Teilen von $\mathfrak{B}$ gehören, brauchen nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorzugehen.

wo p und q beliebige komplexe Konstanten sind. Φ bildet $\mathfrak{B}$ auf eine Punktmenge mit nicht negativem Inhalt ab, d. h. es ist, wenn wir

$$\Phi(\zeta) = U + iV \qquad (U, V \text{ reell})$$

setzen

$$\int_R U\,dV \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $\Phi(\zeta) = \text{const}$. Es ist aber

$$\int_R U\,dV = \frac{1}{2i}\int_R \overline{\Phi(\zeta)}\,d\Phi(\zeta) = \frac{1}{2i}\int_R (\bar{p}\,\bar{\omega} + \bar{q}\,\bar{\zeta})\,d(p\omega + q\zeta)$$

$$= |p|^2 \cdot \frac{1}{2i}\int \bar{\omega}\,d\omega + \bar{p}q \cdot \frac{1}{2i}\int \bar{\omega}\,d\zeta + p\bar{q} \cdot \frac{1}{2i}\int \bar{\zeta}\,d\omega + |q|^2 \cdot \frac{1}{2i}\int \bar{\zeta}\,d\zeta.$$

Das erste und das letzte Integral stellen I' und I dar, das zweite ist K und das dritte ergibt

$$\frac{1}{2i}\int_R \bar{\zeta}\,d\omega = -\frac{1}{2i}\int_R \omega\,d\bar{\zeta} = \bar{K},$$

und wir erhalten:

$$I'|p|^2 + K\bar{p}q + \bar{K}p\bar{q} + I|q|^2 \geqq 0$$

für jedes komplexe Paar p, q. Es liegt also eine positiv definite Hermitesche Form in den Veränderlichen p und q vor, und sie ist halbdefinit dann und nur dann, wenn der erwähnte Ausnahmefall vorliegt. Die Behauptung ist nun einfach das bekannte Kriterium für Definitheit bzw. Halbdefinitheit einer Hermiteschen Form.

Hilfssatz 2: In der ω-Ebene ($\omega = \sigma + i\tau$) liege ein Rechteck, dessen Seiten auf den Geraden $\sigma = 0$, $\sigma = l$, $\tau = 0$, $\tau = \frac{\pi}{\vartheta}$ liegen mögen. Dabei strebe l gegen ∞, ϑ sei fest. ω sei ein innerer Punkt; dann ist das harmonische Maß μ der auf $\sigma = l$ liegenden Seite im Punkte ω $\mu = O(e^{-\vartheta l})$, gleichmäßig bei beschränktem σ.

Unter dem harmonischen Maß eines Randbogens in einem inneren Punkte eines Bereiches verstehen wir dabei, wie üblich, den Wert derjenigen harmonischen Funktion in diesem Punkte, die in dem Bereich überall regulär ist, auf dem betreffenden Randbogen die Randwerte 1 auf dem übrigen Rande die Randwerte 0 hat.

Zum Beweise von Hifssatz 2 betrachten wir zunächst einen Halbkreis in der w-Ebene ($w = u + iv$). Sein Mittelpunkt sei der Nullpunkt, und er liege ganz in der rechten Halbebene; sein Radius sei t. Wir fragen nach dem Verhalten des harmonischen Maßes μ des Halbkreisbogens in bezug auf einen inneren Punkt w, wenn t gegen unendlich geht. Ist

der zwischen 0 und π liegende Winkel, unter dem der zum Rande gehörige Durchmesser in dem Punkte w erscheint, so ist

$$\mu = 2 - \frac{2\alpha}{\pi};$$

bei $t \to \infty$, festem u und beschränktem v wächst α wie

$$\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{t};$$

also ist

$$\mu \cong \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{t} \cong \frac{4}{\pi} \frac{u}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

gleichmäßig bei beschränktem $|w|$. Durch die konforme Abbildung $v = \frac{1}{\vartheta} \cdot \log w$ folgt die Behauptung, wenn zunächst anstelle des Rechtecks ein nach links unbegrenzter Streifen gleicher Breite tritt; die Behauptung in der in dem Hilfssatz ausgesprochenen Form ergibt sich, wenn man beachtet, daß das harmonische Maß der betreffenden Seite verkleinert wird, wenn man die linken Enden $\sigma < 0$ von $\tau = 0$ und $\tau = \frac{\pi}{\vartheta}$ durch die Strecke $\sigma = 0$, $0 < \tau < \frac{\pi}{\vartheta}$ ersetzt.

Es sei nun $f(z)$ eine ganze Funktion mit k verschiedenen Zielwerten. Das bedeutet: Es gibt k sich nicht schneidende Wege $L_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$), deren Anfang im Nullpunkt liegend vorausgesetzt werden darf und die ins Unendliche ziehen, derart, daß $\lim_{z \to \infty} f(z) = a_\varkappa$ auf jedem $L_\varkappa$ existiert. Dabei sind die $a_\varkappa$ entweder numerisch voneinander verschieden, oder $f(z)$ strebt, wenn zwei von ihnen übereinstimmen, in keinem der beiden zwischen den zugehörigen Wegen liegenden Gebieten mit $z \to \infty$ gleichmäßig gegen diesen gemeinsamen Wert; nach einem bekannten Satze[6]) ist sonach für die Verschiedenheit der asymptotischen Werte $a_\varkappa$ notwendig und hinreichend, daß $f(z)$ in keinem der Gebiete, in die die Ebene durch die Wege $L_\varkappa$ zerlegt wird, beschränkt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen die $L_\varkappa$ als stückweise analytisch vorausgesetzt werden.

Wir schneiden nun aus der z-Ebene einen Kreisring

$$1 \leqq |z| \leqq r$$

aus. Durchläuft man jedes $L_\varkappa$ von 0 nach ∞, so wird der Ring durch diejenigen Teilbogen $C_\varkappa$, die zwischen dem letzten Schnittpunkt mit $|z| = 1$ und dem ersten Schnittpunkt mit $|z| = r$ liegen, in k Teile zerlegt. Wir schlitzen den Ring längs C_1 auf und bilden ihn durch einen

[6]) Vgl. z. B. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 2. Aufl., S. 21 und 129. Leipzig 1931.

Zweig von $\zeta = \log z$ ab. Wir erhalten so in der ζ-Ebene ($\zeta = \xi + i\eta$) einen Bereich, der begrenzt wird von zwei parallelen Strecken der Länge 2π auf $\xi = 0$ und auf $\xi = \log r$ und von zwei diese beiden verbindenden Kurven Γ_1 und Γ_{k+1}, den beiden Bildern von C_1. Wir dürfen annehmen, daß der Anfangspunkt von Γ_1 in $\zeta = 0$, der von Γ_{k+1} in $\zeta = 2\pi i$ liege. Der Endpunkt von Γ_1 sei $\log r + i\gamma$. Durch die Bilder $\Gamma_\varkappa$ der $C_\varkappa$ ($\varkappa = 2, \ldots, k$) wird unser Bereich in k Teilbereiche $\mathfrak{B}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) zerlegt. Wir bilden jeden $\mathfrak{B}_\varkappa$ auf ein Rechteck $\mathfrak{B}'_\varkappa$ der ω-Ebene ab, derart, daß die auf $\xi = 0$ und $\xi = \log r$ liegenden Seiten in zwei gegenüberliegende Rechtecksseiten übergehen, die auf den Geraden $\sigma = 0$ und $\sigma = \log r'$ liegen, während $\Gamma_\varkappa$ und $\Gamma_{\varkappa+1}$ in das andere Seitenpaar übergehen sollen. $\log r'$ sei dabei so gewählt, daß die Summe der Längen der auf $\sigma = 0$ liegenden Rechtecksseiten wieder gleich 2π ist. Wenn wir endlich noch voraussetzen, daß das Bild von Γ_1 auf $\tau = 0$ liege, und daß die beiden Bilder eines jeden $\Gamma_\varkappa$ ($\varkappa = 2, \ldots, k$), die ihm als Randstück von $\mathfrak{B}_{\varkappa-1}$ und von $\mathfrak{B}_\varkappa$ entsprechen, sich decken, so sind die Abbildungen eindeutig festgelegt. Sie werden vermittelt durch eine Funktion $\omega = \varphi(\zeta)$ ($\omega = \sigma + i\tau$), die erklärt ist in $\mathfrak{B}$, der Vereinigungsmenge der $\mathfrak{B}_\varkappa$. Auf sie wenden wir den Hilfssatz 1 an. Indem wir von K noch das nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwindende Integral

$$\frac{1}{2i}\int_R \omega\, d\zeta$$

subtrahieren, erhalten wir:

$$K = -\int_R \tau\, d\zeta = \int_{\Gamma_{k+1}} \tau\, d\zeta - \int_{\Gamma_1} \tau\, d\zeta - i\int_{\eta=0}^{2\pi} (\tau(\log r + i\gamma + i\eta) - \tau(i\eta))\, d\eta.$$

Denn die Integrale über die $\Gamma_\varkappa$ ($\varkappa = 2, \ldots, k$) heben sich, da jede dieser Kurven in beiderlei Sinn zu durchlaufen ist und τ dabei beidemal denselben konstanten Wert hat, heraus. Die Integrale über Γ_1 und Γ_{k+1} sind dabei natürlich so zu verstehen, daß diese Kurven von $\xi = 0$ nach $\xi = \log r$ durchlaufen werden. Sie ergeben zusammen

$$2\pi(\log r + i\gamma).$$

Der Betrag des letzten Integrals ist nach grober Abschätzung $\leqq 4\pi^2$; also ist

$$K = 2\pi \log r + 2\pi i(\gamma + \delta) \quad \text{mit} \quad |\delta| \leqq 2\pi.$$

Allgemein ist also

$$|K|^2 \geqq 4\pi^2 (\log r)^2.$$

Unter Voraussetzung (1) gibt es zu jedem λ' mit $0 < \lambda' < \lambda$ eine Folge von Werten r, mit $r \to \infty$, für die $|\gamma| \geqq \lambda' \log r$; unter Voraussetzung (2) gilt dies für alle hinreichend großen r. Für solche r ist also

$$|K|^2 \geqq 4\pi^2 (1 + \lambda'^2)(\log r)^2 - O(\log r).$$

Ferner ist

$$I = 2\pi \log r, \quad I' = 2\pi \log r',$$

und Hilfssatz 1 ergibt

$$\log r' \geqq (1 + \lambda'^2) \log r - O(1), \tag{3}$$

gültig für alle hinreichend großen r mit $\lambda' = 0$, sowie unter der Voraussetzung (2) bei $0 < \lambda' < \lambda$, gültig für eine Folge von Werten r mit $r \to \infty$ unter der Voraussetzung (1) unter derselben Annahme von λ'.

Es seien nun $z_\varkappa$ mit $|z_\varkappa| > 1$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ k Punkte in der z-Ebene, von denen je einer zwischen zwei Wegen $L_\varkappa$ liege, und in denen gelte

$$|f(z_\varkappa)| > A,$$

wo A eine hinreichend große positive Konstante ist. Nach S. 677 gibt es solche $z_\varkappa$. Ihre Bilder in der ω-Ebene seien $\omega_\varkappa = \sigma_\varkappa + i\tau_\varkappa$; sie hängen noch von r $(> |z_\varkappa|)$ ab, doch liegen die $\sigma_\varkappa$ jedenfalls unter einer von r unabhängigen Schranke. $F(\omega)$ bezeichne die aus $f(z)$ durch die Substitutionen $\zeta = \log z$, $\omega = \varphi(\zeta)$ entstandene Funktion. Die Höhe von $\mathfrak{B}_\varkappa$ sei $\frac{\pi}{\vartheta_\varkappa}$; dann gilt nach dem Zweikonstantensatz und nach Hilfssatz 2

$$\log A \leqq \log |F(\omega_\varkappa)| \leqq \log B + O(r'^{-\vartheta_\varkappa}) \log M(r),$$

wo $B > 1$ eine obere Schranke für $|f(z)|$ auf allen $L_\varkappa$ ist. Ist $A > B$, so folgt:

$$\log M(r) \geqq C r'^{\vartheta_\varkappa},$$

wo C eine positive Konstante ist. Nun ist mindestens ein $\vartheta_\varkappa \geqq \frac{k}{2}$. Zusammen mit (3) unter Beachtung der Gültigkeitsbedingungen dieser Ungleichung folgen nun sofort die Behauptungen.

(Eingegangen am 9. Dezember 1936.)

Die gordische Auflösung von Knoten*).

Von

H. Wendt in Dresden.

Ein Knoten ist ein topologisches Bild der Kreislinie im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{R}^3$. Den $\mathfrak{R}^3$ denken wir uns im folgenden immer durch einen „unendlich fernen" Punkt zur dreidimensionalen Sphäre $\mathfrak{S}^3$ geschlossen. Um zu vermeiden, daß der Knoten unendlichviele Verschlingungen aufweist, verlangen wir überdies, daß er durch eine topologische Selbstabbildung der $\mathfrak{S}^3$ in ein aus endlich vielen geradlinigen Strecken bestehendes Polygon übergeführt werden kann.

Zwei Knoten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ sind *gleich*, wenn es eine topologische Selbstabbildung der 3-Sphäre gibt, die $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{k}'$ überführt. So sind z. B. die beiden Kleeblattschlingen (die rechte und die linke) in diesem Sinne als gleich anzusehen.

In jeden Knoten kann man eine singularitätenfreie orientierbare Fläche einspannen[1]). Diese ist einer einfach gelochten Kugel mit h Henkeln homöomorph. Der Lochrand wird von dem Knoten gebildet. Als *Geschlecht des Knotens* bezeichnet man die kleinste Henkelzahl aller Flächen $\mathfrak{f}$, die sich in diesen einspannen lassen. Dann und nur dann ist $\mathfrak{k}$ in die Kreislinie ohne Selbstüberschneidungen deformierbar, wenn sein Geschlecht Null beträgt.

Knoteninvarianten, die ganze Zahlen sind, lassen sich in großer Zahl angeben. Für die Unterscheidung von Knoten haben sie freilich nur dann Wert, wenn man sie berechnen kann. Außer dem Geschlecht erwähnen wir die Minimalzahl der Doppelpunkte einer Projektion des Knotens in eine Ebene und die *Pannwitzsche Invariante*[2]). Um die Pannwitzsche

*) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Halle als Dissertation angenommen. Sie entstand im Gedankenaustausch mit Herrn W. Hantzsche in Dresden. Die Problemstellung verdanke ich den Herren W. Threlfall und H. Seifert in Dresden, die mich auch bei der Abfassung der Arbeit unterstützten.

[1]) H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Annalen **110** (1934), S. 571 oder auch H. Seifert: La Théorie des nœuds, L'enseignement math. **35** (1936), S. 201—212. Zur Einspannung werden nur solche Flächen zugelassen, die nach einer geeigneten topologischen Selbstabbildung der $\mathfrak{S}^3$ aus endlich vielen ebenflächigen Dreiecken bestehen.

[2]) E. Pannwitz: Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten, Math. Annalen **108** (1933), S. 629.

Invariante zu erklären, spannen wir in den Knoten ein Elementarflächenstück ein. Dieses wird sich im allgemeinen selbst durchdringen, insbesondere kann der Knoten das Elementarflächenstück mehrmals durchsetzen. Die Zahl der Durchsetzungen hängt von der Art der Einspannung des Elementarflächenstückes ab. Die Minimalzahl von Durchsetzungen, die dabei vorkommt, ist die Pannwitzsche Knoteninvariante. Es gibt bisher kein Verfahren, diese Invariante in einem einzelnen Falle für einen Knoten zu ermitteln. Es steht nicht einmal fest, ob ein Knoten, dem die Pannwitzsche Invariante Null zukommt, die Kreislinie ist. Daß dies der Fall ist, behauptet das bisher unbewiesene *Dehnsche Lemma.*

Durch eine isotope Deformation der $\mathfrak{S}^3$ gelingt es im allgemeinen nicht, den Knoten in die (unverschlungene) Kreislinie überzuführen. Dagegen ist es möglich, wenn man Selbstüberschneidungen des Knotens zuläßt. Eine Selbstüberschneidung besteht in der Ersetzung einer Überkreuzung durch eine Unterkreuzung in irgend einer ebenen Knotenprojektion (vgl. S. 682). Die natürlichste Invariante eines Knotens scheint uns nun die Minimalzahl der Überschneidungen zu sein, die notwendig sind, damit dieser der Kreislinie gleich wird. Wir bezeichnen sie als die *Überschneidungszahl s des Knotens.* Sie ist offenbar eine Invariante gegenüber topologischen Abbildungen der $\mathfrak{S}^3$. Im Falle der Kleeblattschlinge beträgt die Überschneidungszahl 1. Die Fig. 1 zeigt die Kleeblattschlinge vor und nach der Überschneidung. Die Überschneidungszahl Null hat nach der Definition nur die Kreislinie.

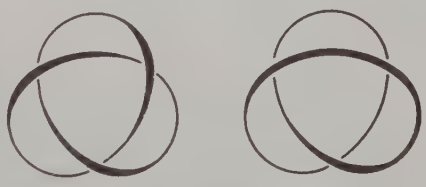


Fig. 1. Kleeblattschlinge vor und nach der Überschneidung.

Wir wollen uns im folgenden mit der Überschneidungszahl befassen.

Dazu betrachten wir die Knotenüberlagerungen und zwar zunächst die *g-blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten* $\mathfrak{M}_g^3$ der Sphäre $\mathfrak{S}^3$, die den Knoten $\mathfrak{k}$ zur *einzigen Verzweigungslinie* haben (*verzweigte zyklische Überlagerungsmannigfaltigkeiten*[3]). Diese dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_g^3$ sind durch folgende beiden Eigenschaften eindeutig festgelegt:

1. Einem Punkte der Sphäre entsprechen g Punkte von $\mathfrak{M}_g^3$ mit Ausnahme der Punkte des Knotens $\mathfrak{k}$, denen nur je ein Punkt in $\mathfrak{M}_g^3$ zugeordnet ist, nämlich ein Punkt der Verzweigungslinie.

[3]) Vgl. H. Seifert: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta math. 60 (1933), Anhang.

2. Beschreibt man in $\mathfrak{S}^3$ einen zu $\mathfrak{k}$ punktfremden geschlossenen Weg C^1, so sind die überlagernden Wege in $\mathfrak{M}_g^3$ dann und nur dann geschlossen, wenn C^1 mit dem Knoten eine durch g teilbare Verschlingungszahl besitzt.

Man kann zur Konstruktion von $\mathfrak{M}_g^3$ den folgenden Weg einschlagen. Man spannt zunächst in der Sphäre $\mathfrak{S}^3$ eine orientierbare Fläche $\mathfrak{f}$ in den Knoten ein und schneidet $\mathfrak{S}^3$ längs dieser Fläche auf. Dadurch erhält man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die von zwei zu $\mathfrak{f}$ homöomorphen Flächen $\mathfrak{f}_1'$ und $\mathfrak{f}_1''$ berandet wird; diese grenzen längs des Knotens $\mathfrak{k}$ aneinander. Aus g Exemplaren solcher berandeter Mannigfaltigkeiten mit den Randflächen $\mathfrak{f}_i'$ und $\mathfrak{f}_i''$ $(i = 1, \ldots, g)$ gewinnt man nun die g-fache Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_g^3$, indem man $\mathfrak{f}_i''$ mit $\mathfrak{f}_{i+1}'$ identifiziert. Dabei ist $\mathfrak{f}_{g+1}'$ gleich $\mathfrak{f}_1'$ zu setzen.

Bohrt man aus der so gefundenen *verzweigten* Mannigfaltigkeit den Knoten $\mathfrak{k}$ aus[4]), so gelangt man zur *ausgebohrten g-blättrigen zyklischen Überlagerung* $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ *des Knotens*[5]). $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ ist eine von einer Ringfläche berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Homologiegruppen der Dimension 1 von $\mathfrak{M}_g^3$ und $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ unterscheiden sich nur durch eine freie Erzeugende (Beweis im Anhang I). Im Überlagerungsraum ist dies eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, die den Knoten gerade einmal (im Grundraum g mal) umschlingt. Sie ist in $\mathfrak{M}_g^3$ nullhomolog, in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ jedoch ein freies Element.

Wir fragen nun:

Durch welche Eigenschaften sind Knoten, die die Überschneidungszahl n besitzen, charakterisiert? Dazu betrachten wir die ausgebohrten g-blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten der Sphäre $\mathfrak{S}^3$ vor und nach einer Überschneidung und bestimmen die Gestalt ihrer Homologiegruppen.

Es werde zunächst der Fall untersucht, daß der Knoten $\mathfrak{k}$ die Überschneidungszahl 1 besitzt. Es gibt dann zwei Punkte P und P' auf $\mathfrak{k}$, bei denen man die Überschneidung vornehmen kann, so daß $\mathfrak{k}$ in die Kreislinie übergeht. Ohne die Überschneidung auszuführen, rücken wir P und P' so nahe aneinander, daß man die Punkte in eine kleine Kugel $\mathfrak{K}$ einschließen kann. Diese soll außer den beiden durch P und P' gehenden „verschlungenen" Teilstrecken l und l' des Knotens keine weiteren Teilstrecken von $\mathfrak{k}$ enthalten. Eine Darstellung der Kugel $\mathfrak{K}$ mit den Teilstrecken zeigt die Fig. 2. Nun führen wir die Überschneidung aus, die die Verschlingung von l und l' löst. Wir denken sie uns so durchgeführt, daß dadurch die Kugeloberfläche $\mathfrak{O}$ und der Raum $\mathfrak{A}$ der

[4]) Die genaue Definition des Begriffes Ausbohren findet man bei Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie, S. 225, Teubner 1934.

[5]) Darüber vgl. § 77 des unter [4]) zitierten Topologiebuches.

3-Sphäre außerhalb der Kugel $\mathfrak{K}$ völlig unberührt bleiben. Weiter können wir l und l' nach der Überschneidung in $\mathfrak{K}$ parallel laufend und bei fester Orientierung von $\mathfrak{k}$ entgegengesetzt orientiert annehmen (Fig. 3).

Wir bohren nun aus $\mathfrak{S}^3$ den Knoten aus. Für die Kugel $\mathfrak{K}$ bedeutet dies das Ausbohren von zwei Röhren, die sich vor der Überschneidung umschlingen, nach dieser jedoch parallel verlaufen.

Die ausgebohrte Überlagerung $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ vor und nach der Überschneidung zerfällt nach dem Vorhergehenden in die Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_g$ der ausgebohrten Vollkugel $\mathfrak{K}$ und die Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{A}_g$ des ausgebohrten Außenraumes $\mathfrak{A}$, die längs der Überlagerung $\mathfrak{O}_g$ der vierfach gelochten Kugeloberfläche $\mathfrak{O}$ aneinandergrenzen. Die Homologiegruppe von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ bestimmt sich dann nach dem Satze über die Homologiegruppe eines zusammengesetzten Komplexes[6]) aus den Homologiegruppen von $\mathfrak{K}_g$, von $\mathfrak{A}_g$ und vom Durchschnitt $\mathfrak{O}_g$.

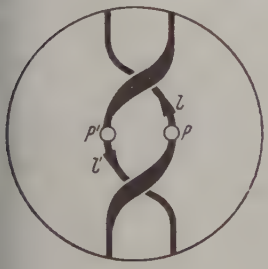


Fig. 2.

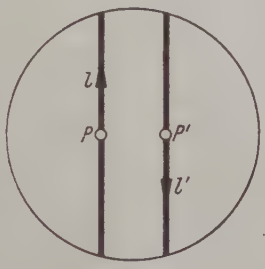


Fig. 3.

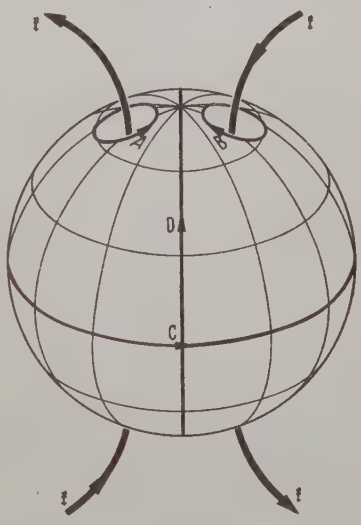


Fig. 4.

1. Wir konstruieren zunächst die Überlagerungsfläche $\mathfrak{O}_g$, die vor und nach der Überschneidung die gleiche ist und ermitteln ihre Homologiegruppe der Dimension 1.

Die vier Randkreise von $\mathfrak{O}$ nennen wir A, A', B, B'. Dabei sollen A und A' bzw. B und B' immer die Ränder einer Röhre von $\mathfrak{K}$ sein und ihre Orientierung soll so gewählt sein, daß die Kreise vor dem Ausbohren des fest orientierten Knotens mit diesem die Verschlingungszahl $+1$ haben (Fig. 4). Die vierfach gelochte Kugeloberfläche $\mathfrak{O}$ zerlegen wir nun durch die „wie A orientierte" geschlossene Kurve C, den „Äquator", in zwei zweifach gelochte Halbkugelflächen, die je die Kreise A, B bzw. A', B' enthalten. Um die g-fache zyklische Überlagerung der von den Kreisen A, B und C berandeten Halbkugelfläche zu bestimmen, gehen wir so vor:

[6]) S. 179 von [4]).

Wir schneiden die zweimal gelochte Halbkugelfläche längs eines doppelpunktfreien Weges L, der „Übergangslinie" auf, der seine Endpunkte auf den Kreisen A und B hat und sonst keinen Punkt mit A, B und C gemein hat. Es entsteht ein einfach gelochtes Rechteck, von dem zwei parallele Seiten dem Wege L entsprechen, während die beiden anderen die Kreise A und B sind. Der Äquator entspricht dem Lochrand des Rechtecks. Es seien g solche Rechtecke mit den Kanten A_i, B_i, L_i und den Lochrändern C_i $(i = 1, \ldots, g)$ gegeben. Wir heften sie zyklisch längs der Wege L_i aneinander, so daß immer eine Seite L_{i-1} mit einer L zusammenkommt. Die letzte freibleibende Kurve L_g werde an L_1 geheftet. Es entsteht auf diese Weise ein g-fach gelochter Kreisring, dessen äußerer Rand von der geschlossenen Kurve $B_1 \cdot \ldots \cdot B_g$, dessen innerer Rand von $A_1 \cdot \ldots \cdot A_g$ gebildet wird. Die Randkreise der g Löcher sind die Kurven $C_1, \ldots, C_g$. Die Fig. 5 zeigt dies für $g = 3$. In dieser Fläche hat man offenbar die g-blättrige Überlagerung der zweifach gelochten Halbkugel vor sich. Jedem Punkt der Grundfläche entsprechen nämlich g Punkte in der Überlagerungsfläche und nur die geschlossenen Kurven der Grundfläche sind auch dort geschlossen, die mit dem Knoten eine durch g teilbare Verschlingungszahl haben.

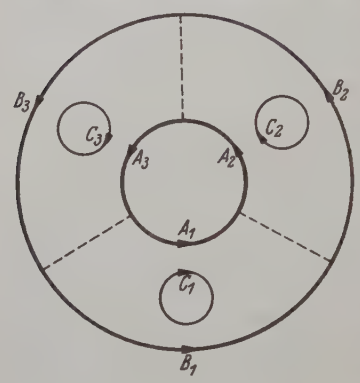


Fig. 5.

Die vierfach gelochte Kugelfläche erhält man nun aus der zweifach gelochten Halbkugelfläche, wenn man ein zweites Exemplar an das erste längs der Kurve C anheftet. Um die g-fache Überlagerungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{O}$ der vierfach gelochten Kugel zu finden, nehmen wir entsprechend ein zweites Exemplar der g-fachen Überlagerung der zweimal gelochten Halbkugel. Das ist wieder ein g-fach gelochter Kreisring, der wie vorhin durch Aneinanderreihen von g gelochten Rechtecken mit den Rändern A_i', B_i', C_i', L_i', $(i = 1, \ldots, g)$ entsteht. Heftet man nun die Kurve C_i des ersten Kreisringes an C_i' des zweiten, so erhält man die gewünschte g-blättrige Überlagerungsfläche $\mathfrak{O}_g$. Sie besteht daher aus zwei übereinanderliegenden kongruenten g-fach gelochten Kreisringen, von denen der obere die ungestrichenen, der untere die gestrichenen Kurven A_i und B_i trägt.

Offenbar ist die Überlagerungsfläche $\mathfrak{O}_g$ eine vierfach gelochte orientierbare Fläche vom Geschlechte (Henkelzahl) $g - 1$. Die vier Lochränder sind die Kurven $A^* = A_1 \cdot \ldots \cdot A_g$, $B^* = B_1 \cdot \ldots \cdot B_g$, $A^{*\prime} = A_1' \cdot \ldots \cdot A_g'$, $B^{*\prime} = B_1' \cdot \ldots \cdot B_g'$. Für die Homologiegruppe der

Dimension 1 von $\mathfrak{O}_g$ braucht man daher $2(g-1)+(4-1)=2g+1$ freie unabhängige Erzeugende. In der Grundfläche, der viermal gelochten Kugelfläche $\mathfrak{O}$, wählen wir als Erzeugende den Lochrand A, den Äquator C und den „Meridiankreis“ $D \sim A - A'$. D ist eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, die die Kugelfläche in zwei Halbkugelflächen trennt, in denen die Löcher A, A' bzw. B, B' liegen (Fig. 4). Auf $\mathfrak{O}_g$ wählen wir als Erzeugende $2g+1$ Bilder von A, C und D: nämlich die g Lochränder C_i $(i = 1, \ldots, g)$, die 1-Kette $A^* = A_1 \cdot \ldots \cdot A_g$ und die g Kurven D_i $(i = 1, \ldots, g)$. Die Kurve D_i ist die kürzeste geschlossene Linie von $\mathfrak{O}_g$, die C_i und C_{i+1} genau einmal schneidet. Sie verläuft daher „zur Hälfte“ im oberen und „zur Hälfte“ im unteren Kreisring. Ihre Orientierung ist wie die der Kurven A^*, B^* und C_i durch die in der Grundfläche vorgeschrieben. Die Fig. 6 zeigt für den Fall $g = 3$ den Verlauf der Erzeugenden.

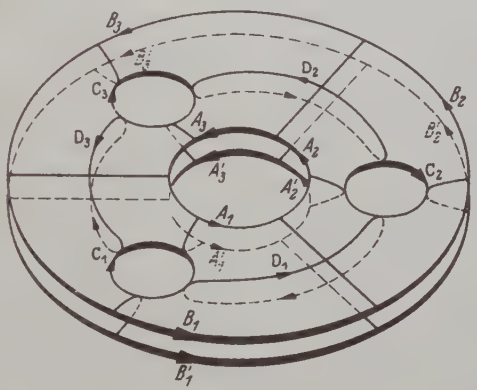


Fig. 6.

Wir behaupten nun, daß die $2g+1$ Kurven A^*, C_i, D_i eine Homologiebasis der Überlagerungsfläche bilden.

Zum Beweise betrachten wir eine beliebig vorgegebene geschlossene Kurve[7]) U. Sie hat mit den Kurven C_i, D_i gewisse unter Umständen von Null verschiedene Schnittzahlen

$$\mathfrak{S}(C_i, U) = \gamma_i, \qquad \mathfrak{S}(D_i, U) = \delta_i$$

Diese sind nicht voneinander unabhängig, vielmehr muß die Summe $\sum_1^g \gamma_i$ der Schnittzahlen mit den Kurven C_i ebenso wie die Summe $\sum_1^g \delta_i$ der Schnittzahlen mit den Kurven D_i gleich Null sein. Denn denkt man sich die Fläche längs der Kurven C_i aufgeschnitten, so zerfällt sie in zwei g-mal gelochte Kreisringe, einen unteren und einen oberen. Da die Kurve U geschlossen ist, muß sie, wenn sie etwa den oberen Kreisring durch Überschneiden einer Kurve C_i verläßt, durch Überschneiden einer Kurve C_j (j ist eine der Zahlen $1, \ldots, g$) mit entgegengesetzter Schnitt-

[7]) Die Kurve darf auch in mehrere geschlossene Teile zerfallen; genauer hätte man statt von Kurven von 1-Ketten zu reden, wie überall, wo es sich um Homologiebeziehungen handelt.

zahl wieder in ihn zurückkehren. Entsprechendes gilt für die Kurven D_i, die die Fläche in einen inneren und einen äußeren g-mal gelochten Kreisring zerlegen.

Bezeichnen wir mit V die Kurve

$$\begin{aligned} V = {} & \gamma_1 D_1 + \ldots + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{i-1})\, D_{i-1} \\ & + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_i)\, D_i + \ldots + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{g-1})\, D_{g-1} \\ & + \delta_1 C_2 + \ldots + (\delta_1 + \ldots + \delta_{i-1})\, C_i \\ & + (\delta_1 + \ldots + \delta_i)\, C_{i+1} + \ldots + (\delta_1 + \ldots + \delta_{g-1})\, C_g, \end{aligned}$$

so hat V mit den C_i und D_i die gleichen Schnittzahlen wie die Kurve U.

Es ist nämlich nach den Rechengesetzen für Schnittzahlen

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(C_i, V) = {} & \gamma_1 \mathfrak{S}(C_i, D_1) + \ldots + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{i-1})\, \mathfrak{S}(C_i, D_{i-1}) \\ & + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_i)\, \mathfrak{S}(C_i, D_i) + \ldots + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{g-1})\, \mathfrak{S}(C_i, D_{g-1}) \\ & + \delta_1 \mathfrak{S}(C_i, C_2) + \ldots + (\delta_1 + \ldots + \delta_{g-1})\, \mathfrak{S}(C_i, C_g) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(D_i, V) = {} & \gamma_1 \mathfrak{S}(D_i, D_1) + \ldots + (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{g-1})\, \mathfrak{S}(D_i, D_{g-1}) \\ & + \delta_1 \mathfrak{S}(D_i, C_2) + \ldots + (\delta_1 + \ldots + \delta_{i-1})\, \mathfrak{S}(D_i, C_i) \\ & + (\delta_1 + \ldots + \delta_i)\, \mathfrak{S}(D_i, C_{i+1}) + \ldots + (\delta_1 + \ldots + \delta_{g-1})\, \mathfrak{S}(D_i, C_g). \end{aligned}$$

Nun haben von den Schnittzahlen zwischen einer Kurve C_i und einer Kurve C_j oder D_k alle den Wert Null bis auf die Schnittzahlen $\mathfrak{S}(C_i, D_{i-1})$ und $\mathfrak{S}(C_i, D_i)$, die bei geeigneter Orientierung von $\mathfrak{D}_g$ die Werte haben (vgl. Fig. 6):

$$\mathfrak{S}(C_i, D_{i-1}) = -1, \quad \mathfrak{S}(C_i, D_i) = +1,$$

oder

$$\mathfrak{S}(D_i, C_{i+1}) = +1, \quad \mathfrak{S}(D_i, C_i) = -1.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{S}(C_i, V) = \gamma_i, \quad \mathfrak{S}(D_i, V) = \delta_i.$$

Die Differenz $U - V$ hat dann mit allen C_i und D_i die Schnittzahl 0. Wir zeigen, daß $U - V$ homolog einer Linearkombination der Kurven A^*, C_i und D_i ist. Damit ist unser Ziel erreicht. Denn es ist dann U selbst homolog einer Linearkombination der Kurven A^*, C_i und D_i.

Da die Schnittzahlen von $U - V$ mit den C_i und D_i verschwinden, dürfen wir annehmen, daß $U - V$ keine Schnittpunkte mit den Kurven C_i und D_i hat. Nötigenfalls müßte man dies dadurch erreichen, daß man durch eine Deformation von $U - V$ alle Schnittpunkte von $U - V$ mit einer Kurve C_i oder D_i in einen zusammenfallen läßt und danach $U - V$ in zusammenhängende Teile zerreißt, die auf verschiedenen Ufern liegen. Zerschneiden wir nun die Fläche durch die Kurven C_i (bzw. D_i) in zwei Kreisringe, so kann ein Ast von $U - V$, der in einem der Kreisringe beginnt, diesen nie verlassen, da die Kreisringe von den Randkreisen A^*,

$A^{*\prime}$, B^*, $B^{*\prime}$ und den Kurven C_i (bzw. D_i) begrenzt werden, also muß er einem Vielfachen der Randkreise homolog sein. Für diese gelten aber die aus den Kreisringen abzulesenden Homologien:

$$B^* \sim A^* - \sum_1^g C_i,$$

$$A^{*\prime} \sim A^* - \sum_1^g D_i,$$

$$B^{*\prime} \sim A^* - \sum_1^g C_i - \sum_1^g D_i.$$

Damit ist der Beweis beendet.

2. Wir wollen nun die Homologiegruppe der Dimension 1 der ausgebohrten Vollkugel $\mathfrak{K}$ und die ihrer Überlagerung $\mathfrak{K}_g$ vor und nach der Überschneidung bestimmen. Jede 1-Kette der ausgebohrten Vollkugel ist homolog einer auf der gelochten Kugeloberfläche $\mathfrak{O}$, denn man kann jede 1-Kette längs der Röhren auf diese drängen. Die Erzeugenden der Homologiegruppen von $\mathfrak{O}$ können daher auch als Erzeugende der Homologiegruppe von $\mathfrak{K}$ gewählt werden. Die Homologiegruppe von $\mathfrak{K}$ geht also aus der der Oberfläche durch Hinzunahme von Zusatzrelationen hervor. Derselbe Schluß gilt für die Überlagerung $\mathfrak{K}_g$ der Kugel. Die Homologiegruppe der Dimension 1 von $\mathfrak{K}_g$ erhält man durch Hinzunahme von neuen Relationen aus der der Überlagerung $\mathfrak{O}_g$ der Kugeloberfläche.

Die Homologiegruppe von $\mathfrak{O}_g$ haben wir unter 1. als die freie abelsche Gruppe von $2g+1$ Erzeugenden ermittelt. Um die Zusatzrelationen festzustellen, betrachten wir zunächst den Grundraum. Hier waren die Erzeugenden der Kugeloberfläche der Äquator C, der Meridiankreis D und der Lochrand A. Nach Ausführung der Überschneidung wird durch Hinzunahme des Kugelinnern offenbar nur die Relation $D \sim 0$ hinzutreten, in der Überlagerungsmannigfaltigkeit also entsprechend

$$D_i \sim 0 \ (i = 1, \ldots, g).$$

Um die Relationen vor der Überschneidung zu ermitteln, gehen wir wie folgt vor. Wir deformieren die Kugel stetig in sich so, daß sich die Umschlingung der beiden Röhren löst, wir also dasselbe Bild erhalten wie nach der Überschneidung. Dabei kann die stetige Selbstabbildung, die die Oberfläche erleidet, noch so vorgenommen werden, daß die Lochränder A und B punktweise fest bleiben und die Kurve C und die untere Halbkugelfläche starr in sich um 2π gedreht werden. Der Sinn der Drehung hängt ab von der Art der Umschlingung. Wir nehmen im folgenden an, daß die Umschlingung gelöst wird, wenn die Drehung im Sinne der Orientierung von C erfolgt. Nach der Deformation haben also

die Erzeugenden C und A die alte Lage wieder inne, D dagegen verläuft anders als früher. Wählen wir auf der Kugeloberfläche nach der Deformation als Erzeugende wieder den Äquator C, den Lochrand A und den Meridiankreis $\overline{D}$, der natürlich nicht $\sim D$ ist, so geht die Homologiegruppe des Kugelinneren aus der der Kugeloberfläche durch Hinzunahme der Relation $\overline{D} \sim 0$ hervor. Drücken wir nun $\overline{D}$ durch D, A und C aus, so erhalten wir offenbar die gewünschte Zusatzrelation. Um entsprechend in der Überlagerung der Kugel vorgehen zu können, wollen wir die Selbstabbildung der Kugeloberfläche noch näher betrachten.

Die Deformation der Kugelfläche, bei der A und B punktweise fest bleiben, C und die untere Halbkugelfläche im Sinne der Orientierung von C um 2π gedreht werden, kommt im Endergebnis offenbar auf dasselbe hinaus wie die folgende Abbildung: Wir zerschneiden die Kugelfläche längs C, deformieren die obere Halbkugelfläche so, daß C im Sinne seiner Orientierung um 2π starr in sich gedreht wird und A und B punktweise festbleiben und heften sie wieder an die untere Halbkugelfläche an. Diese Abbildung nehmen wir nun in der Überlagerungsfläche vor. Wir schneiden also diese längs der Kurven $C_i (i = 1, \ldots, g$ auseinander, nehmen eine Selbstabbildung des oberen Kreisringes in sich so vor, daß A und B^* punktweise festbleiben, während die Lochränder C_i um 2π in sich gedreht werden und heften dann die beiden Kreisringe wieder aneinander. Die Kurve D hat nach der Deformation die in Fig. 7 angegebene Gestalt und drückt sich durch $\overline{D}_i, C_i$ und C_{i+1} in der Weise aus:

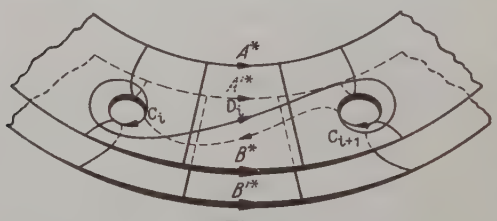


Fig. 7.

$$\overline{D}_i \sim D_i - C_{i+1} + C_i \qquad (i = 1, \ldots, g$$

Die Zusatzrelationen sind also:

$$\overline{D}_i \sim 0 \quad \text{oder} \quad D_i \sim C_{i+1} - C_i.$$

Dabei ist für C_{g+1} wieder C_1 zu setzen.

3. Die Homologiegruppe der g-blättrigen Überlagerung $\mathfrak{M}_g^3$ vor und nach der Überschneidung.

$\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ ist aus zwei Komplexen zusammengesetzt, der Überlagerung $\mathfrak{K}$ der Kugel $\mathfrak{K}$ und der Überlagerung $\mathfrak{A}_g$ des Außenraumes $\mathfrak{A}$. Ihr Durchschnitt ist die Überlagerung $\mathfrak{D}_g$ der Kugelfläche. Die Homologiegruppen des Außenraumes und des Durchschnitts sind vor und nach der Überschneidung beidemal die gleichen. Was durch die Überschneidung geändert

wird, sind nur die Relationen, die durch die Überlagerung des Kugelinneren hinzukommen. Nach der Überschneidung haben diese Relationen die Gestalt:

$$D_i \sim 0.$$

Vorher treten zur Gruppe des Außenraumes und des Durchschnittes die g-Relationen: $D_i \sim C_{i+1} - C_i$ hinzu. Schreibt man die Relationen nach bzw. vor der Überschneidung in der Form:

$$\begin{cases} (1)\ D_1 \sim 0,\ D_2 \sim 0,\ \ldots.\ D_{g-1} \sim 0, \\ (1\,a)\ \sum_1^g D_i \sim 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2)\ D_1 \sim C_2 - C_1,\ D_2 \sim C_3 - C_2,\ \ldots,\ D_{g-1} \sim C_g - C_{g-1}, \\ (2\,a)\ \sum_1^g D_i \sim 0, \end{cases}$$

so erkennt man, daß sich die Homologiegruppen der Überlagerung nach und vor der Überschneidung dadurch unterscheiden, daß an die Stelle der $g-1$ Relationen (1) die $g-1$ Relationen (2) treten. Die Minimalzahl der Erzeugenden der Homologiegruppe der Dimension 1 (Zahl der Torsionskoeffizienten plus Bettische Zahl) vor der Überschneidung ist also höchstens um $g-1$ größer als ihre Minimalzahl nach der Überschneidung. Lassen wir nämlich in der Homologiegruppe der Überlagerung nach der Überschneidung die $g-1$ Relationen (1) fort, so kann sich die Minimalzahl der Erzeugenden höchstens um $g-1$ erhöhen. Fügen wir nun die $g-1$ Relationen (2) hinzu, so könnten diese so beschaffen sein, daß sich die Minimalzahl nicht senkt.

Nun ist die Homologiegruppe nach der Überschneidung die freie Gruppe von einer Erzeugenden. Der Knoten wird nämlich durch die eine Überschneidung nach Voraussetzung die Kreislinie. Nach Ausbohrung der Kreislinie aus der 3-Sphäre bleibt ein Vollring übrig, dessen ausgebohrte g-blättrige Überlagerung bekanntlich und offenbar wieder ein Vollring ist. Die Homologiegruppe der *ausgebohrten* Überlagerung $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ hat also höchstens g wesentliche Erzeugende. Gehen wir zur *verzweigten* Überlagerung $\mathfrak{M}_g^3$ über, so hat die Homologiegruppe eine freie Erzeugende weniger als die von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ und wir haben das Ergebnis:

Hat ein Knoten die Überschneidungszahl 1, *so läßt sich die Homologiegruppe* $\mathfrak{H}_g^1$ *der g-blättrigen verzweigten Knotenüberlagerung* $\mathfrak{M}_g^3$ *von* $g-1$ *Elementen erzeugen.*

Nun fragen wir nach einer Bedingung, die erfüllt sein muß, damit ein Knoten sich mit höchstens n Überschneidungen auflösen läßt. Ist $\mathfrak{k}_2$ ein Knoten mit der Überschneidungszahl 2, so geht er durch eine passende Überschneidung in einen Knoten $\mathfrak{k}_1$ mit der Überschneidungszahl 1 über.

Genau wie vorher schließen wir die Überschneidungsstelle in eine Kugel ein und stellen die Homologiegruppe der g-blättrigen ausgebohrten Überlagerung vor und nach der Überschneidung auf. Die Homologiegruppe nach der Überschneidung, die oben die freie Gruppe von einer Erzeugenden war, ist hier eine Gruppe von höchstens g wesentlichen Erzeugenden. Wie früher schließt man daher, daß die Homologiegruppe von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ des Knotens $\mathfrak{k}_2$ höchstens $2g-1$ wesentliche Erzeugende hat. Die Homologiegruppe der verzweigten g-blättrigen Überlagerung besitzt daher höchstens $2(g-1)$ wesentliche Erzeugende.

Allgemein ergibt sich, daß bei einem Knoten $\mathfrak{k}_n$ mit der Überschneidungszahl $s = n$ die Homologiegruppe der g-blättrigen verzweigten Überlagerung höchstens $n(g-1)$ wesentliche Erzeugende hat.

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken:

Ein Knoten $\mathfrak{k}$ läßt sich sicher nicht durch n Überschneidungen in die Kreislinie deformieren, wenn die Minimalzahl der Erzeugenden der Homologiegruppe der g-blättrigen zyklischen verzweigten Knotenüberlagerung größer als $n(g-1)$ ist.

Ein Beispiel für einen Knoten, der sich durch n Überschneidungen nicht auflösen läßt, erhält man durch Aneinanderreihung von $n+1$ Kleeblattschlingen (topologische Summenbildung). Für unsere Zwecke ist es gleichgültig, ob man dabei Rechts- oder Linkskleeblattschlingen verwendet (Fig. 8 zeigt den Fall $n=1$). Die Torsionsgruppe der zweifachen Überlagerung dieses Knotens ist die direkte Summe von $n+1$ zyklischen Gruppen der Ordnung 3 (vgl. Anhang II), und daher ist nach obigem seine Überschneidungszahl $> n$. Er läßt sich aber, wie man sofort sieht, durch $n+1$ Überschneidungen auflösen. Seine Überschneidungszahl beträgt daher $s = n+1$. Sie ist ebenso groß wie das Geschlecht dieses Knotens (vgl. Anhang II).

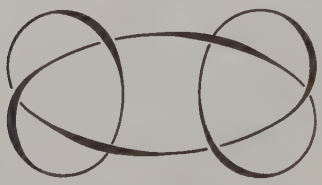


Fig. 8.
Topologische Summe von zwei Kleeblattschlingen.

Beispiele für Knoten, die sich mit weniger Überschneidungen auflösen lassen, als ihr Geschlecht angibt, sind die Knoten 8_{20} und 9_{42} (Fig. 9 und 10[8]) der *Alexander-Briggsschen-Knoten-Tabelle*[9]), deren Geschlecht 2[10]) ist, deren Überschneidungszahl jedoch 1 beträgt. In den

[8]) In den Figuren sind die Knoten durch die etwas übersichtlicheren Projektionen von Herrn Constantin Weber, Math. Annalen 110 (1934), S. 579 angegeben.

[9]) Diese Tabelle findet man z. B. bei K. Reidemeister: Knotentheorie, Berlin 1932.

[10]) H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Annalen 110 (1934), S. 579.

Figuren ist die Stelle, wo man etwa die Überschneidung anbringen kann, durch Anstreichen angegeben. Es gibt aber auch Knoten, für die die Überschneidungszahl größer als ihr Geschlecht ist. Wir wollen uns jetzt solchen zuwenden. Dazu müssen wir noch etwas näher auf die Homologiegruppen der Knotenüberlagerungen eingehen.

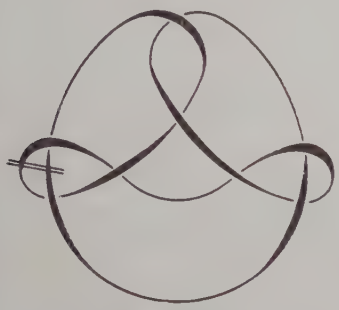


Fig. 9.
Knoten 8_{20}: Geschlecht $h = 2$,
Überschneidungszahl $s = 1$.

Fig. 10.
Knoten 9_{42}: Geschlecht $h = 2$,
Überschneidungszahl $s = 1$.

Man kann zeigen [11]), daß die Homologiegruppen der Dimension 1 aller Knotenüberlagerungen durch die Kenntnis einer Matrix Γ bestimmt sind. Diese hat, wenn man in den Knoten eine Fläche vom Geschlecht h einspannen kann, $2h$ Zeilen und Spalten. Die g-blättrige verzweigte Überlagerung des Knotens hat dann als Homologiegruppe $\mathfrak{H}_g^1$ eine Gruppe von $2h$ Erzeugenden, deren Relationen durch die $2h$-reihige Matrix

(3) $$\Gamma^g - (\Gamma - \mathsf{E})^g \quad (\mathsf{E} = 2h\text{-reihige Einheitsmatrix})$$

gegeben sind.

Was die Matrix Γ anlangt, so erhält man sie am einfachsten dadurch, daß man die in den Knoten eingespannte Fläche vom Geschlecht h sich als Kreisfläche mit $2h$ angesetzten Bändern denkt, die in der Projektion die Kreisfläche nicht überschneiden und unverdrillt erscheinen. Der Knoten ist dabei der Rand der Fläche. Auf der Fläche wählen wir h Paare konjugierter Rückkehrschnitte a_1, a_2; a_3,

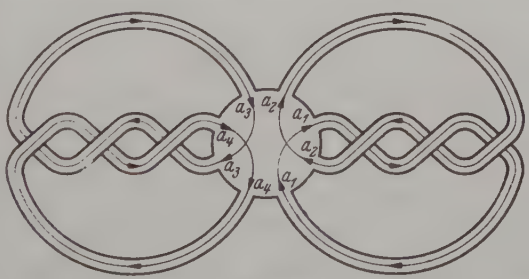


Fig. 11.
Knoten vom Geschlecht $h = 2$,
Überschneidungszahl $s = 4$.

[11]) Dies wird in der unter [10]) erwähnten Arbeit getan.

$a_4; \ldots; a_{2h-1}, a_{2h}$, so daß jeder ein Band durchläuft. (Fig. 11 zeigt einen Knoten, in den eine Fläche vom Geschlecht 2 eingespannt ist.) Wir orientieren sie so, daß im Schnittpunkt a_{2r+1} von a_{2r+2} von rechts nach links überquert wird. Bezeichnen wir mit v_{ik} die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen a_i von links nach rechts über a_i geht, vermindert um die Anzahl derjenigen, bei denen a_k von rechts nach links über a_i hinwegführt, so ist die Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12}, & -v_{11}, & \ldots, v_{1,2h}, & -v_{1,2h-1}, \\ v_{22}, & -v_{21}, & \ldots, v_{2,2h}, & -v_{2,2h-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{2h-1,2}, & -v_{2h-1,1}, & \ldots, v_{2h-1,2h}, & -v_{2h-1,2h-1}, \\ v_{2h,2}, & -v_{2h,1}, & \ldots, v_{2h,2h}, & -v_{2h,2h-1}. \end{pmatrix}$$

Zwischen den v_{ik} gelten die Beziehungen:

$$(4) \quad \begin{cases} v_{ik} = v_{ki} & \binom{i}{k} \neq \binom{2r+1}{2r+2} \text{ und } \neq \binom{2r+2}{2r+1}, \\ v_{2r+1,2r+2} = v_{2r+2,2r+1} + 1. \end{cases}$$

Sonst sind die v_{ik} beliebig und man kann, falls nur die Gleichungen (4) erfüllt sind, zu jedem vorgegebenen Wertsystem der v_{ik} einen Knoten finden.

Die Matrix Γ gibt uns weiter die *Alexandersche Polynominvariante*. Dies ist bis auf einen Faktor $\pm x^n$ der Wert der Determinante $|\mathsf{E} - \Gamma + x\Gamma'|$. Der Grad der Alexanderschen Polynominvariante ist höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens[12]).

Wir wollen nun einen Knoten vom Geschlecht h konstruieren, dessen Überschneidungszahl $2h$ beträgt. Nach S. 690 wissen wir, daß sich ein Knoten dann nicht mit $2h-1$ Überschneidungen auflösen läßt, wenn die Homologiegruppe der 2-blättrigen Überlagerung $2h$ Torsionskoeffizienten aufweist. Die Matrix des Relationssystems für die Homologiegruppe hat dann, wie oben angegeben, die Gestalt:

$$\Gamma^2 - (\Gamma - \mathsf{E})^2 = 2\Gamma - \mathsf{E}$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$2\Gamma - \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2v_{12} - 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots - 2v_{12} + 1, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2v_{2h-1,2h} - 1, & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 2v_{2h-1,2h} + 1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir alle Glieder außerhalb der Diagonale der Matrix Null und $v_{12} = v_{34} = \ldots = v_{2h-1,2h} = v$ $(v \neq 0, 1)$, so erhält man $2h$ Torsionskoeffizienten vom Werte $2v - 1$. Nehmen wir den speziellen Fall $v = +$

[12]) Satz 3 von [10]).

so haben wir einen Knoten, der in der zweiten Überlagerung $2h$ Torsionskoeffizienten vom Werte 3 besitzt. (Die Figur 11 zeigt einen solchen Knoten für den Fall $h = 2$). Dieser läßt sich also bestimmt nicht mit $2h - 1$ Überschneidungen auflösen.

Man sieht aber leicht, daß er sich mit $2h$ Überschneidungen auflösen läßt. Im Falle $h = 1$ erkennt man dies, wenn man zunächst eine Überschneidung in der Weise durchführt, wie es die strichpunktierten Linien der Fig. 12 andeuten. Der Knoten geht dadurch in die Kleeblattschlinge über, die die Überschneidungszahl 1 besitzt. Der Knoten ist übrigens der Knoten 9_{46} der Alexander-Briggsschen Knotentabelle. Der Knoten mit der Überschneidungszahl $s = 2h$ entsteht aber offenbar durch Aneinanderreihung von $2h$ solchen Knoten. Sein Geschlecht beträgt h (vgl. Anhang II).

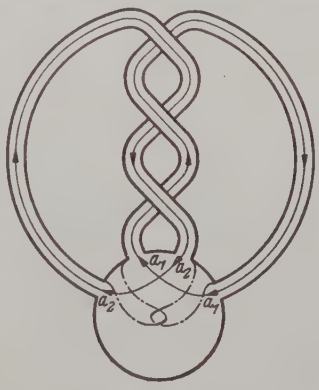


Fig. 12.
Knoten 9_{46}: Geschlecht $h = 1$, Überschneidungszahl $s = 2$.

Wir wollen nun noch auf eine Eigenschaft des eben betrachteten Knotens hinweisen. Durch $2s$ Überschneidungen kann man daraus Knoten mit der Überschneidungszahl $2(h - s)$ herleiten. Je nachdem wie man die Überschneidungen ausführt, wird das Geschlecht h oder $h - s$ werden. Der erste Fall tritt ein, wenn man in jedem Knoten 9_{46} eine Überschneidung so anbringt, daß er in die Kleeblattschlinge übergeht. Der zweite Fall erfolgt, wenn wir durch die $2s$ Überschneidungen s Knoten 9_{46} vollständig auflösen.

Zum Schluß erwähnen wir noch zum Teil seit langem bekannte ungelöste Probleme der Knotentheorie. Wir denken zunächst an die Frage, wie sich Geschlecht und Überschneidungszahl zweier Knoten zu denen ihrer topologischen Summe (wofür man bisweilen auch sagt: Produkt) verhalten. Gibt es Knoten, die nicht Summe anderer Knoten sind? Ist gegebenenfalls die „Faktorzerlegung“ in solche „Primknoten“ eindeutig? In welcher Beziehung stehen die Invarianten eines Knotens, insbesondere Geschlecht h, (minimale) Überschneidungszahl s, Minimalzahl der Überkreuzungen der Knotenprojektion, Pannwitzsche Invariante zueinander? — In vielen Fragen der dreidimensionalen Topologie spielt das *Dehnsche Lemma* eine bedeutende Rolle. Es besagt, daß eine Kurve unverknotet ist, wenn man in sie ein Elementarflächenstück ohne Randsingularitäten einspannen kann, also ein Flächenstück, das von dem Knoten nicht durchsetzt wird, das aber im übrigen beliebig zerknüllt im Raume liegen kann. Wäre das Dehnsche Lemma bewiesen, so würde folgen, daß eine Kurve dann

und nur dann unverknotet ist, wenn ihre Knotengruppe die freie zyklisch Gruppe ist, oder was dasselbe besagt, wenn die Knotengruppe abelsc ist. In neuester Zeit hat Herr J. H. C. Whitehead, Oxford, die interessan Tatsache bewiesen, daß, wenn das Dehnsche Lemma falsch wäre, auc die *Poincarésche Vermutung* falsch wäre, wonach die einzige einfach zu zusammenhängende geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit die dre dimensionale Sphäre ist.

Anhang I.

Satz: *Die Homologiegruppe (der Dimension 1) der ausgebohrte g-blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ eines Knotens unterscheidet sich von derjenigen der verzweigten g-blättrigen zyklische Überlagerung $\mathfrak{M}_g^3$ nur durch eine hinzugekommene freie Erzeugende.*

Beweis: Die geschlossenen Kurven $C_1, \ldots, C_r$ mögen eine Hom logiebasis von $\mathfrak{M}_g^3$ repräsentieren. Man kann diese Kurven so wähle daß sie fremd zu $\mathfrak{k}$ sind und mit der in $\mathfrak{k}$ eingespannten Fläche $\mathfrak{f}$, m deren Hilfe $\mathfrak{M}_g^3$ erklärt war (S. 681), die Schnittzahl 0 haben. Hätte 0 mit $\mathfrak{f}$ eine von 0 verschiedene Schnittzahl, so könnte man, ohne d Homologieklasse zu ändern, ein geeignetes Vielfaches eines kleinen $\mathfrak{k}$ ei mal umschlingenden Kreises M (Meridiankreis) hinzuaddieren; M ist i $\mathfrak{M}_g^3$ nullhomolog und hat in $\mathfrak{f}$ bei geeigneter Orientierung mit $\mathfrak{k}$ die Schnitt zahl 1. Nun gehe man durch Ausbohren von $\mathfrak{M}_g^3$ zu $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ über. Die i $\mathfrak{M}_g^3$ zu $\mathfrak{k}$ punktfremden $r+1$ Kurven $C_1, \ldots, C_r, M$ sind auch fremd z einem hinreichend dünnen Bohrkern und können daher in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ angenomme werden. Wir behaupten, daß sie eine Homologiebasis von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ bilde

Daß diese Kurven Erzeugende der Homologiegruppe von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ sin ist klar. Besteht nun in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ eine Homologie

$$\Sigma \gamma_i C_i + \mu M \sim 0,$$

so folgt $\mu = 0$, denn die in $\Sigma \gamma_i C_i + \mu M$ eingespannte Fläche (genau 2-Kette) G hat in $\mathfrak{M}_g^3$ mit $\mathfrak{k}$ die Schnittzahl 0, weil sie nach Voraus setzung ganz in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ liegt:

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = 0.$$

Nach einer Hauptformel [13]) ist aber

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = \mathcal{S}(\Sigma \gamma_i C_i + \mu M, \mathfrak{f})$$

und weiter nach den Rechenregeln für Schnittzahlen

$$\mathcal{S}(G, \mathfrak{k}) = \mathcal{S}(\Sigma \gamma_i C_i, \mathfrak{f}) + \mu \mathcal{S}(M, \mathfrak{f}).$$

Das erste Glied dieser Summe ist $= 0$ infolge unserer Wahl der C $\mathcal{S}(M, \mathfrak{f})$ ist aber $= 1$, also folgt $\mu = 0$ und M repräsentiert daher ein

[13]) Formel (5) S. 247 des unter [4]) angeführten Topologiebuches.

freie Erzeugende der Homologiegruppe von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$. Die übrigbleibende Relation $\Sigma \gamma_i C_i \sim 0$ gilt in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$, also auch in $\mathfrak{M}_g^3$. Mithin sind die γ_i Vielfache der Torsionskoeffizienten c_i von $\mathfrak{M}_g^3$, wenn C_i ein Basiselement der Torsionsgruppe ist und Null, wenn es ein solches der Bettischen Gruppe ist. Nun ist aber auch in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ schon $c_i C_i$ nullhomolog. Denn bezeichnet F_i die Fläche, die in $\mathfrak{M}_g^3$ von der geschlossenen Kurve $c_i C_i$ berandet wird, so ist

$$\mathcal{S}(c_i C_i, \mathfrak{f}) = 0,$$

andererseits gilt wieder nach der Hauptformel

$$\mathcal{S}(c_i C_i, \mathfrak{f}) = \mathcal{S}(F_i, \mathfrak{f}).$$

Wenn aber $\mathcal{S}(F_i, \mathfrak{f}) = 0$ ist, so darf man annehmen, daß die Fläche F_i mit dem Knoten überhaupt keine Schnittpunkte hat, da gleichviele Durchsetzungen der Fläche in der einen wie anderen Richtung erfolgen müßten; diese könnte man aber durch Hinzufügen gleichvieler Meridiankurven M und $-M$ zu $c_i C_i$ aus F_i ausschneiden. Hiernach ist die Kurve $c_i C_i$ schon in $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$ nullhomolog, also der Torsionskoeffizient c_i von $\mathfrak{M}_g^3$ auch einer von $\overline{\mathfrak{M}}_g^3$, womit der Beweis geführt ist.

Einen einfacheren Beweis erhält man, wenn man den auf geschlossene Mannigfaltigkeiten verallgemeinerten *Alexanderschen Dualitätssatz* auf die verzweigte g-blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit anwendet. Aus ihm folgt nämlich, daß zur Homologiegruppe der Dimension 1 nur eine neue freie Erzeugende hinzutritt, wenn man eine nullhomologe Kurve ausbohrt.

Anhang II.

1. Wir wollen zunächst die numerischen Invarianten der zwei- und dreiblättrigen zyklischen verzweigten Überlagerung der Kleeblattschlinge ermitteln.

Nach S. 691 benötigen wir dazu die Matrix Γ, die wir aus dem Bändermodell, das in Fig. 13 dargestellt wird, gewinnen.

Man entnimmt ihm die Werte:

$v_{11} = 1,\ v_{22} = 1,\ v_{12} = 0,\ v_{21} = -1.$

Daher wird

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12} & -v_{11} \\ v_{22} & -v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Invarianten der Matrix

$$2\Gamma - \mathsf{E}$$

liefern nach (3) die numerischen Invarianten der 2-blättrigen Überlagerung, die der Matrix

$$3\Gamma^2 - 3\Gamma + \mathsf{E}$$

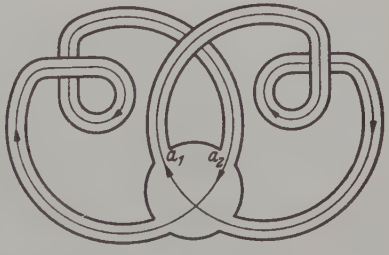


Fig. 13.
Bändermodell der Kleeblattschlinge.

die der 3-blättrigen Überlagerung. Es ergibt sich für die 2-blättrige Überlagerung ein Torsionskoeffizient vom Werte 3, für die 3-blättrige zwei vom Werte 2. In beiden Fällen ist die Bettische Zahl der Dimension 1 Null.

2. Reiht man $n+1$ Bändermodelle von Kleeblattschlingen aneinander, so hat die $2(n+1)$-reihige Matrix Γ^* des entstehenden Knotens die Gestalt

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \dots 0 \\ 0 & \Gamma \dots 0 \\ \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 \dots \underbrace{\Gamma}_{n+1} \end{pmatrix}$$

Als Invarianten findet man damit für die 2-blättrige Überlagerung des Knotens $n+1$ Torsionskoeffizienten vom Werte 3. Die 3-blättrige Überlagerung hat $2(n+1)$ Torsionskoeffizienten vom Werte 2. Die Bettische Zahl ist in beiden Fällen Null.

Wie das Bändermodell zeigt, ist das Geschlecht dieses Knotens $H \leqq n+1$.

Andererseits gilt der Satz [14]), daß die Zahl der wesentlichen Erzeugenden einer beliebigen zyklischen verzweigten Überlagerungsmannigfaltigkeit eines Knotens höchstens gleich dem doppelten Geschlecht des Knotens ist. Angewandt auf die 3-blättrige Überlagerung liefert dies die Ungleichung

$$2H \geqq 2(n+1).$$

Daher ist $H = n+1$.

3. Da der Knoten 9_{46} in der 2-blättrigen Überlagerung zwei Torsionskoeffizienten hat (S. 692), läßt sich für die Aneinanderreihung von h solchen Knoten genau wie unter 2. zeigen, daß das Geschlecht h ist.

---

[14]) Satz 2 von [10]).

(Eingegangen am 27. Dezember 1936.)

Über Affinminimalflächen, die gleichzeitig Minimalflächen sind.

Von

Wilhelm Süss in Freiburg i. B.

Die in der Überschrift genannten Flächen sind von G. Thomsen in einer Arbeit gleichen Titels[1]) folgendermaßen gekennzeichnet worden: *Flächen sind dann und nur dann gleichzeitig Minimalflächen und Affinminimalflächen, wenn ihre Asymptotenlinien ein Netz sich senkrecht schneidender Kreise zum sphärischen Bilde haben.* Hierfür werde ich einen kurzen Beweis im Rahmen der relativen Flächentheorie geben, auf den ich schon a. a. O. hingewiesen habe[2]). Eine andere Kennzeichnung wird am Schluß der Arbeit genannt.

1. Der Vollständigkeit wegen schicke ich folgendes voraus:

Sind zwei Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ punktweise durch parallele Tangentenebenen aufeinander bezogen, so daß also für ihre Tangentenvektoren in entsprechenden Punkten eine Darstellung der Form gilt:

$$\mathfrak{e}_i = a_i^k \mathfrak{x}_k \quad \text{(Über zwei gleiche Zeiger summieren!)}, \tag{1}$$

so heißt die eine bezüglich der anderen als Eichfläche „Relativminimalfläche", wenn die „mittlere Relativkrümmung" verschwindet:

$$h = \tfrac{1}{2} a_k^k = 0. \tag{2}$$

Man erkennt sofort, daß dabei die Rollen der zwei Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{e}$ vertauschbar sind. Zwischen den Koeffizienten der zweiten Grundformen der gewöhnlichen Flächentheorie, die wir mit b_{ik} bzw. b_{ik}^* bezeichnen, bestehen nach (1) die Beziehungen

$$b_{ik}^* = a_i^l b_{lk} = b_{ki}^*. \tag{3}$$

Da wegen (2) aus $b_{11} = b_{22} = 0$ auch $b_{12}^* = 0$ folgt, entspricht den Asymptotenlinien der einen Fläche stets ein konjugiertes Netz auf der anderen. Diese schon lange bekannte Tatsache ist umgekehrt für Relativminimalflächen auch hinreichend. Da eine gewöhnliche Minimalfläche Relativminimalfläche bezüglich ihres sphärischen Bildes, der Einheitskugel ξ ist, so ist also z. B. eine Minimalfläche zugleich Relativminimalfläche bezüglich einer anderen von einer Kugel verschiedenen Fläche dann und

[1]) Hamburger Abhandlungen, Bd. 2, S. 71—73. Siehe auch W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II (Berlin 1923), § 71.

[2]) Jahresber. der D. M. V., Bd. 37, Aufgabe 55.

nur dann, *wenn ihren Asymptotenlinien auf der anderen Fläche das Netz der Krümmungslinien entspricht.* Das Netz auf der zweiten Fläche muß nämlich selbst konjugiert sein und als sphärisches Bild auch ein konjugiertes, also senkrechtes Kurvennetz besitzen.

2. Ich beweise zunächst die Notwendigkeit der anfangs genannten Eigenschaft. Affinminimalflächen sind Relativminimalflächen bezüglich ihres Affinkrümmungsbildes $\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ als Eichfläche[3]). Wählen wir die Asymptotenlinien der Minimalfläche $\mathfrak{x}$, die zugleich Affinminimalfläche sein soll, zu Parameterlinien u, v, so entsprechen ihnen nach Nr. 1 auf dem Affinkrümmungsbild $\mathfrak{y}$ die Krümmungslinien, so daß dort die Formeln von Rodrigues gültig sind:

$$\mathfrak{y}_u + r_1 \xi_u = 0, \quad \mathfrak{y}_v + r_2 \xi_v = 0, \tag{4}$$

$$\xi_u \xi_v = 0. \tag{5}$$

Die Größen r_i sind dabei die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{y}$. (Sonst schließen wir uns in der Bezeichnung an das oben [1]) genannte Buch von Blaschke an.) Da auf einer Affinminimalfläche die Affinnormalen längs einer Asymptotenlinie einander parallel sind, ist (l. c.[1]), S. 181)

$$(\mathfrak{y}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_{uu}) = (\mathfrak{y}\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}_{vv}) = 0,$$

also nach (4)

$$(\mathfrak{y}\, \xi_u\, \xi_{uu}) = (\mathfrak{y}\, \xi_v\, \xi_{vv}) = 0. \tag{6}$$

Durch Ableitung ergibt sich hieraus wegen (4)

$$(\mathfrak{y}\, \xi_u\, \xi_{uuu}) = (\mathfrak{y}\, \xi_v\, \xi_{vvv}) = 0,$$

also wegen (6)

$$(\xi_u\, \xi_{uu}\, \xi_{uuu}) = (\xi_v\, \xi_{vv}\, \xi_{vvv}) = 0. \tag{7}$$

Die sphärischen Bildkurven sind somit eben, also Kreise, und stehen nach (5) aufeinander senkrecht, w. z. b. w.

3. Eine Fläche, deren Asymptotenlinien als sphärisches Bild ein Netz senkrechter Kreise besitzen, ist umgekehrt stets sowohl Minimalfläche als auch Affinminimalfläche, wie jetzt bewiesen werden soll. Wir gehen also jetzt von dem Bestehen der Gleichungen (5) und (7) aus, wobei als Parameterlinien die Asymptotenlinien der Fläche $\mathfrak{x}$ gewählt sein sollen. Daß $\mathfrak{x}$ eine *Minimalfläche* ist, folgt, wie bekannt, daraus, daß die Asymptotenlinien ein orthogonales Netz zum sphärischen Bild haben. Man erhält ferner aus der für den Sonderfall $\mathfrak{e} = \xi$ anzuwendenden Gleichung (3) für die Weingartenschen Ableitungsgleichungen die Gestalt

$$\xi_u = s\, \mathfrak{x}_v, \quad \xi_v = t\, \mathfrak{x}_u.$$

---

[3]) Siehe z. B. die Arbeit des Verf.: Zur relativen Differentialgeometrie. Japan. Journ. of Math. 4, S. 57—75.

Leitet man diese zweimal nach u bzw. v ab, so erhält man aus (7)

$$(\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{x}_{uuv}) = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{x}_{uvv}) = 0.$$

Setzt man schließlich hierin die Ableitungsgleichung der Affingeometrie für Asymptotenparameter ein,

$$\mathfrak{x}_{uv} = F\,\mathfrak{y},$$

so erhält man nach den Weingartengleichungen der Affingeometrie (l. c. [1]), S. 164 (c 6)), daß die mittlere Affinkrümmung verschwinden muß, $H = 0$. Die Fläche ist also auch eine Affinminimalfläche, w. z. b. w.

Zum Schluß weise ich noch einmal auf die in Nr. 1 bewiesene andere Kennzeichnung der betrachteten Flächen hin: *Eine Fläche ist dann und nur dann zugleich gewöhnliche und Affinminimalfläche, wenn ihren Asymptotenlinien die Krümmungslinien des Affinkrümmungsbildes entsprechen.*

(Eingegangen am 8. Januar 1937.)

Sopra un problema di Carleman [1]).

di

Basilio Manià (Pisa).

1. È noto che varie questioni di analisi (equazioni alle derivate parziali, serie divergenti, frazioni continue, problema dei momenti, serie lacunari, prolungamento analitico, ecc.) sono collegate allo studio di classi $C_{\{m_n\}}$ di funzioni definite nel modo seguente.

Data una successione di numeri positivi $\{m_n\}$, fissato un intervallo (a, b), si indica con $C_{\{m_n\}}$ la classe delle funzioni $f(x)$, definite sopra l'intervallo (a, b), e ivi indefinitamente derivabili, per ciascuna delle quali esiste una costante positiva k (dipendente dalla funzione che si considera) tale che

$$|f^{(n)}(x)| \leqq k^n m_n, \quad (a \leqq x \leqq b;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

In particolare la classe $C_{\{n!\}}$ coincide con la classe delle funzioni analitiche sopra l'intervallo (chiuso) (a, b).

Per le classi $C_{\{m_n\}}$ il Carleman [2]) ha posto il seguente problema: «Date due classi di funzioni quasi analitiche $C_{\{m_n\}}$, $C_{\{m'_n\}}$, quali relazioni devono intercedere fra i numeri m_n e i numeri m'_n affinchè le due classi siano identiche? In particolare quali condizioni (necessarie e sufficienti) si devono imporre ai numeri m_n affinchè dalle disuguaglianze

$$|f^{(n)}(x)| \leqq k^n m_n, \quad (a \leqq x \leqq b;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

segua l'analiticità di $f(x)$ sull'intervallo (a, b)?»

Il Mandelbrojt in due note dei *Comptes Rendus* [3]) e in un recente libro [4]) in cui ha apportato notevoli contributi alla teoria delle funzioni quasi analitiche, ha risolto completamente la seconda questione posta dal Carleman, cioè quella relativa alla analiticità delle funzioni di una classe $C_{\{m_n\}}$. Invece per il caso generale ha stabilito soltanto una condizione necessaria, indipendentemente dalla condizione che le classi $C_{\{m_n\}}$, $C_{\{m'_n\}}$ siano quasi

---

[1]) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2]) *Carleman. — Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926, p. 76.

[3]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, aprile 1935.

[4]) *Mandelbrojt. — Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*, Paris, 1935, pp. 91—100.

analitiche. Per ottenere questo risultato ha dimostrato una condizione necessaria relativa a un problema più generale, e cioè una condizione necessaria affinchè la classe $C_{\{m_n\}}$ sia tutta contenuta nella classe $C_{\{m'_n\}}$.

Io mi propongo di dimostrare una condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi $C_{\{m_n\}}$, $C_{\{m'_n\}}$ siano identiche in casi molto generali che comprendono il caso in cui una delle due classi sia quella delle funzioni analitiche. Anche qui considero e risolvo il problema, più generale di quello di Carleman, di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la classe $C_{\{m_n\}}$ sia tutta contenuta nella classe $C_{\{m'_n\}}$, e ciò indipendentemente dalla quasi analiticità delle due classi.

A questo scopo enuncio per le classi $C_{\{m_n\}}$ due condizioni che chiamo rispettivamente condizione (a) e condizione (b) e la cui generalità appare da alcune proposizioni nelle quali indico dei casi in cui le dette condizioni sono soddisfatte.

2. *La condizione* (a). — *Data una successione* $\{m_n\}$ *di numeri positivi, diremo che essa soddisfa la condizione* (a) *se, fissato comunque un intervallo* (a, b) *con* $-1 \leqq a < b \leqq 1$ *e considerata la classe* $C_{\{m_n\}}$ *delle funzioni* $f(x)$ *indefinitamente derivabili sopra l'intervallo* (a, b) *e per le quali*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq k^n m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

con k *costante dipendente da* $f(x)$, *tutte le funzioni*

$$F(\Theta) = f(\cos \Theta)$$

appartengono alla classe $C_{\{m_n\}}$ *relativa all'intervallo* $0 \leqq \arccos b \leqq \Theta \leqq \arccos a \leqq \pi$.

La condizione (a) ora enunciata, che è effettivamente una condizione come risulterà da un'osservazione che faremo nel seguito, è soddisfatta in casi molto generali, e noi ci proponiamo di dimostrare qui una condizione sufficiente assai semplice affinchè la (a) sia soddisfatta: condizione che verificheremo poi per alcune importanti classi $C_{\{m_n\}}$.

Se esiste una costante positiva h *per la quale sia*

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} \geqq h(n+1), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la successione m_n *soddisfa la condizione* (a).

Fissato l'intervallo (a, b) con $-1 \leqq a < b \leqq 1$, sia $f(x)$ una funzione indefinitamente derivabile sopra l'intervallo (a, b) appartenente alla classe $C_{\{m_n\}}$. È allora

$$|f^{(n)}(x)| \leqq k^n m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

con k costante positiva opportuna che possiamo supporre $> \frac{1}{h}$.

Indicato con n un numero intero positivo qualunque e posto

$$f^*(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k^\nu m_\nu}{\nu!} (x-1)^\nu,$$

si vede facilmente che è

$$\left| \frac{d^n f(\cos\Theta)}{d\Theta^n} \right| \leqq \left[\frac{d^n}{dt^n} f^*(e^t) \right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d^n}{dt^n} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k^\nu m_\nu}{\nu!} (e^t-1)^\nu \right]_{t=0} \leqq \frac{m_n}{n!} \left[\frac{d^n}{dt^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} k^\nu h^{\nu-n} (e^t-1)^\nu \right]_{t=0}$$

poichè

$$m_n = \frac{m_n}{m_{n-1}} \cdot \frac{m_{n-1}}{m_{n-2}} \cdots \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} m_\nu > h^{n-\nu} n \cdot (n-1) \cdots (\nu+1) m_\nu$$

$$> h^{n-\nu} (n-\nu)!\, m_\nu.$$

Ne segue

$$\left| \frac{d^n f(\cos\Theta)}{d\Theta^n} \right| \leqq \frac{m_n}{n!} \left[\frac{d^n}{dt^n} \left(k e^t - k + \frac{1}{h} \right)^n \right]_{t=0}$$

$$\leqq \frac{m_n}{n!} \left[\frac{d^n}{dt^n} (k^n e^{nt}) \right]_{t=0} < (ke)^n m_n,$$

e quindi l'asserto.

La condizione ora considerata è soddisfatta nel caso $m_n = n!$ delle funzioni analitiche, nel caso $m_n = (2n)!$ che si presenta nella teoria del calore (Holmgren), nel caso più generale $m_n = ((1+\varepsilon)n)!$ $(\varepsilon > 0)$ studiato dall' Hadamard e infine nei casi $\sqrt[n]{m_n} = n \log n$, $\sqrt[n]{m_n} = n \log n \log\log n$, ecc., studiati dal Denjoy.

3. *La condizione* (*b*). — *Data una successione di numeri positivi* $\{m_n\}$, *diremo che essa soddisfa la condizione* (*b*) *se, posto per* $r > 0$

$$T(r) = \max_{n \geqq 0} \frac{r^n}{m_n},$$

ad ogni numero $\alpha > 0$ *si possono far corrispondere tre numeri positivi* r_0, β *e* γ *tali che sia*

$$r^3 T(\beta r) < \gamma T(\alpha r)$$

per ogni $r > r_0$.

Questa condizione è soddisfatta in casi molto generali come ora dimostreremo.

Se è $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$ *e*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log T(r)}{(\log r)^2} > 0$$

la successione $\{m_n\}$ *soddisfa la condizione* (*b*).

Nelle ipotesi fatte la funzione $T(r)$ è finita, continua, crescente, tendente all' infinito per $r \to +\infty$, e indicato con $N(r)$ il massimo indice per il quale

$$T(r) = \frac{r^{N(r)}}{m_{N(r)}}$$

la funzione $N(r)$ è una funzione *a scala* non decrescente che assume soltanto valori interi non negativi, è continua a destra e tende all' infinito per $r \to +\infty$.

Si ha perciò

$$\log T(r) = N(r) \log r - \log m_{N(r)},$$

ed escludendo una infinità numerabile discreta di valori r,

$$\frac{d}{dr} \log T(r) = \frac{N(r)}{r},$$

donde segue

$$\log T(r) = \log T(r_1) + \int_{r_1}^{r} \frac{N(t)}{t}\, dt.$$

Poichè da un certo valore r_1 di r in poi è

$$\log T(r) > A (\log r)^2$$

con $A > 0$, e

$$N(r) > \frac{\log T(r)}{\log r},$$

a partire da r_1 è

$$N(r) > A \log r.$$

Se è ora $\alpha > \beta > 0$ e $\beta r > r_1$, si ha

$$\log T(\alpha r) = \log T(r_1) + \int_{r_1}^{\alpha r} \frac{N(t)}{t}\, dt,$$

$$\log T(\beta r) = \log T(r_1) + \int_{r_1}^{\beta r} \frac{N(t)}{t}\, dt,$$

donde segue

$$\log \frac{T(\alpha r)}{T(\beta r)} = \int_{\beta r}^{\alpha r} \frac{N(t)}{t}\, dt > A \log \beta r \log \frac{\alpha}{\beta}.$$

Posto $\beta = \alpha : e^{\frac{3}{A}}$, si ha

$$\log \frac{T(\alpha r)}{T(\beta r)} > 3 \log \beta r$$

e quindi

$$T(\alpha r) > \beta^3 r^3\, T(\beta r),$$

e la condizione (b) risulta soddisfatta con $\beta = \alpha : e^{\frac{3}{A}}$, $r_0 = r_1 : \beta$, $\gamma = \beta^{-3}$.

Un caso particolare della proposizione ora dimostrata è il seguente:

Se è $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$, *se la classe* $C_{\{m_n\}}$ *è quasi analitica e se per un valore positivo* $\mu < 1$ *esiste determinato il*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log T(r)}{r^{\mu}},$$

la successione $\{m_n\}$ *soddisfa la condizione* (*b*).

Infatti se la classe $C_{\{m_n\}}$ è quasi analitica l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr$$

diverge e quindi il

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log T(r)}{r^{\mu}}$$

è infinito. Ne segue

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log T(r)}{(\log r)^2} = \infty$$

e si può applicare la proposizione dimostrata sopra.

4. Possiamo dimostrare ora il teorema seguente.

Teorema. *Se* $\{m_n\}$ *ed* $\{m'_n\}$ *sono due successioni di numeri positivi di cui almeno una soddisfa la condizione* (*a*), *e se la successione* $\{m'_n\}$ *soddisfa la condizione* (*b*), *condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni funzione della classe* $C_{\{m_n\}}$ *appartenga alla classe* $C_{\{m'_n\}}$ *è che esista un numero positivo* α *tale che si ablia*

$$S(r) > T_1(\alpha r)$$

per $r > r_0$, *con* r_0 *conveniente e*

$$S(r) = \max_{0 \leqq n \leqq r} \frac{r^n}{m_n}, \quad T_1(r) = \max_{n \geqq 0} \frac{r^n}{m'_n}.$$

Dimostriamo da prima che la condizione dell'enunciato è necessaria. Per questo possiamo ammettere senza restrizione di generalità che le funzioni delle due classi $C_{\{m_n\}}$ e $C_{\{m'_n\}}$ siano date sopra l'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sopra questo intervallo consideriamo i polinomi

$$P_n(x) = \tfrac{1}{2}\{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Si verifica facilmente che è

$$P_n(\cos\Theta) = \cos n\Theta$$

e si può dimostrare[5]) che nel detto intervallo, per $p \leqq n$, è

$$|P_n^{(p)}(x)| \leqq h\, k^p\, n^{p+1}$$

con h e k costanti indipendenti da n e da p.

---

[5]) Vedi *Mandelbrojt*, loc. cit.

Allora la funzione

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{3n}(x)}{n^3 S(3n)}$$

è indefinitamente derivabile sopra l'intervallo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e si ha

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leqq \sum_{n \geqq \frac{p}{3}}^{\infty} \frac{|P_{3n}^{(p)}(x)|}{n^3 S(3n)} \leqq \sum_{n \geqq \frac{p}{3}}^{\infty} \frac{h\, k^p (3n)^{p+1}}{n^3 (3n)^p} m_p$$

$$\leqq 3 h k^p m_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq \bar{k}^p m_p,$$

e quindi $\varphi(x)$ appartiene alla classe $C_{\{m_n\}}$ e perciò anche alla classe $C_{\{m'_n\}}$ che per ipotesi contiene la $C_{\{m'_n\}}$. Ma una almeno delle due successioni $\{m_n\}$, $\{m'_n\}$ soddisfa la condizione (a) e quindi la funzione

$$\varphi(\cos\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{3n}(\cos\Theta)}{n^3 S(3n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n\Theta}{n^3 S(3n)}$$

definita sopra l'intervallo $\frac{\pi}{3} \leqq \Theta \leqq \frac{2\pi}{3}$, appartiene alla classe $C_{\{m'_n\}}$, e perciò la funzione

$$F(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\psi}{n^3 S(3n)}$$

definita sopra l'intervallo $(\pi, 2\pi)$ appartiene pure alla classe $C_{\{m'_n\}}$ e la stessa cosa si può affermare per la $F(\psi)$ considerata su tutto l'asse reale.

Ora se una funzione periodica di periodo 2π

$$f(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

appartiene alla classe $C_{\{m'_n\}}$, esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \leqq \frac{2}{T_1(\lambda n)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

e quindi dal fatto che $F(\psi)$ appartiene alla classe $C_{\{m'_n\}}$ segue

$$2 n^3 S(3n) > T_1(\lambda n).$$

Poichè $S(r)$ è una funzione non decrescente di r, indicato con $[r]$ il massimo intero non maggiore di r, si ha, per r sufficientemente grande,

$$r^3 S(r) > 2\left[\frac{r}{3}\right]^3 S\left(3\left[\frac{r}{3}\right]\right) \geqq T_1\left(\lambda\left[\frac{r}{3}\right]\right) > T_1\left(\frac{\lambda}{6} r\right).$$

Allora dalla condizione (b) ammessa per la successione $\{m'_n\}$ segue che esistono due costanti positive α e c tali che per r sufficientemente grande sia

$$T_1\left(\frac{\lambda}{6} r\right) > c r^3 T_1(\alpha r),$$

e quindi

$$S(r) > c\, T_1(\alpha r).$$

Se è $c > 1$, si ha subito

$$S(r) > T_1(\alpha r);$$

se è $c < 1$, osserviamo che è per r sufficientemente grande

$$c\, T_1(\alpha r) > T_1(c\,\alpha r),$$

e quindi

$$S(r) > T_1(c\,\alpha r).$$

In tutti i casi risulta dimostrato che la condizione sopra enunciata è necessaria.

Passiamo a dimostrare che la condizione enunciata è sufficiente affinchè $C_{\{m_n\}}$ sia contenuta in $C_{\{m'_n\}}$, supponendo che tanto le funzioni di $C_{\{m_n\}}$ che quelle di $C_{\{m'_n\}}$ siano definite sopra l'intervallo $(-1, 1)$.

Se $f(x)$ è una funzione della classe $C_{\{m_n\}}$, essa è indefinitamente derivabile sull'intervallo $(-1, 1)$, allora $f(\cos\Theta)$ è una funzione periodica di periodo 2π, pari, e indefinitamente derivabile su tutto l'asse reale, e quindi data ovunque dalla sua serie di Fourier

$$f(\cos\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\Theta).$$

Ritornando alla variabile x si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$$

Dalle formule di Eulero e Fourier si ottiene poi con una integrazione per parti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\Theta)\cos n\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\left\{\int_0^{2\pi} f'(\cos\Theta)\,\mathrm{sen}\,(n+1)\Theta\, d\Theta - \int_0^{2\pi} f'(\cos\Theta)\,\mathrm{sen}\,(n-1)\Theta\, d\Theta\right\}.$$

Gli integrali dentro alla parentesi sono dello stesso tipo di quello che dà a_n e si può eseguire anche su di essi una integrazione per parti. Se p è un intero positivo non maggiore di n ed eseguiamo p volte l'operazione ora indicata, otteniamo a_n espresso come somma di 2^p integrali della forma

$$\int_0^{2\pi} f^{(p)}(\cos\Theta)\,\mathrm{sen}\, m\Theta\, d\Theta \quad \text{o} \quad \int_0^{2\pi} f^{(p)}(\cos\Theta)\cos m\Theta\, d\Theta,$$

con dei coefficienti che non superano

$$\frac{1}{2^p \pi n(n-1)\ldots(n-p+1)}.$$

Di qua e dall' essere

$$|f^{(p)}(x)| \leqq l^p m_p$$

con l costante segue

$$|a_n| \leqq \frac{2\, l^p\, m_p}{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)} = 2\, l^p \frac{n^p}{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)} \frac{m_p}{n^p}.$$

Ma per $n \geqq p > k$ è

$$\frac{n}{n-k} \leqq \frac{p}{p-k}$$

e quindi

$$\frac{n^p}{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)} \leqq \frac{p^p}{p!} < e^p.$$

È dunque

$$|a_n| \leqq 2\,(e\,l)^p \frac{m_p}{n^p} < (e\,l)^p \frac{m_p}{n^p}.$$

Di qua, per il fatto che p è un qualunque numero positivo non maggiore di n e dalla definizione di $S(r)$ segue

$$|a_n| < \frac{1}{S\left(\frac{n}{2\,e\,l}\right)} = \frac{1}{S(\varrho\, n)}$$ [6]

con $\varrho = \frac{1}{2\,e\,l}$.

Possiamo dimostrare ora che la funzione $f(x)$ appartiene alla classe $C_{\{m_n'\}}$. Infatti è

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n \geqq p}^{\infty} a_n\, P_n^{(p)}(x)$$

e quindi, per le limitazioni ricordate di $|P_n^{(p)}(x)|$,

$$|f^{(p)}(x)| \leqq \sum_{n \geqq p}^{\infty} |a_n|\, h\, k^p\, n^{p+1} \leqq h\, k^p \sum_{n \geqq p}^{\infty} \frac{n^{p+1}}{S(\varrho\, n)}.$$

Poichè per $r > r_0$ è $S(r) > T_1(\alpha\, r)$, se p è sufficientemente grande e $n \geqq p$ si ha $S(\varrho\, n) \geqq T_1(\alpha\, \varrho\, n) > n^3\, T_1(\beta\, n)$ con β determinata in base alla condizione (b). Ne viene

$$|f^{(p)}(x)| \leqq h\, k^p \sum_{n \geqq p}^{\infty} \frac{n^{p+1}}{n^3\, T_1(\beta\, n)} \leqq h \left(\frac{k}{\beta}\right)^p m_p' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \bar{k}^p\, m_p'$$

con $\bar{k}$ costante positiva sufficientemente grande. È così provato che $f(x)$ appartiene a $C_{\{m_n'\}}$ e il teorema è dimostrato.

---

[6]) Abbiamo supposto, come è lecito, $2\,e\,l > 1$.

5. Al numero 3. abbiamo indicato dei casi nei quali è soddisfatta la condizione (b), ed abbiamo supposto ivi che fosse $\sqrt[n]{m_n} \to \infty$. È perciò opportuno fare alcune osservazioni relative al caso in cui

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m_n} < \infty.$$

Se è

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m_n} < \infty,$$

la successione $\{m_n\}$ *non soddisfa la condizione* (a), *cioè esistono delle funzioni* $\varphi(x)$ *appartenenti alla classe* $C_{\{m_n\}}$ *e tali che* $\varphi(\cos\Theta)$ *non appartenga alla classe* $C_{\{m_n\}}$.

Infatti se è

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m_n} < \infty,$$

da un certo valore di r in poi è sempre

$$T(r) = \max_{n \geqq 0} \frac{r^n}{m_n} = \infty,$$

mentre

$$S(r) = \max_{0 \leqq n \leqq r} \frac{r^n}{m_n}$$

è in ogni caso una funzione finita per r finito e limitata per r limitata.

Ora se la successione $\{m_n\}$ soddisfacesse la condizione (a), la funzione

$$F(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\psi}{n^3 S(3n)}$$

definita per tutti i valori di ψ apparterrebbe alla classe $C_{\{m_n\}}$, per il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema precedente. Ma per ogni funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

appartenente alla classe $C_{\{m_n\}}$ si ha

$$\begin{matrix} |a_n| \\ |b_n| \end{matrix} \leqq \frac{2}{T(\lambda n)}$$

con λ costante positiva, e quindi i coefficienti a_n, b_n da un certo indice n in poi sono tutti nulli, e invece ciò non è vero per i coefficienti di Fourier della funzione $F(\psi)$.

Una conseguenza immediata del ragionamento ora fatto è la proposizione seguente.

Se la successione $\{m_n\}$ *soddisfa la condizione* (*a*) *e se è*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{m'_n} < \infty$$

la classe $C_{\{m_n\}}$ *non può essere contenuta nella classe* $C_{\{m'_n\}}$.

6. Dal teorema dimostrato sopra segue subito una condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi $C_{\{m_n\}}$, $C_{\{m'_n\}}$ coincidano.

Se una almeno delle due successioni $\{m_n\}$, $\{m'_n\}$ *di numeri positivi soddisfa la condizione* (*a*), *e se entrambe soddisfano la condizione* (*b*), *condizione necessaria e sufficiente affinchè le due classi* $C_{\{m_n\}}$, $C_{\{m'_n\}}$ *coincidano è che esistano due costanti positive* α *e* β *tali che*

$$S(r) \geqq T_1(\alpha r),$$
$$S_1(r) \geqq T(\beta r),$$

per $r > r_0$, *con*

$$T(r) = \max_{n \geqq 0} \frac{r^n}{m_n}, \qquad T_1(r) = \max_{n \geqq 0} \frac{r^n}{m'_n},$$

$$S(r) = \max_{0 \leqq n \leqq r} \frac{r^n}{m_n}, \qquad S_1(r) = \max_{0 \leqq n \leqq r} \frac{r^n}{m'_n}.$$

(Eingegangen am 21. Januar 1937.)

Integralgeometrie 24.

Über die Schiebungen im Raum.

Von

L. Berwald und O. Varga in Prag.

Die vorliegenden Untersuchungen über Integralgeometrie beschäftigen sich mit der Gruppe der Schiebungen im dreidimensionalen euklidischen Raum. Wir verwenden dabei eine Methode, deren sich Herr W. Blaschke für die Bewegungsgruppe bedient hat[1]), und die über die „Grundformel" für zwei Flächen zu den wichtigsten übrigen Integralformeln, insbesondere zur „Hauptformel" führt.

Im einzelnen behandeln wir nach einigen Vorbereitungen verschiedener Art (§ 1) in § 2 die Geraden- und Ebenenmaße von Kurven und Flächen. § 3 bringt Integralformeln, die sich auf Kurve und Fläche, sowie auf zwei Flächen beziehen. In § 4 werden zwei räumliche Gebiete und in § 5 drei Gebilde betrachtet. Dabei treten (in § 4) gewisse Verallgemeinerungen der gemischten Rauminhalte zweier Eikörper und Integralformeln für sie auf, die an und für sich von Interesse sind.

Unsere Entwicklungen laufen zum Teil mit den entsprechenden für Komplexe in der Abhandlung des Herrn W. Blaschke über Schiebungen[2]) parallel. Sie sind jedoch mit Ausnahme der Schlußbemerkung in Nr. 17 und von Nr. 20 ganz unabhängig von ihr entstanden. Wir möchten bei dieser Gelegenheit Herrn Blaschke, der uns einen Durchschlag und Fahnen seiner Arbeit zur Verfügung gestellt hat, unseren besten Dank für seine Freundlichkeit aussprechen.

§ 1.

Einleitung.

1. Voraussetzungen. Wir betrachten im folgenden räumliche Gebiete, Flächen und Kurven im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathfrak{E}_3$. Von einem Gebiete $\mathfrak{G}$ setzen wir voraus, daß es beschränkt und schlicht

---

[1]) W. Blaschke, Integralgeometrie 17. Über Kinematik. Bulletin de la Société Mathématique de Grèce 17^2 (1936) (wird „J. 17" zitiert).

[2]) W. Blaschke, Integralgeometrie 21. Über Schiebungen. Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 1—12 (zitiert: J. 21). Wir haben uns in den Bezeichnungen möglichst an diese Arbeit angeschlossen.

ist und daß sein Rand von endlich vielen stetig gekrümmten geschlossenen Flächen ohne mehrfache Punkte gebildet wird. Die betrachteten Flächen $\mathfrak{F}$ sollen beschränkt, zweiseitig und stetig gekrümmt sein und keine mehrfachen Punkte besitzen. Sie können geschlossen oder offen sein. Im zweiten Fall sollen sie von einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter geschlossener Kurven ohne mehrfache Punkte berandet sein. Die Kurven $\mathfrak{C}$, die wir betrachten, setzen wir als beschränkt, stetig gekrümmt und ohne mehrfache Punkte voraus.

Außer diesen Gebilden und ihren Durchschnitten treten im folgenden noch gewisse Zahlen auf, wie die Schnittpunktszahl einer Kurve mit einer parallel verschiebbaren Ebene, die Gesamtkrümmung c^E des Schnittes einer Fläche mit einer solchen Ebene, u. ä. Wir setzen — soweit das nicht schon aus den bisherigen Voraussetzungen folgt — stets voraus, daß für alle zugelassenen Lagen der betrachteten Gebilde diese Zahlen beschränkt sind, d. h. eine feste Zahl nicht übertreffen.

Die auftretenden Winkel sind in der Regel im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ zu nehmen, mit Einschluß von π und Ausschluß von $-\pi$. Ausnahmen werden nur dort ausdrücklich hervorgehoben, wo sie nicht aus dem Zusammenhang von selbst klar sind.

2. Die Schiebungsdichten. Wir legen im folgenden die *Gruppe der Schiebungen* des $\mathfrak{E}_3$ zugrunde. Die Schiebungen vertauschen die Punkte des $\mathfrak{E}_3$ transitiv, die Geraden und Ebenen intransitiv. Eine Gerade kann durch Schiebung nur in eine beliebige Gerade desselben Parallelbündels, eine Ebene nur in eine beliebige Ebene desselben Parallelebenenbüschels übergeführt werden. Dementsprechend ist bei den Schiebungen die Dichte $d\overline{E}$ einer gerichteten Ebene E das euklidische Bogenelement auf einer gerichteten Normale, die Dichte $d\overline{G}$ einer gerichteten Geraden G das euklidische Flächenelement einer gerichteten Ebene, deren Normale sie ist, die Dichte $d\overline{P}$ eines Punktes das Raumelement des $\mathfrak{E}_3$. Als Schiebungsdichte $d\overline{\mathfrak{C}}$ einer krummen Linie $\mathfrak{C}$ wählen wir die Dichte eines mit $\mathfrak{C}$ starr verbundenen Punktes. Entsprechend ist die Schiebungsdichte $d\overline{\mathfrak{F}}$ einer Fläche $\mathfrak{F}$ und die Schiebungsdichte $d\overline{\mathfrak{G}}$ eines räumlichen Gebietes $\mathfrak{G}$ definiert. Ist G die gerichtete Normale der gerichteten Ebene E, so gilt

$$d\overline{P} = d\overline{G} \cdot d\overline{E}. \tag{2.1}$$

Hier und weiterhin sind Produkte Pfaffscher Formen stets alternierend zu verstehen.

Im folgenden kommen nur die *Absolutbeträge* dieser Dichten in Betracht, so daß die Ausrichtung der Geraden G bzw. Ebene E ohne Belang

ist und daher von der Schiebungsdichte der Geraden bzw. Ebene schlechthin gesprochen werden kann. Wir schreiben anstatt $|d\overline{E}|$, $|d\overline{G}|$ wieder $d\overline{E}$, $d\overline{G}$. Entsprechendes gilt weiterhin auch für andere Dichten.

Wir bezeichnen Schiebungsdichten stets durch Überstreichen, während Dichten gegenüber Bewegungen durch dE, dG, dP, $d\mathfrak{C}$, $d\mathfrak{F}$, $d\mathfrak{G}$ bezeichnet werden. Es ist

$$dP = d\overline{P}, \tag{2.2}$$

$$dG = d\overline{G} \cdot d\Omega, \tag{2.3}$$

$$dE = d\overline{E} \cdot d\Omega. \tag{2.4}$$

Darin bezeichnet $d\Omega$ die Dichte des sphärischen Bildes der Geraden bzw. der Normalen der Ebene, also das Flächenelement der Einheitskugel im entsprechenden Punkte. Die Bewegungs- oder kinematische Dichte $d\mathfrak{C}$ einer Kurve $\mathfrak{C}$ ist

$$d\mathfrak{C} = d\overline{\mathfrak{C}} \cdot d\Omega \cdot d\varphi. \tag{2.5}$$

Hier ist $d\overline{\mathfrak{C}}$ die Dichte eines mit $\mathfrak{C}$ starr verbundenen Punktes, $d\Omega$ die Dichte einer Achse durch diesen Punkt, $d\varphi$ die Dichte einer Drehung um diese Achse. Ebenso hängen die kinematischen Dichten $d\mathfrak{F}$, $d\mathfrak{G}$ einer Fläche bzw. eines Gebietes mit den Schiebungsdichten $d\overline{\mathfrak{F}}$, $d\overline{\mathfrak{G}}$ zusammen.

Mittels (2.3) bis (2.5) kann man von Integralformeln für die Schiebungsgruppe zu den entsprechenden Integralformeln für die Bewegungsgruppe übergehen. Man erhält dann bekannte Formeln, die zum größten Teil von den Herrn L. A. Santaló[3]) und W. Blaschke[4]) herrühren. Wir werden diesen Übergang, der keine Schwierigkeiten bietet, nur ausnahmsweise durchführen.

Wie es in der Integralgeometrie üblich ist, schreiben wir auch für mehrfache Integrale nur *ein* Integralzeichen.

3. Ein Integrationsverfahren von W. Maak[5]). Es sei etwa $\mathfrak{G}_1$ ein festes Gebiet vom Rauminhalt V_1 und $\mathfrak{F}_2$ eine parallel verschiebbare Fläche. Wir denken $\mathfrak{F}_2$ mit Masse von der (nicht notwendig positiven) Dichte dH belegt und das Integral

$$J = \int dH\, d\overline{\mathfrak{F}}_2 \tag{3.1}$$

---

[3]) L. A. Santaló, Integralgeometrie 5. Über das kinematische Maß im Raum. Actualités scientifiques et industrielles 357, Paris 1936 (zitiert: J. 5).

[4]) W. Blaschke, J. 17.

[5]) Vgl. z. B. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, erstes Heft, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1936, bes. S. 38 f. (zitiert: Vorlesungen).

berechnet, wobei die Integration nur über den Durchschnitt $\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}_2$ zu erstrecken ist, während $\mathfrak{F}_2$ alle parallelen Lagen durchläuft. Integrieren wir zunächst nach H, so ergibt sich

$$J = \int H_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2, \tag{3.2}$$

wenn H_{12} die Gesamtmasse von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}_2$ ist. Da es nur auf die gegenseitigen Lagen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ ankommt, so können wir anstatt (3.1) auch schreiben

$$J = \int d\,H\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_1, \tag{3.3}$$

wobei $\mathfrak{F}_2$ fest, $\mathfrak{G}_1$ parallel verschoben gedacht wird und die Integration über $\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}_2$ zu erstrecken ist. Integrieren wir jetzt zuerst nach $\mathfrak{G}_1$ über alle parallelen Lagen, die einen Massenpunkt von $\mathfrak{F}_2$ enthalten, so finden wir

$$\int d\,\overline{\mathfrak{G}}_1 = V_1 \tag{3.4}$$

und daher

$$J = V_1 H_2, \tag{3.5}$$

wenn H_2 die Gesamtmasse von $\mathfrak{F}_2$ ist. Es ist also

$$\int H_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2 = V_1 H_2 \tag{3.6}$$

und ebenso

$$\int H_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_1 = V_1 H_2. \tag{3.7}$$

Entsprechendes gilt, wenn im vorstehenden die Fläche $\mathfrak{F}_2$ durch eine Kurve $\mathfrak{C}_2$ oder ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ ersetzt wird.

4. Die Hauptformel für die Schiebungen in der Ebene[6]). Es seien in einer Ebene E $\mathfrak{G}_\lambda^E (\lambda = 1, 2)$ zwei beschränkte Gebiete, die von endlich vielen stetig gekrümmten geschlossenen Kurven ohne mehrfache Punkte berandet sind. C_λ^E sei die Gesamtkrümmung des Randes $\mathfrak{C}_\lambda^E$ von $\mathfrak{G}_\lambda^E$, c^E die des Randes des Durchschnittes $\mathfrak{G}_1^E\mathfrak{G}_2^E$, ferner

$$Z_\lambda^E = \frac{1}{2\pi} C_\lambda^E, \quad z^E = \frac{1}{2\pi} c^E \tag{4.1}$$

die entsprechenden Zusammenhangszahlen. Endlich sei $\psi\,(|\psi| \leqq \pi)$ der Schnittwinkel $\mathfrak{C}_1^E\mathfrak{C}_2^E$, F_λ der Flächeninhalt von $\mathfrak{G}_\lambda^E$.

Die Gesamtkrümmung c^E setzt sich aus den Gesamtkrümmungen C_{12}^E, C_{21}^E der Durchschnitte $\mathfrak{C}_1^E\mathfrak{G}_2^E$, $\mathfrak{C}_2^E\mathfrak{G}_1^E$ und aus dem Beitrage der Ecken $\mathfrak{C}_1^E\mathfrak{C}_2^E$ gemäß

$$c^E = C_{12}^E + C_{21}^E + \Sigma|\psi| \tag{4.2}$$

[6]) Für Komplexe vgl. W. Blaschke, J. 21, § 1.

zusammen. ψ ist darin der Schnittwinkel $\mathfrak{C}_1^E \mathfrak{C}_2^E$ und die Summe erstreckt sich über alle Schnittpunkte $\mathfrak{C}_1^E \mathfrak{C}_2^E$. Denken wir $\mathfrak{G}_2^E$ parallel verschoben, $\mathfrak{G}_1^E$ fest, so ist also

$$(4.3) \qquad \int c^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E = \int C_{12}^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E + \int C_{21}^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E + \int \Sigma \, |\psi| \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E.$$

$d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E$ ist dabei die Dichte eines mit $\mathfrak{G}_2^E$ starr verbundenen Punktes in der Ebene E, also das euklidische Flächenelement von E. Die Summe im letzten Integral ist für alle parallelen Lagen von $\mathfrak{C}_2^E$ über alle Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}_1^E$ zu erstrecken. Für die beiden ersten Integrale findet man durch sinngemäße Anwendung des Verfahrens von Maak (Nr. 3)

$$(4.4) \qquad \int C_{12}^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E = C_1^E F_2, \quad \int C_{21}^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E = C_2^E F_1.$$

In den Schnittpunkten $\mathfrak{C}_1^E \mathfrak{C}_2^E$ ist das Flächenelement, wenn man die Bogen s_λ auf $\mathfrak{C}_\lambda^E$ einführt:

$$(4.5) \qquad d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E = |\sin\psi| \, d\,s_1 \, d\,s_2.$$

Somit ergibt sich wegen (4.1) schließlich die *Hauptformel für zwei Gebiete in der Ebene*[7]):

$$(4.6) \qquad \boxed{\int z^E \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2^E = Z_2^E F_1 + 2\,H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) + Z_1^E F_2},$$

wo

$$(4.7) \qquad H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) = \frac{1}{4\pi} \int \psi \sin\psi \, d\,s_1 \, d\,s_2$$

ist.

Wenn $\mathfrak{G}_\lambda^E$ Eigebiete sind, so ist in (4.6) $z^E = Z_\lambda^E = 1$. Andererseits ist nach Minkowski[8])

$$(4.8) \qquad \int d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = F_1 + 2\,F(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*}) + F_2,$$

wo $\mathfrak{G}_2^{E*}$ das Spiegelbild von $\mathfrak{G}_2^E$ an einem Punkte von E ist und $F(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*})$ der *gemischte Flächeninhalt* von $\mathfrak{G}_1^E$ und $\mathfrak{G}_2^{E*}$. Für Eigebiete $\mathfrak{G}_\lambda^E$ ist also

$$(4.9) \qquad H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) = F(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*}).$$

Im Falle *beliebiger Gebiete* ist nach (4.7)

$$(4.10) \qquad H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*}) = \frac{1}{4\pi} \int (\pi - |\psi|) |\sin\psi| \, d\,s_1 \, d\,s_2,$$

so daß

$$(4.11) \qquad H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) + H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*}) = \tfrac{1}{4} \int |\sin\psi| \, d\,s_1 \, d\,s_2$$

---

[7]) Der Name „Hauptformel" rührt von Herrn W. Blaschke her.

[8]) H. Minkowski, Volumen und Oberfläche. Math. Annalen 57 (1903), S. 447—495 = Gesammelte Abhandlungen II. (1911), S. 230—276.

ist. Vermöge (4. 9) kann man den Begriff des gemischten Flächeninhaltes auch auf nicht konvexe Bereiche übertragen.

Wenn insbesondere $\mathfrak{G}_2^E = r\,\mathfrak{K}^E$ *eine Kreisscheibe* vom Halbmesser r ist, $\mathfrak{G}_1^E$ *beliebig* und L_1 die Länge von $\mathfrak{C}_1^E$, so ist

$$H(\mathfrak{G}_1^E, r\,\mathfrak{K}^E) = H(\mathfrak{G}_1^E, r\,\mathfrak{K}^{E*}) = \tfrac{1}{2} r L_1. \tag{4. 12}$$

§ 2.

Schiebungsmaße von Kurven, Flächen und räumlichen Gebieten.

5. Ebenenmaß einer Kurve. Es sei $\mathfrak{C}$ eine feste Kurve, E eine parallel verschiebbare Ebene, ferner n die Anzahl der Schnittpunkte $E\mathfrak{C}$, s der Bogen der (irgendwie gerichteten) Kurve $\mathfrak{C}$, endlich ω der Winkel von $\mathfrak{C}$ mit der positiven Normalen der gleichfalls in bestimmter Weise gerichteten Ebene E. Dann ist

$$d\bar{E} = |\cos\omega|\,ds \tag{5. 1}$$

und daher, da jede Lage von E so oft gezählt wird, wie die Anzahl n der Schnittpunkte $E\mathfrak{C}$ angibt

$$\boxed{\int n\,d\bar{E} = \int |\cos\omega|\,ds}, \tag{5. 2}$$

wobei die Integration über alle parallelen Lagen von E zu erstrecken ist. Die geometrische Bedeutung von (5. 2) ist diese: $\mathfrak{C}$ zerfällt in eine endliche Anzahl von Teilbogen, auf denen $\cos\omega > 0$ bzw. < 0 ist. $\int|\cos\omega|\,ds$ ist für jeden Teilbogen die absolut genommene Länge seines Normalrisses auf eine Normale der Ebene E. Das Integral rechts in (5. 2) ist die Summe dieser Längen.

Ist $\mathfrak{C}$ *eine Eilinie* in einer Ebene senkrecht zu E und β die Breite von $\mathfrak{C}$ in Richtung der Normalen von E, so vereinfacht sich (5. 2) zu

$$\beta = \tfrac{1}{2}\int |\cos\omega|\,ds. \tag{5. 3}$$

Ersetzt man (*bei beliebigem* $\mathfrak{C}$) in (5. 2) $d\bar{E}$ nach (2. 4) durch dE und integriert über die halbe Oberfläche der Einheitskugel, so ergibt sich wegen

$$\int |\cos\omega|\,d\Omega = \pi \tag{5. 4}$$

die bekannte Formel

$$\int n\,dE = \pi L, \tag{5. 5}$$

wo L die Länge von $\mathfrak{C}$ ist.

6. Geradenmaß einer Fläche. Es sei $\mathfrak{F}$ eine feste Fläche, G eine parallel verschiebbare Gerade, ferner n die Anzahl der Schnittpunkte $G\mathfrak{F}$, dO das Oberflächenelement der in bestimmter Weise gerichteten

Fläche $\mathfrak{F}$[9]), endlich ω der Winkel der positiven Richtung der irgendwie gerichteten Geraden G mit der positiven Normalen von $\mathfrak{F}$. Dann ist

$$d\bar{G} = |\cos\omega| dO \tag{6.1}$$

und daher

$$\boxed{\int n d\bar{G} = \int |\cos\omega| dO}, \tag{6.2}$$

wobei die Integration über alle parallelen Lagen von G zu erstrecken ist. Die geometrische Bedeutung von (6.2) ist diese: $\mathfrak{F}$ zerfällt in eine endliche Anzahl von Teilflächenstücken, auf denen $\cos\omega > 0$ bzw. < 0 ist. Für jedes Teilflächenstück ist $\int |\cos\omega| dO$ der absolut genommene Flächeninhalt seines Normalrisses auf eine zu G senkrechte Ebene. Das Integral rechts in (6.2) ist die Summe dieser Flächeninhalte.

Ist $\mathfrak{F}$ *eine Eifläche und* F^E der Flächeninhalt ihres Normalrisses auf eine zu G senkrechte Ebene, so vereinfacht sich (6.2) zu

$$F^E = \tfrac{1}{2}\int |\cos\omega| dO. \tag{6.3}$$

Ersetzt man (*bei beliebigem* $\mathfrak{F}$) in (6.2) $d\bar{G}$ nach (2.3) durch dG und integriert über die halbe Oberfläche der Einheitskugel, so ergibt sich die bekannte Formel

$$\int n dG = \pi O, \tag{6.4}$$

wo O die Oberfläche von $\mathfrak{F}$ ist.

7. Eine Hilfsformel. Es sei wieder $\mathfrak{F}$ eine feste Fläche, ferner E eine parallel verschiebbare Ebene, $\mathfrak{C}^E$ die Schnittlinie $\mathfrak{F}E$, ds das Bogenelement, L die Länge von $\mathfrak{C}^E$, dO das Flächenelement von $\mathfrak{F}$, σ der Winkel der positiven Normalen von $\mathfrak{F}$ und E, die wir irgendwie gerichtet denken. Endlich sei ds_1 das Bogenelement der orthogonalen Trajektorie der Kurven $\mathfrak{C}^E$ auf $\mathfrak{F}$ im betrachteten Punkte. Dann ist

$$ds d\bar{E} = ds ds_1 |\sin\sigma| = |\sin\sigma| dO \tag{7.1}$$

und daher

$$\boxed{\int L d\bar{E} = \int |\sin\sigma| dO}. \tag{7.2}$$

Ist $\mathfrak{F}$ *eine Eifläche.* also $\mathfrak{C}^E$ eine Eilinie, so gilt

$$L = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \beta(\varphi) d\varphi, \tag{7.3}$$

wenn $\beta(\varphi)$ die Breite von $\mathfrak{C}^E$ in der Richtung φ ist. Andererseits ist

$$\int \beta(\varphi) d\bar{E} = F^{E(\varphi)} \tag{7.4}$$

---

[9]) Wenn $\mathfrak{F}$ die Berandung eines Gebietes $\mathfrak{G}$ ist, soll im folgenden die positive Normale die *nach außen gerichtete Normale* sein.

der Flächeninhalt des Normalrisses von $\mathfrak{F}$ auf eine zu E senkrechte Ebene $E(\varphi)$, deren Schnittgerade mit E die Richtung φ hat. Somit gilt für eine Eifläche:

$$\int L\,d\bar{E} = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} F^{E(\varphi)}\,d\varphi = \int |\sin\sigma|\,dO. \tag{7.5}$$

Für die *Einheitskugel* $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}$ erhält man insbesondere aus (7.5)

$$\int L\,d\bar{E} = \pi^2. \tag{7.6}$$

Durch Übergang zu einer äußeren Parallelfläche ergibt sich aus (7.5) leicht eine entsprechende Formel für den Umfang $L^{E(\varphi)}$ der Normalrisse einer *Eifläche* $\mathfrak{F}$:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} L^{E(\varphi)}\,d\varphi = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)|\sin\sigma|\,dO. \tag{7.7}$$

Hier sind R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{F}$[10]).

8. Ebenenmaß einer Fläche. Es sei $\mathfrak{F}$ eine feste Fläche, E eine parallel verschiebbare Ebene, $\mathfrak{C}^E$ die Schnittkurve $\mathfrak{F}E$, c^E ihre Gesamtkrümmung in E. Als *Ebenenmaß B der Fläche* $\mathfrak{F}$ definieren wir den Ausdruck $\frac{1}{2\pi}\int c^E\,d\bar{E}$, wo das Integral über alle parallelen Lagen von E erstreckt wird, für die der Durchschnitt $E\mathfrak{F}$ nicht leer ist.

B läßt sich in ein Integral über die Oberfläche O von $\mathfrak{F}$ umformen. Wir denken dazu $\mathfrak{F}$, E, $\mathfrak{C}^E$ in bestimmter Weise gerichtet. $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{t}$ seien bzw. die Einheitsvektoren der Normalen von $\mathfrak{F}$, E und der Tangente von $\mathfrak{C}^E$. Der Winkel σ von $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ ist dann für $\sigma \neq 0, \pi$ durch[11])

$$\mathfrak{t}\sin\sigma = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2,\quad \cos\sigma = \mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2 \tag{8.1}$$

eindeutig erklärt. Ferner sei τ der Winkel von $\mathfrak{t}$ mit einer festen Richtung in E, s der Bogen, $k = \frac{d\tau}{ds}$ die Krümmung von $\mathfrak{C}^E$, endlich s_1 der Bogen auf einem System orthogonaler Trajektorien von $\mathfrak{C}^E$ auf $\mathfrak{F}$. Dann gilt:

$$d\tau\,d\bar{E} = k\,ds\,ds_1\sin\sigma = k\sin\sigma\,dO = \mathcal{N}\,dO, \tag{8.2}$$

wenn $\mathcal{N}$ die Normalkrümmung von $\mathfrak{C}^E$ auf $\mathfrak{F}$ ist. Wegen $\int d\tau = c^E$ ergibt sich durch Integration

$$\boxed{B = \frac{1}{2\pi}\int c^E\,d\bar{E} = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}\,dO}. \tag{8.3}$$

---

[10]) Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 148f.

[11]) Wir schreiben $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ für das innere, $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ für das äußere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ für die Determinante dreier Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ der Rand eines räumlichen Gebietes ist und

$$z^E = \frac{1}{2\pi} c^E \tag{8.4}$$

die Zusammenhangszahl des von $\mathfrak{C}^E$ auf E berandeten Gebietes, so ist

$$B = \int z^E d\overline{E}. \tag{8.5}$$

Für eine *Eifläche* $\mathfrak{F}$ ist B die *Breite* von $\mathfrak{F}$ in der Normalenrichtung der Ebene E.

Durch Integration über alle Ebenenstellungen folgt aus (8.3)

$$\frac{1}{2\pi} \int c^E dE = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dO = M, \tag{8.6}$$

wo R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien von $\mathfrak{F}$ sind[12]).

9. Die Maße für ein räumliches Gebiet. Das Punktmaß eines räumlichen Gebietes $\mathfrak{G}$ ist sein Rauminhalt V. Als Geraden- bzw. Ebenenmaß von $\mathfrak{G}$ definieren wir das Geraden- bzw. Ebenenmaß seiner Berandung $\mathfrak{F}$.

§ 3.

Fläche und Kurve. Zwei Flächen. Die Grundformel.

10. Fläche und Kurve. Es sei $\mathfrak{C}$ eine feste Kurve, $\mathfrak{F}$ eine parallel verschiebbare Fläche. In einem festen rechtwinkligen Koordinatensystem seien z_i $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten eines mit $\mathfrak{F}$ starr verbundenen Punktes Z, x_i die eines Punktes von $\mathfrak{C}$; y_i seien die Koordinaten desselben Punktes als Punkt von $\mathfrak{F}$ in einem gleichsinnig parallelen Koordinatensystem mit Z als Nullpunkt. s sei der Bogen, $\mathfrak{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$ der Einheitsvektor der Tangente von $\mathfrak{C}$, O die Oberfläche, $\mathfrak{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ der Einheitsvektor der Normalen von $\mathfrak{F}$, ω der Winkel $\mathfrak{n}\,\mathfrak{t}$. Dann ist

$$z_i = x_i - y_i, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10.1}$$

$$dx_i = t_i ds, \; dy_k dy_l = n_i dO, \quad (i, k, l = 1, 2, 3; \text{ zyklisch}) \tag{10.2}$$

und daher

$$dz_1 dz_2 dz_3 = II(dx_i - dy_i) = \Sigma dx_i dy_k dy_l = (\mathfrak{n}\,\mathfrak{t}) \cdot ds dO, \tag{10.3}$$

wo die Summation über i, k, l sich auf alle zyklischen Vertauschungen der Zeiger 1, 2, 3 erstreckt. Somit ergibt sich

$$d\overline{\mathfrak{F}} = |\cos\omega| ds dO. \tag{10.4}$$

[12]) Vgl. O. Varga, Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen. Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 768–784, bes. S. 781, Formel (67).

Bei der Integration von $d\overline{\mathfrak{F}}$ über alle parallelen Lagen von $\mathfrak{F}$, für die der Durchschnitt $\mathfrak{F}\mathfrak{C}$ nicht leer ist, wird jede Lage so oft gezählt, wie die Anzahl n der Schnittpunkte $\mathfrak{F}\mathfrak{C}$ beträgt. Somit ist:

$$\boxed{\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = \int |\cos\omega|\, ds\, dO}. \tag{10.5}$$

Wegen (5.2) und (6.2) kann man (10.5) auch so schreiben:

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = \int n\, d\overline{\mathfrak{C}} = \int n_1\, d\overline{E}\, dO = \int n_2\, d\overline{G}\, ds^{13}). \tag{10.6}$$

$\int n_1\, d\overline{E}$ ist hier das Ebenenmaß von $\mathfrak{C}$ für die zur Tangentenebene des Flächenelementes dO von $\mathfrak{F}$ parallelen Ebenen, $\int n_2\, d\overline{G}$ das Geradenmaß von $\mathfrak{F}$ für die zur Tangente im Bogenelement ds von $\mathfrak{C}$ parallelen Geraden. Insbesondere gilt *für beliebiges* $\mathfrak{C}$ *und eine Eifläche* $\mathfrak{F}$ wegen (6.3)

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = 2\int F^E\, ds, \tag{10.7}$$

also für die *Einheitskugelfläche* $\mathfrak{F} = \mathfrak{K}$[14])

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{K}} = 2\pi L, \tag{10.8}$$

wenn L die Länge von $\mathfrak{C}$ ist.

Im Falle einer *beliebigen Fläche* $\mathfrak{F}$ *und einer ebenen Kurve* $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^E$ sei $\mathfrak{C}_1^E$ die Schnittkurve der Ebene E von $\mathfrak{C}^E$ mit $\mathfrak{F}$, s_1 ihr Bogen, ψ der *Winkel* $\mathfrak{C}^E\mathfrak{C}_1^E$, σ *der Winkel* $E\,\mathfrak{F}$. Dann ist

$$|\cos\omega| = |\sin\sigma\sin\psi|,\ |\sin\sigma|\, dO = ds_1\, d\overline{E}, \tag{10.9}$$

also

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = \int n\, d\overline{\mathfrak{C}} = \int |\sin\psi|\, ds_1\, ds_2\, d\overline{E}. \tag{10.10}$$

Ist insbesondere $\mathfrak{C}^E$ der Rand eines Gebietes $\mathfrak{G}^E$ in E, $\mathfrak{F}$ der Rand eines räumlichen Gebietes $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1^E$ der Durchschnitt $\mathfrak{G}E$, so gilt wegen (4.11) und (10.10)

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = \int n\, d\overline{\mathfrak{C}} = 4\int \left(H(\mathfrak{G}^E, \mathfrak{G}_1^E) + H(\mathfrak{G}^E, \mathfrak{G}_1^{E*})\right) d\overline{E}. \tag{10.11}$$

$\mathfrak{G}_1^{E*}$ ist hier das an einem Punkt von E gespiegelte Gebiet $\mathfrak{G}_1^E$.

Ist insbesondere $\mathfrak{C}^E$ *ein Kreis vom Radius* r, also $\mathfrak{G}^E = r\,\mathfrak{K}^E$ ($\mathfrak{K}^E$ Einheitskreisscheibe in E), so folgt aus (4.12) und (10.11)

$$\int n\, d\overline{\mathfrak{F}} = 8\int H(r\,\mathfrak{K}^E, \mathfrak{G}_1^E)\, d\overline{E} = 4r\int L_1\, d\overline{E}, \tag{10.12}$$

---

[13]) Wir schreiben $\int n\, d\overline{\mathfrak{C}}$, wenn wir $\mathfrak{F}$ als fest, $\mathfrak{C}$ als parallel verschiebbar auffassen, was erlaubt ist, da es nur auf die gegenseitige Lage von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{C}$ ankommt. Entsprechendes gilt in ähnlichen Fällen.

[14]) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ die Einheitsvollkugel und auch die Einheitskugelfläche. Ein Irrtum kann dadurch nicht entstehen.

wenn L_1 die Länge der Schnittkurve $\mathfrak{C}_1^E = \mathfrak{F}E$ ist. (10.12) gilt auch für offene Flächen $\mathfrak{F}$.

11. Die Grundformel. Es sei $\mathfrak{F}_1$ eine feste, $\mathfrak{F}_2$ eine parallel verschiebbare Fläche. In einem festen rechtwinkligen Koordinatensystem seien z_i $(i = 1, 2, 3)$ die Koordinaten eines mit $\mathfrak{F}_2$ starr verbundenen Punktes Z, x_i die eines Punktes von $\mathfrak{F}_1$. y_i seien die Koordinaten desselben Punktes als Punkt von $\mathfrak{F}_2$ in einem gleichsinnig parallelen Koordinatensystem mit Z als Ursprung. Endlich sei s der Bogen der Schnittkurve $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{C}$. Dann findet man ähnlich wie in Nr. 10

$$(11.1) \qquad ds\,dz_1\,dz_2\,dz_3 = ds\,\Sigma\,dx_i\,dy_k\,dy_l - ds\,\Sigma\,dy_i\,dx_k\,dx_l.$$

Wir denken nun $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{C}$ gerichtet und hängen in einem Punkte von $\mathfrak{C}$ zwei normierte rechtwinklige Dreibeine $\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{n}_2$ an, so daß $\mathfrak{t}\,\mathfrak{m}_\lambda\,\mathfrak{n}_\lambda$ ebenso orientiert sind wie die Koordinatenachsen und $\mathfrak{t}$ der Einheitsvektor der Tangente von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{n}_\lambda$ der der Normalen von $\mathfrak{F}_\lambda$ ist. Der Winkel σ von $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ ist dann durch (8.1) erklärt. ϑ_1 sei der Winkel des Linienelementes $d\mathfrak{x} = \{dx_1, dx_2, dx_3\}$ auf $\mathfrak{F}_1$, ϑ_2 der Winkel des Linienelementes $d\mathfrak{y} = \{dy_1, dy_2, dy_3\}$ auf $\mathfrak{F}_2$ mit $\mathfrak{t}$, ds_1 das Bogenelement von $\mathfrak{F}_1$ in Richtung $d\mathfrak{x}$, ds_2 das Bogenelement von $\mathfrak{F}_2$ in Richtung $d\mathfrak{y}$, dO_λ das Flächenelement von $\mathfrak{F}_\lambda$. Dann ist:

$$(11.2) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{x} = ds_1(\mathfrak{t}\cos\vartheta_1 + \mathfrak{m}_1\sin\vartheta_1), \\ d\mathfrak{y} = ds_2(\mathfrak{t}\cos\vartheta_2 + \mathfrak{m}_2\sin\vartheta_2) \end{cases}$$

und

$$(11.3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{m}_2 = \cos\sigma\,\mathfrak{m}_1 + \sin\sigma\,\mathfrak{n}_1, \\ \mathfrak{n}_2 = -\sin\sigma\,\mathfrak{m}_1 + \cos\sigma\,\mathfrak{n}_1 \end{cases}$$

also:

$$(11.4) \qquad \begin{cases} ds\,\Sigma\,dx_i\,dy_k\,dy_l = ds(d\mathfrak{x}\,\mathfrak{n}_2)\,dO_2 = -\sin\sigma\sin\vartheta_1\,ds\,ds_1\,dO_2 \\ \qquad\qquad = -\sin\sigma\,dO_1\,dO_2, \\ ds\,\Sigma\,dy_i\,dx_k\,dx_l = ds(d\mathfrak{y}\,\mathfrak{n}_1)\,dO_1 = \sin\sigma\sin\vartheta_2\,ds\,ds_2\,dO_1 \\ \qquad\qquad = \sin\sigma\,dO_1\,dO_2. \end{cases}$$

Man würde demnach

$$ds\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = 2|\sin\sigma|\,dO_1\,dO_2$$

erwarten. Es ist aber zu beachten, daß bei der Herleitung das Bogenelement ds der Schnittkurve $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ doppelt gezählt wurde: einmal als Element der festen Fläche $\mathfrak{F}_1$ und einmal als Element der bewegten Fläche $\mathfrak{F}_2$. Man muß deshalb rechts durch zwei dividieren und erhält als „*Grundformel*“[15])

$$(11.5) \qquad \boxed{ds\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = |\sin\sigma|\,dO_1\,dO_2}.$$

[15]) Der Name stammt (für die entsprechende Formel der Bewegungsgruppe) von Herrn W. Blaschke, J. 17, § 3.

12. Über das Ebenenmaß des Durchschnittes zweier Flächen. Wir betrachten jetzt außer $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ noch eine unabhängig von $\mathfrak{F}_2$ parallel verschiebbare Ebene E. $\mathfrak{C}$, s, σ, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{t}$ mögen dasselbe bedeuten wie in Nr. 11. $\mathfrak{C}_\lambda^E$ sei die Schnittkurve $\mathfrak{F}_\lambda E$ ($\lambda = 1, 2$), s_λ ihr Bogen, n die Anzahl der Schnittpunkte $\mathfrak{C}_1^E \mathfrak{C}_2^E$, ψ der Winkel $\mathfrak{C}_1^E \mathfrak{C}_2^E$, ω der Winkel von $\mathfrak{C}$ mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathfrak{n}_3$ der (irgendwie gerichteten) Ebene E. Wir berechnen das Integral $\int n\, dE\, d\mathfrak{F}_2$, erstreckt über alle Lagen von E und $\mathfrak{F}_2$, die aus einer Ausgangslage durch unabhängige Parallelverschiebung von E und $\mathfrak{F}_2$ entstehen.

Halten wir zuerst $\mathfrak{F}_2$ fest und verschieben E parallel, so ist nach (5.2) und der Grundformel

$$\int n\, dE\, d\mathfrak{F}_2 = \int |\cos\omega|\, ds\, d\mathfrak{F}_2 = \int |\cos\omega \sin\sigma|\, dO_1\, dO_2. \tag{12.1}$$

Nun ist nach (8.1)

$$\cos\omega \sin\sigma = \sin\sigma\ (\mathfrak{t}\,\mathfrak{n}_3) = (\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{n}_3) = \mathcal{E}, \tag{12.2}$$

wenn wir $(\mathfrak{n}_1\,\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{n}_3) = \mathcal{E}$ setzen. $\mathcal{E}$ bedeutet geometrisch den Rauminhalt des von den drei Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ aufgespannten Parallelflachs oder den Eckensinus des von ihren Endpunkten auf der Einheitskugel bestimmten sphärischen Dreiecks. Wir erhalten also auf die angegebene Weise

$$\int n\, dE\, d\mathfrak{F}_2 = \int |\mathcal{E}|\, dO_1\, dO_2. \tag{12.3*}$$

Halten wir dagegen zunächst E fest, so folgt aus (10.10), wo $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F}_2$ und dE durch die Punktdichte dE' in einer Geraden senkrecht zu E (d. h. ihr Bogenelement) zu ersetzen ist

$$\int n\, d\mathfrak{F}_2\, dE = \int |\sin\psi|\, ds_1\, ds_2\, dE\, dE'.$$

Man hat also im ganzen

$$\boxed{\int n\, dE\, d\mathfrak{F}_2 = \int |\mathcal{E}|\, dO_1\, dO_2 = \int |\sin\psi|\, ds_1\, ds_2\, dE\, dE'}. \tag{12.3}$$

Wenn jede der Flächen $\mathfrak{F}_\lambda$ ein räumliches Gebiet $\mathfrak{G}_\lambda$ berandet, das E in einem ebenen Bereich $\mathfrak{G}_\lambda^E$ schneidet, so hat man wegen (12.3) und (4.11) auch

$$\int n\, dE\, d\mathfrak{F}_2 = 4 \int \left(H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) + H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^{E*})\right) dE\, dE', \tag{12.4}$$

wo $\mathfrak{G}_2^{E*}$ das Spiegelbild von $\mathfrak{G}_2^E$ an einem Punkte von E ist. In (12.3) und (12.4) rechts ist zunächst die Ebene E mit $\mathfrak{F}_2$ starr verbunden zu denken und über alle parallelen Lagen von E, $\mathfrak{F}_2$ zu integrieren, für die der Durchschnitt $E\,\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2$ nicht leer ist. Sodann ist noch bei festgehaltener Fläche $\mathfrak{F}_2$ über alle Lagen von E zu integrieren, die durch Parallelverschiebung der Ebene E entstehen und für die der Durchschnitt $E\,\mathfrak{F}_2$ nicht leer ist.

Ist insbesondere $\mathfrak{F}_2$ *die Einheitskugel* $\mathfrak{K}$, also $\mathfrak{G}_2^E$ ein Kreis vom Radius $r : \mathfrak{G}_2^E = r\,\mathfrak{K}^E$, und L_1 die Länge von $\mathfrak{C}_1^E = \mathfrak{F}_1 E$, so ist nach (10.12)

(12.4*) $$\int n\,d\bar{E}\,d\bar{\mathfrak{K}} = 4\int L_1\,d\bar{E}\cdot\int r\,d\bar{E}'.$$

Weiter ist

(12.5) $$\int r\,d\bar{E}' = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin\varphi\,d\cos\varphi = \frac{\pi}{2},$$

wenn φ der Winkel ist, unter dem r vom Mittelpunkt der Einheitskugel $\mathfrak{K}$ aus gesehen wird. Somit erhält man schließlich

(12.6) $$\int n\,d\bar{E}\,d\bar{\mathfrak{K}} = 2\pi\int L_1\,d\bar{E}.$$

(12.6) gilt auch, wenn $\mathfrak{F}_1$ offen ist.

13. Die integrierte Grundformel. Durch Integration der Grundformel (11.5) über alle parallelen Lagen von $\mathfrak{F}_2$, für die der Durchschnitt $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ nicht leer ist, erhält man

(13.1) $$\boxed{\int l\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = \int|\sin\sigma|\,dO_1\,dO_2},$$

wo l die Länge der Schnittkurve $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ist.

Man kann (13.1) mittels (7.2) noch anders schreiben. Man verschiebe einen Punkt P von $\mathfrak{F}_2$ mit seiner Tangentenebene E_2 parallel längs $\mathfrak{F}_1$. $\mathfrak{C}_2$ sei die Schnittkurve $\mathfrak{F}_1 E_2$, l_2 ihre Länge. Dann ist nach (7.2)

(13.2) $$\int|\sin\sigma|\,dO_2 = \int l_2\,d\bar{E}_2,$$

also

(13.3) $$\int l\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = \int l_2\,d\bar{E}_2\,dO_1,$$

was im Falle einer Eifläche noch entsprechend (7.5) umgeschrieben werden kann.

(13.1) kann auch aus (12.3) erhalten werden, wenn man über *alle* Stellungen der Ebene E integriert, anstatt nur über die Lagen *einer* Stellung. Außer (13.1) erhält man so wegen (5.5) noch die gleichwertige Formel:

(13.4) $$\int l\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = \frac{1}{\pi}\int|\sin\psi|\,ds_1\,ds_2\,dE\,d\bar{E}',$$

die sich wegen (10.10) und (10.11) auch in die Gestalt

(13.5) $$\int l\,d\bar{\mathfrak{F}}_2 = \frac{4}{\pi}\int\left(H(\mathfrak{G}_1^E,\mathfrak{G}_2^E) + H(\mathfrak{G}_1^E,\mathfrak{G}_2^{E*})\right)dE\,d\bar{E}'$$

setzen läßt, wenn $\mathfrak{F}_\lambda$ ein räumliches Gebiet $\mathfrak{G}_\lambda$ berandet, das E in einem ebenen Bereich $\mathfrak{G}_\lambda^E$ schneidet.

Ist insbesondere $\mathfrak{F}_1$ *beliebig*, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, so folgt aus (13.1) oder auch aus (13.3) und (7.6)

(13.6) $$\int l\,d\bar{\mathfrak{K}} = \pi^2 O_1.$$

§ 4.
Zwei Gebiete. Die Hauptformel.

14. Über das Ebenenmaß des Durchschnitts zweier Gebiete. Es sei $\mathfrak{G}_1$ ein festes, $\mathfrak{G}_2$ ein parallel verschiebbares räumliches Gebiet und E eine Ebene, die unabhängig von $\mathfrak{G}_2$ parallel verschoben werden kann. V_λ sei der Rauminhalt, $\mathfrak{F}_\lambda$ der Rand von $\mathfrak{G}_\lambda$; O_λ, B_λ Oberfläche und Ebenenmaß von $\mathfrak{F}_\lambda$. Ferner sei c_λ^E die Gesamtkrümmung des Randes des Durchschnittes $\mathfrak{F}_\lambda E$, c^E jene des Randes des Durchschnittes $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 E$ in E, $b = \frac{1}{2\pi}\int c^E d\bar{E}$ das Ebenenmaß dieses Durchschnittes. Wir berechnen das Integral

$$\bar{J} = \frac{1}{2\pi}\int c^E d\bar{E}\, d\bar{\mathfrak{G}}_2 = \int b\, d\bar{\mathfrak{G}}_2, \tag{14,1}$$

erstreckt über alle Lagen von E und $\mathfrak{G}_2$, die aus einer Anfangslage durch unabhängige Parallelverschiebung von $\mathfrak{G}_2$ und E entstehen und für die der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 E$ nicht leer ist.

c^E setzt sich additiv aus Bestandteilen zweierlei Art zusammen:

1. aus den Gesamtkrümmungen $c_{\lambda\mu}^E$ der Durchschnitte $E\,\mathfrak{F}_\lambda \mathfrak{G}_\mu (\lambda, \mu = 1,2;\ \lambda \neq \mu)$;

2. aus dem Beitrag $c_{\mathfrak{C}}^E$ der Kante längs der Schnittlinie $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$.

Der Zerlegung

$$c^E = c_{12}^E + c_{21}^E + c_{\mathfrak{C}}^E \tag{14.2}$$

entspreche die Zerlegung

$$\bar{J} = \bar{J}_{12} + \bar{J}_{21} + \bar{J}_{\mathfrak{C}}. \tag{14.3}$$

Da es nur auf die gegenseitige Lage von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ und E ankommt, so ist

$$\bar{J}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2\pi}\int c_{\lambda\mu}^E d\bar{E}\, d\bar{\mathfrak{G}}_2 = \frac{1}{2\pi}\int c_{\lambda\mu}^E d\bar{E}\, d\bar{\mathfrak{G}}_\mu,$$

und nach Maak (Nr. 3)

$$\bar{J}_{\lambda\mu} = V_\mu \cdot \frac{1}{2\pi}\int c_\lambda^E d\bar{E} = B_\lambda \cdot V_\mu. \tag{14.4}$$

Der Beitrag der Kante wird durch das Integral

$$\bar{J}_{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2\pi}\int \Sigma\, |\psi|\, d\bar{E}\, d\bar{\mathfrak{G}}_2 = \frac{1}{2\pi}\int |\psi|\, |\cos\omega|\, ds\, d\bar{\mathfrak{F}}_2 \tag{14.5}$$

gegeben. Hier ist s der Bogen der Schnittkurve $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$, ω der Winkel von $\mathfrak{C}$ mit dem Einheitsvektor n_3 der Normalen der (irgendwie gerichteten) Ebene E, ψ der Schnittwinkel der Kurven $\mathfrak{C}_\lambda^E = E\,\mathfrak{F}_\lambda$, und die Summe im ersten Integral ist für jede Lage von $\mathfrak{C}_2^E$ über alle Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}_1^E$ zu erstrecken. Weiter sei n_λ der Einheitsvektor der Normalen von $\mathfrak{F}_\lambda$,

σ der Winkel $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ längs $\mathfrak{C}$. Ersetzt man dann in (14.5) $ds\,d\bar{\mathfrak{F}}_2$ nach der Grundformel (11.5), so ergibt sich wegen (12.2)

$$\boxed{\int b\,d\bar{\mathfrak{G}}_2 = V_1 B_2 + V_2 B_1 + \frac{1}{2\pi}\int |\psi|\,|\mathcal{E}|\,dO_1\,dO_2} \tag{14.6}$$

wo $\mathcal{E}$ der Rauminhalt des von den Normalenvektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ aufgespannten Parallelflachs ist. Für Eikörper $\mathfrak{G}_\lambda$ sind in (14.6) b, B_λ die Breiten von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_\lambda$ in der Normalenrichtung der Ebene E.

Wegen (12.2), (10.9) und (4.7) kann man den letzten Summanden in (14.6) auch in folgende Gestalten setzen:

$$\bar{J}_{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2\pi}\int \psi \sin\psi\, ds_1\, ds_2\, d\bar{E}\, d\bar{E}' = 2\int H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E)\, d\bar{E}\, d\bar{E}', \tag{14.7}$$

wo $\mathfrak{G}_\lambda^E = \mathfrak{G}_\lambda E$ ist. Über die Integrationen gilt das in Nr. 12 Gesagte.

Ist insbesondere $\mathfrak{G}_2$ *die Einheitskugel* $\mathfrak{K}$, so ist nach (4.12), (12.4*), (12.6)

$$\bar{J}_{\mathfrak{C}} = \frac{\pi}{2}\int L_1\, d\bar{E}, \tag{14.8}$$

wenn L_1 der Umfang von $\mathfrak{G}_1^E$ ist.

15. Über das Integral der mittleren Krümmung. Für das zu (14.1) analoge Integral

$$J = \frac{1}{2\pi}\int c^E\, dE\, d\bar{\mathfrak{G}}_2 = \int m\, d\bar{\mathfrak{G}}_2, \tag{15.1}$$

wo über *alle* Stellungen der Ebene E integriert wird, anstatt nur über eine und m das Ebenenmaß des Durchschnitts $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ bei Bewegungen ist, ergibt ein entsprechender Gedankengang wie in Nr. 14 die Zerlegung

$$J = J_{12} + J_{21} + J_{\mathfrak{C}} \tag{15.2}$$

mit

$$J_{\lambda\mu} = V_\mu M_\lambda, \quad J_{\mathfrak{C}} = \tfrac{1}{2}\int |\sigma|\, ds\, d\bar{\mathfrak{F}}_2, \tag{15.3}$$

wo M_λ das Integral der mittleren Krümmung (8.6) von $\mathfrak{F}_\lambda$ ist[16]). Vermöge der Grundformel erhält man

$$\boxed{\int m\, d\bar{\mathfrak{G}}_2 = V_1 M_2 + V_2 M_1 + \tfrac{1}{2}\int \sigma \sin\sigma\, dO_1\, dO_2}. \tag{15.4}$$

Der letzte Summand in (15.4) kann auch in die Gestalt

$$J_{\mathfrak{C}} = 2\int H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E)\, dE\, d\bar{E}' \tag{15.5}$$

gesetzt werden, wie ohne Rechnung aus (14.7) folgt[17]).

---

[16]) Vgl. W. Blaschke, J. 17, § 5.

[17]) Für *Eikörper* $\mathfrak{G}_\lambda$ hat man auch

$$J_{\mathfrak{C}} = 3\int V(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2^{*E})\, dE,$$

wenn $V(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_l)$ der gemischte Rauminhalt dreier Eikörper $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_l$ ist. Wegen der Ausdehnung auf beliebige Gebiete vgl. Nr. 17 und 18.

Ist insbesondere $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, so ergibt sich nach (4. 12) analog wie $\bar{J}_{\mathfrak{C}}$ in Nr. 14:

$$J_{\mathfrak{C}} = \frac{\pi}{2}\int L_1\, dE,$$

also wegen

$$\int L_1\, dE = \frac{\pi^2}{2} O_1$$ [18])

schließlich

$$J_{\mathfrak{C}} = \frac{\pi^3}{4} O_1. \tag{15.6}$$

16. Flächentheoretische Hilfsformeln. Es seien $\mathfrak{F}_\lambda (\lambda = 1, 2)$ zwei Flächen, $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ ihre Schnittlinie. Wir denken $\mathfrak{F}_\lambda$ und $\mathfrak{C}$ irgendwie gerichtet. In einem Punkte P von $\mathfrak{C}$ sei $\mathfrak{n}_\lambda$ der Einheitsvektor der Normalen von $\mathfrak{F}_\lambda$, s der Bogen, $\mathfrak{t} = \frac{dP}{ds}$ der Einheitsvektor der Tangente von $\mathfrak{C}$, $\sigma (\sigma \neq 0, \pi)$ der Winkel $\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2$, so daß

$$\mathfrak{t} \sin\sigma = \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2, \quad \cos\sigma = \mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 \tag{16.1}$$

ist. Ferner sei $\mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{n}_\lambda \times \mathfrak{t}$ ein zu $\mathfrak{n}_\lambda$ und $\mathfrak{t}$ senkrechter Einheitsvektor, endlich $\mathfrak{N}_\lambda$ die Normalkrümmung, $\mathfrak{G}_\lambda$ die geodätische Krümmung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{F}_\lambda$:

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{n}_\lambda \frac{d\mathfrak{t}}{ds} = -\mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{n}_\lambda}{ds}, \quad \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{m}_\lambda \frac{d\mathfrak{t}}{ds} = -\mathfrak{t}\frac{d\mathfrak{m}_\lambda}{ds}. \tag{16.2}$$

Dann ist

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{G}_2 \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{n}_2. \tag{16.3}$$

Führt man hier die Werte

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_2 = \cos\sigma\, \mathfrak{m}_1 + \sin\sigma\, \mathfrak{n}_1, \\ \mathfrak{n}_2 = -\sin\sigma\, \mathfrak{m}_1 + \cos\sigma\, \mathfrak{n}_1 \end{cases} \tag{16.4}$$

ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 \cos\sigma - \mathfrak{N}_2 \sin\sigma, \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{G}_2 \sin\sigma + \mathfrak{N}_2 \cos\sigma. \tag{16.5}$$

Es ist also

$$\begin{cases} \mathfrak{G}_1 \sin\sigma = \mathfrak{N}_1 \cos\sigma - \mathfrak{N}_2, & \mathfrak{N}_1 \sin\sigma = \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1 \cos\sigma, \\ \mathfrak{G}_2 \sin\sigma = \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 \cos\sigma, & \mathfrak{N}_2 \sin\sigma = \mathfrak{G}_2 \cos\sigma - \mathfrak{G}_1. \end{cases} \tag{16.6}$$

17. Die Hauptformel für zwei Gebiete. Es sei wieder $\mathfrak{G}_1$ ein festes, $\mathfrak{G}_2$ ein parallel verschiebbares räumliches Gebiet und $\mathfrak{F}_\lambda$ der Rand von $\mathfrak{G}_\lambda$. Wir berechnen jetzt das Integral $\int c\, d\bar{\mathfrak{G}}_2$, wo c die Gesamtkrümmung der Berandung des Durchschnittes $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ ist, erstreckt über alle parallelen Lagen von $\mathfrak{G}_2$, für die $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ nicht leer ist.

[18]) Vgl. etwa L. A. Santaló, J. 5, S. 10, Formel (15).

c setzt sich wieder aus Bestandteilen zweierlei Art additiv zusammen:

1. aus den Gesamtkrümmungen $C_{\lambda\mu}$ der Durchschnitte $\mathfrak{F}_{\lambda\mu} = \mathfrak{F}_\lambda \mathfrak{G}_\mu$ $(\lambda, \mu = 1, 2;\ \lambda \neq \mu)$;

2. aus dem Beitrag $\mathfrak{B}$ der Kante längs der Schnittlinie $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$.

Entsprechend dieser Zerlegung von c gilt

$$\int c\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = \int C_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 + \int C_{21}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 + \int \mathfrak{B}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2. \tag{17.1}$$

Für die ersten beiden Summanden ergibt sich nach Maak (Nr. 3)

$$\int C_{\lambda\mu}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = C_\lambda V_\mu, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2;\ \lambda \neq \mu), \tag{17.2}$$

wo C_λ die Gesamtkrümmung von $\mathfrak{F}_\lambda$ und V_μ der Rauminhalt von $\mathfrak{G}_\mu$ ist.

Zur Berechnung von $\mathfrak{B}$ seien in einem Punkte P der Schnittlinie $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ mit n_1, n_2 die Einheitsvektoren der äußeren Normalen von $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ bezeichnet. Wir benutzen weiter die Bezeichnungen von Nr. 16.

Der Vektor

$$\mathfrak{r} = \cos\varphi\, n_1 - \sin\varphi\, m_1 \tag{17.3}$$

läuft von n_1 bis n_2, wenn φ von 0 bis σ läuft. Für den Beitrag $\mathfrak{B}$ der Kante längs $\mathfrak{C}$ hat man

$$\mathfrak{B} = \int_{\mathfrak{C}} d\,s \int_0^\sigma \left(\mathfrak{r}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varphi}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s}\right) d\,\varphi\ ^{19}). \tag{17.4}$$

Wegen (17.3), (16.1), (16.2) ist:

$$\left(\mathfrak{r}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varphi}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s}\right) = \mathfrak{t}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s} = -\mathfrak{N}_1 \cos\varphi + \mathfrak{G}_1 \sin\varphi, \tag{17.5}$$

also, wenn man von 0 bis σ integriert und (16.6) beachtet:

$$\int_0^\sigma \left(\mathfrak{r}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varphi}\, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s}\right) d\,\varphi = -(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2. \tag{17.6}$$

Somit wird:

$$\mathfrak{B} = -\int (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\, d\,s = \int (\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_2)\, d\,s, \tag{17.7}$$

und wegen der Grundformel[20]):

$$\int \mathfrak{B}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = 2\int (\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) \sin^2\frac{\sigma}{2}\, d\,O_1\, d\,O_2 = \int (\mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1) \sin\sigma\, d\,O_1\, d\,O_2. \tag{17.8}$$

---

[19]) Vgl. W. Blaschke, J. 17, § 6.

[20]) Hier wird der *algebraische* Wert von $d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$ eingesetzt, also wegen (11.4)

$$d\,s\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = -\sin\sigma\, d\,O_1\, d\,O_2.$$

Schließlich ist also:

$$(17.9)\qquad \boxed{\begin{aligned}\int c\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 &= C_1 V_2 + C_2 V_1 + 2\int (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2\\ &= C_1 V_2 + C_2 V_1 + \int (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1)\sin\sigma\,dO_1\,dO_2\end{aligned}}\,.$$

Wenn wir an Stelle der Gesamtkrümmungen c, C_λ die Zusammenhangszahlen

$$(17.10)\qquad z = \frac{1}{4\pi}c, \qquad Z_\lambda = \frac{1}{4\pi}C_\lambda$$

einführen und

$$(17.11)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathcal{N}_2\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2 = 3\,H(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2),\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathcal{N}_1\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2 = 3\,H(\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_1)\end{cases}$$

setzen, so nimmt die *Hauptformel für die Schiebungen räumlicher Gebiete* (17.9) folgende Gestalt an:

$$(17.12)\qquad \boxed{\int z\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = Z_2 V_1 + 3H(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2) + 3H(\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_1) + Z_1 V_2}\ [21].$$

Für zwei *Eikörper* $\mathfrak{G}_\lambda$ ist $c = C_1 = C_2 = 4\pi$, so daß (17.9) übergeht in

$$(17.13)\qquad \int d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = V_1 + V_2 + \frac{1}{2\pi}\int (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2.$$

Ersetzen wir $\mathfrak{G}_2$ durch $\varrho\,\mathfrak{G}_2$ ($\varrho > 0$, konstant), so muß $\mathcal{N}_2$ durch $\frac{1}{\varrho}\mathcal{N}_2$, dO_2 durch $\varrho^2\,dO_2$ ersetzt werden. Daher ist

$$\int d\,(\varrho\,\overline{\mathfrak{G}}_2) = V_1 + \varrho\,\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_2\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2 + \varrho^3\,\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_1\sin^2\frac{\sigma}{2}\,dO_1\,dO_2 + \varrho^3 V_2.$$

Andererseits hat man nach Minkowski [22]:

$$\int d\,(\varrho\,\overline{\mathfrak{G}}_2) = V_1 + 3\,\varrho\,V(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2^*) + 3\,\varrho^2(\mathfrak{G}_2^*,\mathfrak{G}_2^*,\mathfrak{G}_1) + \varrho^3 V_2,$$

wo $V(\mathfrak{G}_i,\mathfrak{G}_k,\mathfrak{G}_l)$ der gemischte Rauminhalt dreier Eikörper $\mathfrak{G}_i,\mathfrak{G}_k,\mathfrak{G}_l$ und $\mathfrak{G}_l^*$ der durch Spiegelung von $\mathfrak{G}_l$ an einem Punkte entstehende Eikörper ist.

Für *Eikörper* $\mathfrak{G}_\lambda$ hat sich also ergeben:

$$(17.14)\qquad \begin{cases} H(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2) = V(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2^*),\\ H(\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_2,\mathfrak{G}_1) = V(\mathfrak{G}_2^*,\mathfrak{G}_2^*,\mathfrak{G}_1).\end{cases}$$

---

[21] Vgl. W. Blaschke, J. 21, § 5.

[22] a. a. O., Fußnote [8]).

Gehen wir zu beliebigen räumlichen Bereichen zurück und ersetzen in (17.11) $\mathfrak{G}_1$ durch sein Spiegelbild $\mathfrak{G}_1^*$ in bezug auf einen Punkt, so muß σ durch $\sigma - \pi$ oder $\sigma + \pi$ ersetzt werden, je nachdem $\sigma > 0$ oder $\sigma < 0$. Man erhält daher:

$$3H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_2 \cos^2\frac{\sigma}{2}\, dO_1\, dO_2, \tag{17.15}$$

und ebenso:

$$3H(\mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_1) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_1 \cos^2\frac{\sigma}{2}\, dO_1\, dO_2. \tag{17.16}$$

Durch Addition folgt aus (17.11), (17.15), (17.16):

$$\begin{cases} 3[H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2)] = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_2\, dO_1\, dO_2, \\ 3[H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_1)] = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_1\, dO_1\, dO_2. \end{cases} \tag{17.17}$$

Man kann (17.17) noch in eine andere Gestalt setzen. Dazu führen wir etwa in der ersten Formel (17.17) die Integration $\int \mathcal{N}_2\, dO_1\, dO_2$ in der Weise durch, daß wir zuerst ein beliebiges Flächenelement von $\mathfrak{F}_2$, also einen Punkt von $\mathfrak{F}_2$ mit seiner Tangentenebene E parallel längs $\mathfrak{F}_1$ verschieben und nachträglich über alle Flächenelemente von $\mathfrak{F}_1$ integrieren. Da $\mathcal{N}_2$ (außer von der Normalen von $\mathfrak{F}_2$) nur vom Linienelement der Schnittkurve abhängt, kommt die erste Integration auf die Berechnung von

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}_2\, dO_1 = \frac{1}{2\pi}\int c^E\, d\bar{E} = B_2 \tag{17.18}$$

heraus, wo $\mathcal{N}_2$ die Normalkrümmung der Schnittkurve $\mathfrak{F}_1 E$ auf $\mathfrak{F}_2$, c^E die Gesamtkrümmung dieser Schnittkurve in E ist. Man erhält daher schließlich:

$$\begin{cases} 3[H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2)] = \int B_2\, dO_1, \\ \text{und entsprechend:} \\ 3[H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_1)] = \int B_1\, dO_2. \end{cases} \tag{17.19}$$

Für Eikörper $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ kommt (17.19) auf bekannte Formeln heraus.

Wenn insbesondere $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ ein *beliebiges* räumliches Gebiet ist, so gilt wegen der Symmetrie der Kugel in bezug auf den Mittelpunkt:

$$H(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = H(\mathfrak{G}^*, \mathfrak{G}^*, \mathfrak{K}), \quad H(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}) = H(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{K}^*, \mathfrak{G}), \tag{17.20}$$

und wegen $\mathcal{N}_1 = 1$ folgt aus (17.17), (17.20), (8.4) bis (8.6), wenn $d\Omega$ das Flächenelement von $\mathfrak{K}$ ist:

$$\begin{cases} 3H(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K}) = \frac{1}{4\pi}\int dO\, d\Omega = O, \\ 3H(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}) = \frac{1}{2}\int B\, d\Omega = \frac{1}{2}\int z^E\, d\bar{E}\, d\Omega = \int z^E\, dE = M. \end{cases} \tag{17.21}$$

$3H(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \mathfrak{K})$ *und* $3H(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G})$ *reduzieren sich also auf die Oberfläche* O *und das Integral der mittleren Krümmung* M *des Randes von* $\mathfrak{G}$. Die Gleichungen (17.11), (17.15), (17.16), (17.18) ergeben dann folgende Integraldarstellungen von M und O:

$$(17.22)\qquad M = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}\cos^2\frac{\sigma}{2}\,d\Omega\,dO = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{N}\sin^2\frac{\sigma}{2}\,d\Omega\,dO = \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{N}\,d\Omega\,dO,$$

$$(17.23)\qquad O = \frac{1}{2\pi}\int \cos^2\frac{\sigma}{2}\,d\Omega\,dO = \frac{1}{2\pi}\int \sin^2\frac{\sigma}{2}\,d\Omega\,dO.$$

Schließlich noch eine Folgerung aus (17.12), (17.15) bis 17.17)! Durch geeignete Zusammenfassung dieser Gleichungen erhält man wegen (16.6):

$$(17.24)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{G}_1 \sin\sigma\,dO_1\,dO_2 = 3\,[-H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) \\ \qquad - H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2) - H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_1)], \\ \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{G}_2 \sin\sigma\,dO_1\,dO_2 = 3\,[H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) \\ \qquad - H(\mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_1^*, \mathfrak{G}_2) + H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1) + H(\mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_2^*, \mathfrak{G}_1)]. \end{cases}$$

Diese Integrale treten auf, wenn man in (17.8) mit $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{G}_2$ den Grenzübergang zu einer Fläche macht, die als Grenzfall einer dünnen Schale aufgefaßt wird. Z. B. ist für $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{F}_1$ die Summe zweier Glieder wie (17.8) zu bilden, von denen das zweite dadurch entsteht, daß n_1 durch $-n_1$ ersetzt wird. Bei dieser Ersetzung gehen $\mathcal{G}_1$, $\sin\sigma$ bezüglich in $-\mathcal{G}_1$, $-\sin\sigma$ über, so daß:

$$\lim_{\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{F}_1} \int \mathfrak{B}\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = \int [(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1)\sin\sigma - (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_1)\sin\sigma]\,dO_1\,dO_2 = -2\int \mathcal{G}_1 \sin\sigma\,dO_1\,dO_2 = 2\int (\mathcal{G}_1\,ds)\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_1$$

wird. Entsprechend erhält man für $\mathfrak{G}_2 \to \mathfrak{F}_2$:

$$\int \mathfrak{B}\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_2 = \lim_{\mathfrak{G}_2 \to \mathfrak{F}_2} \int \mathfrak{B}\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = 2\int \mathcal{G}_2 \sin\sigma\,dO_1\,dO_2 = -2\int (\mathcal{G}_2\,ds)\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\ ^{23}).$$

18. Besondere Fälle der Hauptformel. Wir betrachten schließlich noch die besonderen Fälle der Hauptformel, in denen sich mindestens eines der beiden räumlichen Gebiete $\mathfrak{G}_\lambda$ auf ein ebenes Gebiet oder auf eine Strecke reduziert. Es handelt sich also immer um das Integral $\int z\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$, wo z die Zusammenhangszahl des Durchschnitts $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ist.

Zunächst sei $\mathfrak{G}_1$ *ein festes räumliches Gebiet,* $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_2^E$ *ein parallel verschiebbares ebenes Gebiet.* E sei die Ebene, $\mathfrak{C}_2^E$ der Rand, F_2 der Flächeninhalt von $\mathfrak{G}_2^E$, $\mathfrak{G}_1^E$ der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 E$, F_1^E sein Flächeninhalt.

---

23) Vgl. W. Blaschke, J. 21, Ende von § 5.

$\mathfrak{C}_1^E$ sein Rand. Die Gesamtkrümmung der Berandung des Durchschnittes $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2^E = \mathfrak{G}_1^E \mathfrak{G}_2^E$ in E sei c^E, die von $\mathfrak{C}_\lambda^E$ sei C_λ^E $(\lambda = 1, 2)$. Da die Zusammenhangszahl vom Einbettungsraum unabhängig ist, hat man $z = z^E = \frac{1}{2\pi} c^E$, $Z_\lambda = Z_\lambda^E = \frac{1}{2\pi} C_\lambda^E$, wenn z, Z_λ bezüglich die Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2^E$, $\mathfrak{G}_\lambda$ im Raum, z^E, Z_λ^E die in der Ebene E sind.

Aus der Definition der Punkt- bzw. Ebenendichte (Nr. 2) folgt bei Verwendung derselben Bezeichnungen wie in Nr. 4:

$$\int z \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = \int z \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3^E \, d\,\overline{E}. \tag{18.1}$$

Bei festgehaltener Ebene E ergibt sich $\int z \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3^E$ aus (4.6). Wir erhalten so

$$\int z \, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = \int (Z_2 F_1^E + 2H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) + Z_1 F_2) \, d\,\overline{E}. \tag{18.2}$$

Wenn wir hier die Integration rechts ausführen und (8.3), (8.4) beachten, so bekommen wir durch Vergleich mit (17.12) auf Grund einer Dimensionsüberlegung, wie sie zur Herleitung von (17.14) angestellt wurde:

$$\begin{cases} 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3^E) = 2 \int H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E) \, d\,\overline{E}, \\ 3H(\mathfrak{G}_2^E, \mathfrak{G}_3^E, \mathfrak{G}_1) = B_1 F_2. \end{cases} \tag{18.3}$$

Ist insbesondere $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, $\mathfrak{G}_3^E$ *beliebig* und L_3 der Umfang von $\mathfrak{G}_3^E$, so ergibt sich aus (18.3) wegen (4.12) und (12.5):

$$\begin{cases} 3H(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}_3^E) = \tfrac{1}{2} L_2 \pi, \\ 3H(\mathfrak{G}_3^E, \mathfrak{G}_3^E, \mathfrak{K}) = 2F_2, \end{cases} \tag{18.4}$$

was für Eigebiete $\mathfrak{G}_3^E$ bekannt ist. Ist $\mathfrak{G}_1$ *beliebig*, $\mathfrak{G}_3^E = \mathfrak{K}^E$ *der Einheitskreis*, so folgt wieder aus (18.3) und (4.12):

$$\begin{cases} 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{K}^E) = \int L_1 \, d\,\overline{E}, \\ 3H(\mathfrak{K}^E, \mathfrak{K}^E, \mathfrak{G}_1) = B_1 \pi, \end{cases} \tag{18.5}$$

wo L_1 der Umfang von $\mathfrak{C}_1^E$ ist.

Es sei zweitens $\mathfrak{G}_1$ *ein festes räumliches Gebiet*, $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{S}$ *eine parallel verschiebbare Strecke* von der Länge L_2. Dann ist in (17.12) z die Anzahl der Strecken, in die der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{S}$ zerfällt. Wir führen diesen Fall auf den soeben behandelten zurück, indem wir $\mathfrak{S}$ als Grenzfall eines stabartigen Eibereiches $\mathfrak{G}_2^E$ in einer Ebene E auffassen. Die Betrachtungen von Nr. 4 ändern sich dann nur insofern, als mit $|\psi|$ in der Grenze auch immer $\pi - |\psi|$ auftritt, also wegen (4.7) und (4.10) an Stelle der rechten Seite von (4.7) die rechte Seite von (4.11) tritt. Durch Ausführung einer Integration erhält man so:

$$2H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{S}) = \tfrac{1}{2} L_2 \int |\sin \psi| \, d s_1. \tag{18.6}$$

Hier ist ψ der Winkel von $\mathfrak{S}$ mit dem Rand $\mathfrak{C}_1^E$ von $\mathfrak{G}_1^E$, ds_1 das Bogenelement von $\mathfrak{C}_1^E$. Aus (18.6) folgt:

$$2\int H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{S})\, d\overline{E} = \tfrac{1}{2} L_2 \int |\sin\psi|\, ds_1\, d\overline{E}. \tag{18.7*}$$

Wegen (10.9) und $F_2 = 0$ ergibt sich schließlich aus (18.3) und (18.7*):

$$\begin{cases} 3H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{S}) = \tfrac{1}{2} L_2 \int |\cos\omega|\, dO_1, \\ 3H(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}, \mathfrak{G}_1) = 0. \end{cases} \tag{18.7}$$

Hier ist ω der Winkel von $\mathfrak{S}$ mit der Normalen des Randes $\mathfrak{F}_1$ von $\mathfrak{G}_1$ und dO_1 das Oberflächenelement von $\mathfrak{F}_1$. (18.7) bleibt auch bestehen, wenn $\mathfrak{G}_1$ *ein ebener Bereich* $\mathfrak{G}_1^E$ *oder eine Strecke* $\mathfrak{S}_1$ ist.

Sind endlich *beide Gebiete* $\mathfrak{G}_\lambda$ *ebene Gebiete* $\mathfrak{G}_\lambda^E$, deren Ebenen E_λ den Winkel $\sigma\,(0 < \sigma < \pi)$ bilden, $\mathfrak{G}_1^E$ fest, $\mathfrak{G}_2^E$ parallel verschiebbar, dann ist in (17.12) $V_1 = V_2 = 0$ und z die Anzahl der Strecken, aus denen der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1^E\,\mathfrak{G}_2^E$ besteht. Die zweite Gleichung (18.3) ergibt jetzt aus Symmetriegründen:

$$3H(\mathfrak{G}_\lambda^E, \mathfrak{G}_\lambda^E, \mathfrak{E}_\mu^E) = \mathfrak{F}_\lambda B_\mu, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2;\ \lambda \neq \mu), \tag{18.8}$$

wo F_λ der Flächeninhalt von $\mathfrak{G}_\lambda^E$, und

$$B_\mu = \sin\sigma \int N_\mu\, dp. \tag{18.9}$$

Hier ist dp die Schiebungsdichte der Schnittgeraden $E_1 E_2$ in der Ebene E_μ, N_μ die Anzahl der Strecken, die $E_1 E_2$ mit $\mathfrak{G}_u^E$ gemeinsam hat. Für einen *Eibereich* $\mathfrak{G}_u^E$ ist $\int N_\mu\, dp = \int dp$ die *Breite* von $\mathfrak{G}_\mu^E$ in E_μ in der Normalenrichtung der Schnittgeraden $E_1 E_2$. (18.8), (18.9) gelten auch für $\sigma = 0$.

§ 5.

Drei Gebilde.

Im folgenden sollen drei Gebilde betrachtet werden: ein festes und zwei unabhängig voneinander parallel verschiebbare. Wir beschränken uns dabei auf jene Fälle, die gegenüber dem Fall zweier Gebilde grundsätzlich Neues bieten.

19. Drei Flächen. Es sei $\mathfrak{F}_1$ eine feste Fläche, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ zwei Flächen, die unabhängig voneinander parallel verschoben werden können. Die Zahl der Schnittpunkte $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3$ sei n. Es handelt sich dann um die Berechnung von $\int n\, d\overline{\mathfrak{F}}_2\, d\overline{\mathfrak{F}}_3$, erstreckt über alle durch unabhängige

Parallelverschiebung entstehenden Lagen von $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$, bei denen der Durchschnitt $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$ nicht leer ist.

Es sei dO_i das Oberflächenelement, n_i der Normaleinheitsvektor der (gerichtet gedachten) Fläche $\mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$; ds das Bogenelement des Durchschnitts $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, ω der Winkel des Einheitsvektors t der (in geeigneter Weise gerichteten) Tangente von $\mathfrak{C}$ mit n_3, σ der Winkel $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ längs $\mathfrak{C}$. Halten wir zunächst $\mathfrak{F}_2$ fest, so ist nach (10.5):

$$\int n\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_3 = \int |\cos\omega|\, dO_2\, ds, \tag{19.1}$$

und wegen der Grundformel (11.5):

$$\int n\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_3 = \int |\cos\omega|\, dO_3\, ds\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2 = \int |\cos\omega|\,|\sin\sigma|\, dO_1\, dO_2\, dO_3. \tag{19.2}$$

Wegen (12.2) ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\int n\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_3 = \int |\mathcal{E}|\, dO_1\, dO_2\, dO_3}\ ^{24}), \tag{19.3}$$

wenn $\mathcal{E}$ der Rauminhalt des von den drei Einheitsvektoren n_i aufgespannten Parallelflachs ist. Wenn $\mathfrak{F}_3$ ein Bereich in einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist, so kann man aus (19.3) beiderseits den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}_3$ herausheben und kommt so auf (12.3*) zurück.

Wir betrachten noch die besonderen Fälle, die entstehen, wenn mindestens eine der Flächen $\mathfrak{F}_i$ eine Kugel vom Radius Eins ist. Ihr Oberflächenelement werde dann mit $d\,\Omega_i$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, so tritt wegen (10.8) an Stelle von (19.1):

$$\int n\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_3 = 2\pi l, \tag{19.4}$$

wo l die Länge der Schnittkurve $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ ist, und man erhält wegen (13.1) und (19.3):

$$\int n\, d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\, d\,\overline{\mathfrak{K}} = \int |\mathcal{E}|\, dO_1\, dO_2\, d\,\Omega_3 = 2\pi \int |\sin\sigma|\, dO_1\, dO_2. \tag{19.5}$$

Sind $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{K}$ *Kugeln vom Radius Eins*, so ergibt sich aus (13.6) und (19.3):

$$\int n\, d\,\overline{\mathfrak{K}}\, d\,\overline{\mathfrak{K}}' = \int |\mathcal{E}|\, dO_1\, d\,\Omega_2\, d\,\Omega_3 = 2\pi^3 O_1, \tag{19.6}$$

wo O_1 die Oberfläche von $\mathfrak{F}_1$ ist.

20. Die Hauptformel für drei Gebiete. Es seien $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ drei räumliche Gebiete, $\mathfrak{G}_1$ fest, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ unabhängig voneinander parallel verschiebbar. $\mathfrak{F}_i$ sei der Rand von $\mathfrak{G}_i$, O_i und C_i Oberfläche und Gesamtkrümmung von $\mathfrak{F}_i$, V_i und $Z_i = \frac{1}{4\pi} C_i$ Rauminhalt und Zusammen-

---

[24]) Die entsprechende Formel für Komplexe, in anderer Weise abgeleitet, bei W. Blaschke, J. 21, § 6.

hangszahl von $\mathfrak{G}_i$. Ferner sei c die Gesamtkrümmung des Randes des Durchschnittes $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$, $z = \frac{1}{4\pi}\,c$ die Zusammenhangszahl von $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$. Es soll $\mathfrak{I} = \int z\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_3$ berechnet werden, erstreckt über alle Lagen von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$, die aus einer Anfangslage durch unabhängige Parallelverschiebung von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ entstehen und für die der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$ nicht leer ist.

z setzt sich additiv aus Bestandteilen von dreierlei Art zusammen:

1. den Zusammenhangszahlen der Durchschnitte $\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{G}_k\,\mathfrak{G}_l$; $(i, k, l = 1, 2, 3$; zyklisch);
2. den Beiträgen der Kanten $\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{F}_k\,\mathfrak{G}_l$;
3. den Beiträgen der Ecken $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3$.

Für den Beitrag von $\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{G}_k\,\mathfrak{G}_l$ zum Integral $\mathfrak{I}$ findet man mit Hilfe der Methode von Maak (Nr. 3):

$$\mathfrak{I}^{(1)}_{ikl} = Z_i\,V_k\,V_l. \tag{20.1}$$

Ebenso ergibt sich für den Beitrag der Kante $\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{F}_k\,\mathfrak{G}_l$ zum Integral $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{(2)}_{kl} &= \frac{1}{2\pi}\,V_l \int (\mathcal{N}_i + \mathcal{N}_k)\sin^2\frac{\sigma_{ik}}{2}\,dO_i\,dO_k \\ &= 3\,[H(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_k) + H(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_i)]\,V_l.\end{aligned} \tag{20.2}$$

Hier sind $\mathcal{N}_i$, $\mathcal{N}_k$ bezüglich die Normalkrümmungen des Durchschnittes $\mathfrak{C}_l = \mathfrak{F}_i\,\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_k$, σ_{ik} $(0 < \sigma_{ik} < \pi)$ der Winkel der äußeren Normalen von $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_k$ längs $\mathfrak{C}_l$.

Um die Beiträge der Ecken $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3$ zu $\mathfrak{I}$ zu berechnen, führen wir an jeder Ecke P des Randes von $\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2\,\mathfrak{G}_3$ den räumlichen Außenwinkel A ein, d. h. den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks Δ auf der Einheitskugelfläche, das von den Einheitsvektoren n_i der äußeren Normalen von $\mathfrak{F}$ in P bestimmt wird. In P stoßen drei krummlinig begrenzte Seitenflächen S_1, S_2, S_3 zusammen (S_i auf $\mathfrak{F}_i$). Wenn φ_i $(0 < \varphi_i < \pi)$ der Winkel der beiden Kanten von S_i ist, die von P ausgehen, so ist

$$\mathsf{A} = \sigma_{23} + \sigma_{31} + \sigma_{12} - \pi = 2\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3. \tag{20.3}$$

Der Beitrag der Ecken $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3$ zu $\mathfrak{I}$ ist dann

$$6\,K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3) = \frac{1}{4\pi}\int \Sigma\,\mathsf{A}\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_2\,d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = \frac{1}{4\pi}\int \Sigma\,\mathsf{A}\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_3, \tag{20.4}$$

wo die Summe für jede Lage von $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ über alle Schnittpunkte $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2\,\mathfrak{F}_3$ zu erstrecken ist.

Hält man in $K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ zunächst $\mathfrak{G}_2$ fest, so ist wegen (10.4):

$$\int \Sigma\,\mathsf{A}\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_2\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_3 = \int \Sigma\,\mathsf{A}\,|\cos\omega|\,dO_3\,d\,s\,d\,\overline{\mathfrak{F}}_2, \tag{20.5}$$

wo ω der Winkel der geeignet gerichteten Schnittlinie $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ mit der äußeren Normalen von $\mathfrak{F}_2$ und ds das Bogenelement von $\mathfrak{C}$ ist. Die Grundformel (11.5) und (19.3) ergeben jetzt:

$$6K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3) = \frac{1}{4\pi} \int \mathsf{A} \,|\, \mathcal{E} \,|\, dO_1 dO_2 dO_3, \tag{20.6}$$

wo $\mathcal{E}$ dieselbe Bedeutung hat wie in (19.3).

Im ganzen erhält man also als *Hauptformel für drei räumliche Gebiete*[25]:

$$\begin{aligned} \int z\, d\mathfrak{G}_2\, d\mathfrak{G}_3 = {} & Z_1 V_2 V_3 + Z_2 V_3 V_1 + Z_3 V_1 V_2 + 3[V_1 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3) \\ & + V_1 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_2) + V_2 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_1) + V_2 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3) \\ & + V_3 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) + V_3 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_1)] + 6K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3). \end{aligned} \tag{20.7}$$

21. Weitere Integralformeln. Der Wert von $6K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ in besonderen Fällen. Wir geben schließlich noch an, welchen Wert das Glied $6K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ in (20.7) in den wichtigsten besonderen Fällen hat. Dazu beweisen wir zuerst zwei Integralformeln, die auch an und für sich von Interesse sind und von denen die zweite als Verallgemeinerung der in Nr. 14 und 15 abgeleiteten Formeln angesehen werden kann.

Es sei mit denselben Bezeichnungen wie in Nr. 20 $\mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$ der Durchschnitt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Wir wollen dann zeigen, daß folgende Gleichungen gelten:

$$\int H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3)\, d\mathfrak{G}_2 = V_1 H(\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3) + V_2 H(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3), \tag{21.1}$$

$$\begin{aligned} \int H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_{12})\, d\mathfrak{G}_2 = {} & V_1 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_2) + V_2 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_1) \\ & + 2K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3). \end{aligned} \tag{21.2}$$

Die Integrale sind darin bei festen Gebieten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3$ über alle Lagen von $\mathfrak{G}_2$ zu erstrecken, die aus einer Anfangslage durch Parallelverschiebung hervorgehen und für die der Durchschnitt $\mathfrak{G}_{12}$ nicht leer ist.

Zum Beweise von (21.1) bemerken wir, daß sich $H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3)$ nach (17.11) als ein Integral über die Oberfläche des Randes $\mathfrak{F}_{12}$ von $\mathfrak{G}_{12}$ darstellen läßt:

$$H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3) = \frac{1}{6\pi} \int_{\mathfrak{F}_{12}} \mathcal{N}_3 \sin^2 \frac{\sigma_{12,3}}{2}\, dO_3\, dO_{12}. \tag{21.3}$$

Hier ist $\mathcal{N}_3$ die Normalkrümmung der Schnittkurve $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}_{12}$ mit dem Rande $\mathfrak{F}_3$ von $\mathfrak{G}_3$ auf $\mathfrak{F}_3$, $\sigma_{12,3}$ der Winkel von $\mathfrak{F}_{12}$ und $\mathfrak{F}_3$ längs $\mathfrak{C}$ und dO_3, dO_{12} bezüglich die Oberflächenelemente von $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_{12}$. Da die

[25]) Für Komplexe bei W. Blaschke, J. 21, § 6.

Oberfläche von $\mathfrak{F}_{12}$ die Summe der Oberflächen der Durchschnitte $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{F}_2\mathfrak{G}_1$ ist, so gilt in unmittelbar verständlicher Bezeichnungsweise:

$$(21.4)\qquad \frac{1}{6\pi}\int_{\mathfrak{F}_{12}} \mathcal{N}_3 \sin^2\frac{\sigma_{12,3}}{2}\, dO_3\, dO_{12}$$
$$= \frac{1}{6\pi}\int_{\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_2} \mathcal{N}_3 \sin^2\frac{\sigma_{1,3}}{2}\, dO_3\, dO_1 + \frac{1}{6\pi}\int_{\mathfrak{F}_2\mathfrak{G}_1} \mathcal{N}_3 \sin^2\frac{\sigma_{2,3}}{2}\, dO_3\, dO_2.$$

Durch Belegung des Randes $\mathfrak{F}_\lambda$ von $\mathfrak{G}_\lambda$ mit der Gesamtmasse $H_\lambda = \int \mathcal{N}_3 \sin^2\frac{\sigma_{\lambda,3}}{2}\, dO_3\, dO_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$ und Anwendung des Verfahrens von Maak (Nr. 3) ergibt sich (21.1).

Das Integral links in (21.2) setzt sich aus Beiträgen zweierlei Art zusammen:

1. aus den Beiträgen der Durchschnitte $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{F}_2\mathfrak{G}_1$;

2. aus dem Beitrage $2\mathfrak{B}_{12,3}$, der von der Kante an der Schnittlinie $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ herrührt.

Der Beitrag des Durchschnittes $\mathfrak{F}_\lambda\mathfrak{G}_\mu$ $(\lambda, \mu = 1, 2;\ \lambda \neq \mu)$ ist nach (17.11) durch $\frac{1}{6\pi}\int_{\mathfrak{F}_\lambda\mathfrak{G}_\mu} \mathcal{N}_\lambda \sin^2\frac{\sigma_{\lambda,3}}{2}\, dO_3\, dO_\lambda$ gegeben, wo $\mathcal{N}_\lambda$ die Normalkrümmung von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{F}_\lambda$ ist. Anwendung des Verfahrens von Maak auf die beiden Durchschnitte ergibt die beiden ersten Summanden rechts in (21.2). Man erhält also zunächst:

$$(21.5)\qquad \int H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_{12})\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = V_1 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_2) + V_2 H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_1) + 2\mathfrak{B}_{12,3}.$$

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_{12,3} = K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ ist, leite man die Hauptformel (20.7) ab, indem man zunächst $\mathfrak{G}_2$ festhält und $\int z\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3$ auswertet, erstreckt über den Durchschnitt von $\mathfrak{G}_{12}$ und $\mathfrak{G}_3$. Nach (17.12) ist:

$$(21.6)\qquad \int z\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = Z_3 V_{12} + 3H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3) + 3H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_{12}) + Z_{12} V_3,$$

wo Z_{12} und V_{12} Zusammenhangszahl und Rauminhalt von $\mathfrak{G}_{12}$ sind. Nun wird

$$(21.7)\qquad \int z\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_3 = Z_3 \int V_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 + 3\int H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3)\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$$
$$+ 3\int H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_{12})\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 + V_3 \int Z_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2.$$

Hier ist nach Maak (Nr. 3):

$$(21.8)\qquad \int V_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2 = V_1 V_2.$$

Ersetzt man weiter $\int H(\mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_{12}, \mathfrak{G}_3)\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$ nach (21.1), $\int H(\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_{12})\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$ nach (21.5), endlich $\int Z_{12}\, d\,\overline{\mathfrak{G}}_2$ nach der Hauptformel (17.12), so ergibt

sich durch Einsetzen in (21.7) und Vergleich des erhaltenen Ergebnisses mit (20.7):

$$\mathfrak{B}_{1\,2,3} = K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3), \tag{21.9}$$

womit auch (21.2) abgeleitet ist.

Wir verwenden jetzt (21.2) zur Bestimmung des Wertes von $K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ in besonderen Fällen. Ist $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{K}$ *die Einheitskugel*, so geht (21.2) wegen (17.21) über in

$$\int m\, d\,\bar{\mathfrak{G}}_2 = V_1 M_2 + V_2 M_1 + 6\, K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}),$$

wenn die Bezeichnungen wie in Nr. 15 gewählt werden. Durch Vergleich mit (15.4) folgt:

$$6\, K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}) = \tfrac{1}{2} \int \sigma \sin\sigma\, dO_1\, dO_2, \tag{21.10}$$

wo σ den Schnittwinkel $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2$ bedeutet. Ist *auch* $\mathfrak{G}_2$ *die Einheitskugel*, so gibt (15.6):

$$6\, K(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}_1) = \frac{\pi^3}{4} O_1, \tag{21.11}$$

wenn O_1 die Oberfläche von $\mathfrak{F}_1$ ist[26]).

Wenn in (21.2) $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{G}_3^E$ ein Bereich in einer Ebene E ist, F_3 sein Flächeninhalt, so folgt aus (18.3), (20.3), (14.6), (14.7):

$$6K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3^E) = F_3 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \int |\psi|\, |\mathcal{E}|\, dO_1\, dO_2 = 2\, F_3 \int H(\mathfrak{G}_1^E, \mathfrak{G}_2^E)\, d\bar{E}\, d\bar{E}', \tag{21.12}$$

wo $\mathfrak{G}_\lambda^E$ der Schnittbereich $\mathfrak{G}_\lambda E$ ist, und die übrigen Größen dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 14. Insbesondere ist nach (14.8):

$$6\, K(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G}_3^E) = \frac{\pi}{2} F_3 \int L_1\, d\bar{E}, \tag{21.13}$$

wo L_1 der Umfang von $\mathfrak{G}_1^E$ ist. Entartet endlich $\mathfrak{G}_3^E$ in eine Strecke $\mathfrak{S}$, so ergibt sich aus (18.7) und (21.2):

$$6\, K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{S}) = 0^{27}). \tag{21.14}$$

---

[26]) Da $K(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ in $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ symmetrisch ist, so gilt
$K(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = K(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}, \mathfrak{G})$.

[27]) [Anmerkung bei der Korrektur, 12. April 1937.] Zur Ausdehnung des Begriffes des gemischten Flächeninhaltes auf nicht konvexe Bereiche (Nr. 4) vgl. auch H. Geppert, Über den Brunn-Minkowskischen Satz. Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 238–254.

(Eingegangen am 27. Februar 1937.)

Integralgeometrie 25.

Über die Körper konstanter Helligkeit.

[Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung[1]].

Von

L. Berwald in Prag.

Als *Körper konstanter Helligkeit* bezeichnet man jene Eikörper, deren sämtliche Normalrisse gleichen Flächeninhalt haben[2]). Sie bilden ein Gegenstück zu den Eikörpern, deren sämtliche Normalrisse gleichen Umfang besitzen. Diese sind nach Minkowski identisch mit den Körpern konstanter Breite[3]).

Eine verwandte Kennzeichnung der Körper konstanter Helligkeit ergibt sich aus J. 24 (7.5). Es sei $\mathfrak{K}$ ein Eikörper mit inneren Punkten. E_Ω sei eine (gerichtete) Ebene, Ω der Vektor des Bildpunktes ihrer Normalen auf der Einheitskugel, L_E der Umfang des Durchschnittes $\mathfrak{K} E_\Omega$, $d\bar{E}_\Omega$ die Schiebungsdichte von E_Ω (J. 24, Nr. 2). Wir bilden das Integral

$$\Lambda_\Omega = \int L_E \, d\bar{E}_\Omega, \tag{1}$$

erstreckt über alle Ebenen E_Ω mit der festen Normalenrichtung Ω, für die $\mathfrak{K} E_\Omega$ nicht leer ist. Durchläuft Ω die Einheitskugel, so wird Λ_Ω eine Funktion des Ortes auf der Einheitskugel. Diese ist gerade:

$$\Lambda_\Omega = \Lambda_{-\Omega}, \tag{2}$$

da unter der Schiebungsdichte $d\bar{E}_\Omega$ der absolute Betrag zu verstehen ist (J. 24, Nr. 2). Es sei ferner F_Ω der Flächeninhalt des Normalrisses von $\mathfrak{K}$ auf eine Ebene mit der Normalenrichtung Ω. Dann ist F_Ω bei ver-

---

[1]) L. Berwald und O. Varga, Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum, Math. Zeitschr. 42, S. 710, (zitiert: J. 24).

[2]) G. Herglotz, Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptachsen, Sitzungsber. Akad. Wien 111 (1902), S. 1332—1391; W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916 (zitiert: Bl.), bes. S. 151—154; vgl. auch T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934 (zitiert: B.-F.), S. 140 f.

[3]) H. Minkowski, Über die Körper konstanter Breite, Rec. math. Soc. math. Moscou 25 (1904), S. 505—508; Ges. Abh. 2 (1911), S. 277—279. Vgl. Bl., S. 150 f; B.-F., § 15.

änderlichem Ω eine gerade Funktion auf der Einheitskugel. Ferner gilt nach J. 24 (7.5)

$$\Lambda_\Omega = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} F_\varphi \, d\varphi, \tag{3}$$

wenn F_φ der Flächeninhalt des Normalrisses von $\mathfrak{K}$ auf eine zu E_Ω senkrechte Ebene E_φ mit der Normalenrichtung φ ist.

Die Kennzeichnung der Körper konstanter Helligkeit, die hier gegeben werden soll, ist nun diese:

Die Körper konstanter Helligkeit sind identisch mit den Eikörpern, für die Λ_Ω konstant ist.

Zunächst folgt nämlich aus (3) und

$$F_\Omega - a = 0, \qquad (a = \text{konst.}) \tag{4}$$

unmittelbar

$$\Lambda_\Omega - a\pi = 0. \tag{5}$$

Daß auch die Umkehrung gilt, ersieht man so: (3) sagt aus, daß Λ_Ω das *Kreisintegral* der stetigen geraden Funktion $\frac{1}{2}F_\Omega$ auf der Einheitskugel ist, d. h. aus $\frac{1}{2}F_\Omega$ durch Integration nach der Bogenlänge des auf dem Einheitsvektor Ω senkrechten Großkreises gewonnen wird. Daher ist $\Lambda_\Omega - a\pi$ das Kreisintegral der geraden Funktion $\frac{1}{2}(F_\Omega - a)$ auf der Kugel. Aus dem Verschwinden des Kreisintegrals einer stetigen geraden Funktion auf der Kugel folgt aber das Verschwinden der Funktion[4]).

Bemerken wir noch folgendes:

Bekanntlich ist F_Ω Stützfunktion eines Eikörpers. Ferner ist das Kreisintegral der Stützfunktion eines Eikörpers wieder Stützfunktion eines Eikörpers[5]). Aus (2) und (3) ergibt sich somit:

Λ_Ω ist Stützfunktion eines Eikörpers, der den Aufpunkt zum Mittelpunkt hat.

Eine andere Kennzeichnung der Körper konstanter Helligkeit hat Herr W. Blaschke[3]) angegeben.

---

[4]) Minkowski, a. a. O.; P. Funk, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, Math. Ann. 74 (1913), S. 278—300; B.-F., S. 136—138.

[5]) Vgl. etwa Bl., S. 148, 150; B.-F., S. 45, 67.

(Eingegangen am 27. Februar 1937.)

Eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen.

Von

Alfred Stöhr in Berlin.

1. Ist A eine Menge von natürlichen Zahlen, h eine natürliche Zahl, so definiert man nach Herrn Schnirelmann $h \cdot \mathsf{A}$ als die Menge aller derjenigen Zahlen, die sich als Summe von höchstens h Summanden aus A darstellen lassen. Ist $h \cdot \mathsf{A} = \Omega$, wo Ω die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnet, so heißt nach Herrn Rohrbach[1]) A eine Basis h-ter Ordnung für Ω. Mit $k(n)$ sei für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Zahlen aus A, die $\leqq n$ sind, bezeichnet. Die Zahl 0 möge stets in die Basis A aufgenommen werden und werde bei der Anzahlberechnung mitgezählt. Herr Rohrbach hat nun u. a. bewiesen: Für vorgegebenes h und $\varepsilon > 0$ läßt sich eine (von ε abhängige) Basis h-ter Ordnung A für Ω so angeben, daß für genügend großes n

$$k(n) < n^{\frac{1}{h}+\varepsilon}$$

gilt. Es ist nun in Analogie zu den von Herrn Rohrbach im Endlichen gewonnenen Ergebnissen zu vermuten, daß sich ein A mit $h \cdot \mathsf{A} = \Omega$ und

$$k(n) = O\left(n^{\frac{1}{h}}\right) \tag{1}$$

konstruieren läßt. Dies nachzuweisen ist der Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit. Es wird ferner gezeigt, daß bei Übertragung der Rohrbachschen Definition der erweiterten Basis[2]) auf unendliche Teilmengen von Ω sich erweiterte Basen h-ter Ordnung für Ω konstruieren lassen, für die ebenfalls $k(n) = O\left(n^{\frac{1}{h}}\right)$ gilt.

Man wird bemerken, daß von den Eigenschaften der natürlichen Zahlen nur die Möglichkeit einer Schreibung mit „Ziffern" benutzt wird, und daß für diese Ziffern das Problem, eine Basis aufzustellen, gelöst sein muß. Auch die Eigenschaften der Addition werden fast alle nicht benutzt. Das Konstruktionsverfahren für eine Basis läßt sich somit auch auf sehr viel allgemeinere Bereiche sinngemäß übertragen.

---

[1]) H. Rohrbach, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschr. 42 (1937), S. 1—30.

[2]) H. Rohrbach, l. c., S. 3 und 26.

2. Zum Aufstellen einer Basis mit den angekündigten Eigenschaften dient folgendes allgemeine Konstruktionsverfahren:

Man bestimme zunächst eine natürliche Zahl $g > 1$ und h Mengen $\mathsf{B}^{(\nu)}$ von nichtnegativen ganzen Zahlen, die $g-1$ nicht überschreiten, $(\nu = 1, 2, \ldots, h)$ so, daß jede Zahl c mit $0 \leqq c \leqq g-1$ in der Form

$$c = \sum_{\nu=1}^{h} b^{(\nu)} \qquad (b^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)}) \tag{2}$$

darstellbar ist. Sodann sei $\mathsf{A}^{(\nu)}$ die Menge aller Zahlen

$$a^{(\nu)} = \sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho^{(\nu)} g^\varrho \qquad (b_\varrho^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)}) \tag{3}$$

mit beliebig großem r, also die Menge aller im Ziffernsystem mit der Grundzahl g geschriebenen Zahlen, die nur Ziffern aus $\mathsf{B}^{(\nu)}$ aufweisen. Schließlich sei A die Vereinigungsmenge der h Mengen $\mathsf{A}^{(\nu)}$.

Satz 1. *Jede so konstruierte Teilmenge* A *von* Ω *ist eine Basis* h*-ter Ordnung für* Ω.

Beweis. Sei z eine beliebige Zahl aus Ω und $z = \sum_{\varrho=0}^{r} c_\varrho g^\varrho$ ihre Darstellung im Ziffernsystem mit der Grundzahl g. Für jede Ziffer c_ϱ stelle man nach (2) eine Zerlegung $c_\varrho = \sum_{\nu=1}^{h} b_\varrho^{(\nu)}$ her. Dann ist

$$z = \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho^{(\nu)} g^\varrho = \sum_{\nu=1}^{h} a^{(\nu)}$$

eine Darstellung von z als Summe von h Zahlen aus A.

3. Die auf diese Weise gewonnenen Basen A genügen noch nicht allgemein der Bedingung $k(n) = O(n^{\frac{1}{h}})$. Dazu müssen vielmehr noch geeignete Forderungen an die Ziffernmengen $\mathsf{B}^{(\nu)}$ gestellt werden. Man überlegt sich leicht, daß es notwendig und hinreichend ist, wenn alle $\mathsf{B}^{(\nu)}$ gleichviel, etwa t, Zahlen enthalten und $g = t^h$ gesetzt wird. Die Beweismethode wird in Nr. 5 an einem Beispiel gezeigt.

4. Für die Abschätzung von $k(n)$ sei bemerkt, daß, wenn $k^{(\nu)}(n)$ für natürliches n die Anzahl der Zahlen $a^{(\nu)}$ aus $\mathsf{A}^{(\nu)}$ mit $a^{(\nu)} \leqq n$ bezeichnet, offenbar

$$k(n) \leqq \sum_{\nu=1}^{h} k^{(\nu)}(n)$$

ist. Die Bestimmung der $k^{(\nu)}(n)$ wird auf folgende Weise vereinfacht: Es sei t_ν die Anzahl der Zahlen in der Ziffernmenge $\mathsf{B}^{(\nu)}$. Man ordne sie nach wachsender Größe und numeriere sie in dieser Reihenfolge mit $0, 1, 2, \ldots, t_\nu - 1$. Ersetzt man dann in der Darstellung (3) einer Zahl $a^{(\nu)}$ aus $\mathsf{A}^{(\nu)}$ die Ziffer $b_\varrho^{(\nu)}$ durch die ihr zugewiesene Nummer m_ϱ, so bildet

die Zuordnung

$$(4) \qquad a^{(\nu)} = \sum_{\varrho=0}^{r} b_\varrho^{(\nu)} g^\varrho \longleftrightarrow \sum_{\varrho=0}^{r} m_\varrho t_\nu^\varrho = l^{(\nu)}$$

die Menge $\mathsf{A}^{(\nu)}$ eineindeutig und anordnungstreu auf die Menge der natürlichen Zahlen mit Hinzunahme der Null ab. Die Zahl $a^{(\nu)}$ ist also, wenn die Zahlen von $\mathsf{A}^{(\nu)}$ nach wachsender Größe angeordnet werden, die $(l^{(\nu)}+1)$-te Zahl von $\mathsf{A}^{(\nu)}$.

5. Wir betrachten nun folgendes spezielle Beispiel zum obigen Konstruktionsverfahren ($h \geqq 2$ angenommen): Man setze

$$g = 2^h \text{ und } \mathsf{B}^{(\nu)} = \{0, 2^{\nu-1}\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, h).$$

Die Forderung (2) läßt sich damit bekanntlich erfüllen.

In diesem Beispiel haben die h Mengen $\mathsf{A}^{(\nu)}$ paarweise nur das Element 0 gemeinsam. Daher gilt hier

$$(5) \qquad k(n) = \sum_{\nu=1}^{h} k^{(\nu)}(n) - h + 1.$$

Bestimmt man nun für $n > 0$ eine ganze Zahl s so, daß

$$2^{hs} \leqq n \leqq 2^{h(s+1)} - 1$$

ist, so folgt unter Benutzung von (5)

$$\frac{k(n)}{\sqrt[h]{n}} \leqq \frac{k(2^{h(s+1)}-1)}{\sqrt[h]{2^{hs}}} = \frac{h \cdot 2^{s+1} - h + 1}{2^s} < 2h.$$

Die gewünschte Abschätzung (1) ist hier also durch die genauere

$$k(n) < 2h\sqrt[h]{n}$$

ersetzt. Man kann auch diese Abschätzung noch weiter verbessern, indem man ein ganzzahliges s' aus dem Intervall $1 \leqq s' \leqq h$ so bestimmt, daß

$$(6) \qquad 2^{hs+s'-1} \leqq n \leqq 2^{hs+s'} - 1$$

ist. Dann ist bei Berücksichtigung von (4) und (5)

$$\frac{k(n)}{\sqrt[h]{n}} \leqq \frac{k(2^{hs+s'}-1)}{\sqrt[h]{2^{hs+s'-1}}} = \frac{s' 2^{s+1} + (h-s') 2^s - h + 1}{2^s \sqrt[h]{2^{s'-1}}}$$

$$< \frac{2s' + h - s'}{\sqrt[h]{2^{s'-1}}} \leqq \alpha \sqrt[h]{2}\, h,$$

also

$$(7) \qquad k(n) < \alpha \sqrt[h]{2}\, h \sqrt[h]{n} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{2}{e \log 2} < 1{,}062.$$

Für kleine h kann man

$$\operatorname{Max} \frac{s'+h}{\sqrt[h]{2^{s'-1}}} \quad \text{für} \quad s' = 1, 2, \ldots, h$$

direkt bestimmen und so für die rechte Seite von (7) noch einen genaueren Wert erhalten. Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit liegt in einer Verfeinerung der Intervalleinteilung (6). Es ist mir jedoch nicht gelungen, die von Herrn Rohrbach im Endlichen erreichte obere Schranke h zu gewinnen.

Für spezielle Werte von n läßt sich, da $\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{\sqrt[h]{n}}$ im allgemeinen nicht existiert, $k(n)$ natürlich günstiger abschätzen. So ist in dem eben behandelten Beispiel für die unendlich vielen speziellen $n = 2^{hs} - 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{k(n)}{\sqrt[h]{n}} = \frac{h\,2^s - h + 1}{\sqrt[h]{2^{hs} - 1}} < h.$$

6. Ein zweites, besonders durchsichtiges Beispiel für das Konstruktionsverfahren von Nr. 2 erhält man, wenn man

$g = 10^h$ und $\mathsf{B}^{(\nu)} = \{0, 10^{\nu-1}, 2\cdot 10^{\nu-1}, \ldots, 9\cdot 10^{\nu-1}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, h)$

wählt. Für $h = 2$ z. B. besteht dann $\mathsf{A}^{(1)}$ aus allen Zahlen, die, im Dezimalsystem geschrieben, an der Zehner-, Tausender-, Hunderttausender- usw. Stelle Nullen, an den übrigen Stellen die Ziffern von 0 bis 9 in beliebiger Verteilung aufweisen; bei $\mathsf{A}^{(2)}$ ist die Zuordnung der Ziffern zu den Stellen genau umgekehrt. Jede Zahl läßt sich aber trivialer Weise als Summe von zwei solchen Zahlen schreiben, z. B. $110\,485\,567 = 100\,080\,507 + 10\,405\,060$. Auch hier erkennt man leicht die Gültigkeit der Abschätzung (1).

7. In Übertragung der Rohrbachschen Definition einer erweiterten Basis für eine endliche Menge natürlicher Zahlen[3]) werde nun definiert:

Ein System A von nichtnegativen ganzen Zahlen heiße eine erweiterte Basis h-ter Ordnung $(h > 1)$ für Ω, wenn es für jede ganze Zahl l mit $1 \leqq l \leqq h$ und jedes $z \in \Omega$ eine Darstellung

$$z = \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu - \sum_{\nu=l+1}^{h} a_\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu \in \mathsf{A}$$

gibt.

Satz 2. *Ist $\bar{b}^{(\nu)}$ die größte Zahl der Menge $\mathsf{B}^{(\nu)}$, so sind die nach dem allgemeinen Konstruktionsverfahren gewonnenen Basen erweiterte Basen h-ter Ordnung, wenn*

$$1.\ \bar{b}^{(\nu)} - b^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)} \quad \textit{für} \quad b^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)},$$

$$2.\ \sum_{\nu=1}^{h} \bar{b}^{(\nu)} \leqq g - 1$$

gilt.

---

[3]) H. Rohrbach, l. c., S. 3 u. 26.

Offenbar genügt es, folgenden etwas allgemeineren Satz zu beweisen:

Satz 2'. *Es sei* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ *mit* $\varepsilon_\nu = \pm 1$ *eine beliebige Verteilung von Vorzeichen, bei der nicht alle* $\varepsilon_\nu = -1$ *sind. Wenn dann*

$$1.\quad \bar{b}^{(\nu)} - \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} b^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)} \quad \text{für} \quad b^{(\nu)} \in \mathsf{B}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, h)$$

und

$$2.\quad \sum_{\nu=1}^{h} \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \bar{b}^{(\nu)} < g - 1$$

gilt, so existiert für jedes $z \in \Omega$ *eine Darstellung*

$$z = \sum_{\nu=1}^{h} \varepsilon_\nu a^{(\nu)} \text{ mit } a^{(\nu)} \in \mathsf{A}^{(\nu)} \subset \mathsf{A}.$$

Beweis. Ist $z \in \Omega$ gegeben, so bestimme man eine ganze Zahl r so, daß

$$z' = z + \sum_{\varrho=0}^{r} \left(\sum_{\nu=1}^{h} \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \bar{b}^{(\nu)} \right) g^\varrho < g^{r+1}$$

ist; wegen Bedingung 2. ist das möglich. Für z' gibt es im Ziffernsystem mit der Grundzahl g eine Darstellung $z' = \sum_{\varrho=0}^{r} c'_\varrho g^\varrho$. Hierfür bestimme man, wie im Beweis von Satz 1 gezeigt, eine Darstellung

$$z' = \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{\varrho=0}^{r} b'^{(\nu)}_\varrho g^\varrho \qquad (b'^{(\nu)}_\varrho \in \mathsf{B}^{(\nu)}).$$

Dann ist

$$z = \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{\varrho=0}^{r} \left(b'^{(\nu)}_\varrho - \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \bar{b}^{(\nu)} \right) g^\varrho = \sum_{\nu=1}^{h} \varepsilon_\nu \sum_{\varrho=0}^{r} \left(\frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \bar{b}^{(\nu)} + \varepsilon_\nu b'^{(\nu)}_\varrho \right) g^\varrho.$$

$$b^{(\nu)}_\varrho = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} \bar{b}^{(\nu)} + \varepsilon_\nu b'^{(\nu)}_\varrho = \begin{cases} b'^{(\nu)}_\varrho & \text{für } \varepsilon_\nu = 1 \\ \bar{b}^{(\nu)} - b'^{(\nu)}_\varrho & \text{für } \varepsilon_\nu = -1 \end{cases}$$

ist daher nach Voraussetzung bzw. nach Bedingung 1. in $\mathsf{B}^{(\nu)}$ enthalten und folglich

$$a^{(\nu)} = \sum_{\varrho=0}^{r} b^{(\nu)}_\varrho g^\varrho \in \mathsf{A}^{(\nu)}.$$

Nach Satz 2 sind die Beispiele in Nr. 5 und 6 zugleich erweiterte Basen h-ter Ordnung für Ω. Man überlegt sich übrigens leicht, daß die Bedingung 2. von Satz 2 im Falle $k(n) = O(n^{\frac{1}{h}})$ stets erfüllt ist.

(Eingegangen am 28. Januar 1937.)

Bemerkung zu meiner Arbeit über Bairesche Funktionen.

Von

F. Hartogs in München.

Erst nach Drucklegung meiner Arbeit[1]) erhielt ich durch eine freundliche Mitteilung des Herrn A. Rosenthal Kenntnis davon, daß Herr H. Fried (Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), S. 301—314) folgenden Satz bewiesen hat: „Ist auf einer Menge $\mathfrak{B}$, die höchstens eine Menge $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ in $\mathfrak{A}$ ist, eine Bairesche Funktion f von höchstens α-ter Klasse gegeben, so gibt es eine Folge von Baireschen Funktionen von geringerer als α-ter Klasse auf $\mathfrak{A}$, die in allen Punkten von $\mathfrak{B}$ gegen f konvergiert, während sie in allen Punkten von $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ divergiert." Dieser Satz ist — abgesehen von dem auf die Divergenz bezüglichen Passus — in Satz VI meiner Arbeit offenbar als Spezialfall enthalten. Nimmt man nun aber den zuerst von H. J. Fischer (Diss. Heidelberg 1933, S. 99) bewiesenen Erweiterungssatz (in meiner Arbeit als 4. Erweiterungssatz bezeichnet) hinzu, wonach jede auf einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ der Menge $\mathfrak{A}$ definierte Bairesche Funktion der Klasse α stets zu einer Funktion erweitert werden kann, welche auf einer gewissen, $\mathfrak{M}$ enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ von höchstens dem Typus $\mathfrak{D}_{\alpha+2}$ (relativ zu $\mathfrak{A}$) ebenfalls noch von der Klasse α ist, so ist ersichtlich, daß der Satz VI meiner Arbeit auch als Folgerung aus jenen beiden Sätzen aufgefaßt werden kann (deren Beweise allerdings erheblich weitläufiger sind, wie schon der Umstand erkennen läßt, daß beim Ausspruch und bei meinem Beweis des Satzes VI Borelsche Mengen überhaupt nicht benutzt werden).

[1]) Math. Zeitschr. 42 (1936), S. 144—150.

(Eingegangen am 11. Februar 1937.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche[1]).

III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Beitrag III ordnet sich nicht unmittelbar in das in der Vorbemerkung von Beitrag I aufgestellte Programm ein: Wir beschränken uns keineswegs auf ganz abgeschlossene Integritätsbereiche, es werden nur ganze Ideale betrachtet, und es handelt sich nicht um Teilbarkeitsfragen. Aber die benutzten Beweismethoden tragen gerade an den wichtigsten Stellen einen stark arithmetischen[2]) Charakter, so daß die Aufnahme der Arbeit in die Beitragsreihe wohl gerechtfertigt sein dürfte.

Das Endziel der Untersuchung ist eine einfache Neubegründung und gleichzeitig möglichst weitgehende Verallgemeinerung der bekannten „Dimensionstheorie" der Polynomringe[3]). Es bedeute $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* den Ring aller Polynome bzw. aller formalen (oder, je nach den Umständen auch: aller konvergenten) Potenzreihen in endlich oder unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ über einem beliebigen Koeffizientenkörper K; der Oberring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* wird als „ganzer algebraischer" bzw. „ganzer analytischer" Funktionenring (über K) bezeichnet, wenn $\mathfrak{R}$, d. h. jedes Element α aus $\mathfrak{R}$, von $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* ganz abhängt, also einer Gleichung $\alpha^m + p_1\ \alpha^{m-1} + \ldots + p_m = 0$ mit Koeffizienten p_i aus $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* genügt. Ist die Anzahl der Variabeln x_i endlich, etwa gleich n, so schreiben wir $\mathfrak{R}$ den „Transzendenzgrad n" zu[4]); ist die Anzahl der x_i unendlich, so setzen wir den Transzendenz-

[1]) Vgl. Beitrag I und Beitrag II, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577 bzw. 665—679. Vgl. ferner meinen „Idealbericht" [Idealtheorie. Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete Bd. 4, Heft 3 (1935)].

[2]) Unter Sätzen von ausgesprochen „arithmetischem" Charakter verstehe ich Sätze, die in den Gedankenkreis der „multiplikativen", an Dedekind anknüpfenden Richtung der Idealtheorie und der Bewertungstheorie gehören. (Über den Unterschied zwischen „additiver" und „multiplikativer" Idealtheorie, vgl. z. B. die Einleitung des Idealberichts).

[3]) Zur Dimensionstheorie der Polynom- und Potenzreihenringe vgl. Anm. [8]).

[4]) Im algebraischen (aber nicht im analytischen!) Fall handelt es sich einfach um den Steinitzschen Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von $\mathfrak{R}$ über K. Vgl. Anm. [27]).

grad von $\mathfrak{R}$ gleich ω [5]). Die „Dimension" eines Primideals $\mathfrak{p}$ definieren wir in der in der Idealtheorie üblichen Weise: $\mathfrak{p}$ wird die Dimension d zugeschrieben, wenn mindestens eine $(d+1)$-gliedrige, aber keine $(d+2)$-gliedrige mit $\mathfrak{p}$ beginnende Primoberidealkette $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots$ existiert; gibt es beliebig lange mit $\mathfrak{p}$ beginnende Primoberidealketten, so hat man es mit einem Primideal von unendlich großer Dimension zu tun. — Der „Dimension" stellen wir den „Dimensionsdefekt" gegenüber, der in genau entsprechender Weise erklärt wird, wobei nur überall das Wort „Primoberideal" durch das Wort „Primunterideal" zu ersetzen ist. Die Primideale vom Dimensionsdefekt 1, also die „unmittelbaren" Primoberideale des Nullideals werden auch als „minimale" Ringprimideale bezeichnet [6]). Auf Grund dieser Definitionen erhält man für die Primideale eines ganzen algebraischen oder ganzen analytischen Funktionenringes $\mathfrak{R}$ die folgenden Sätze:

Hat das Primideal $\mathfrak{p}$ den endlichen Dimensionsdefekt μ, so hat jedes unmittelbare Primober- bzw. Primunterideal von $\mathfrak{p}$ genau den Dimensionsdefekt $\mu+1$ bzw. $\mu-1$. Ist a irgend ein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element, so ist jedes minimale Primoberideal von $\mathfrak{p}+(a)$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ (und damit vom Dimensionsdefekt $\mu+1$) [7]). Bei endlichem Transzendenzgrad n besitzt jedes beliebige Primideal $\mathfrak{p}$ einen endlichen Dimensionsdefekt μ und eine endliche Dimension $\nu = n - \mu$; dabei wird die Dimension ν gleich dem Transzendenzgrad des Restklassenrings $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, also gleich der geometrischen Dimension der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Nullstellenmannigfaltigkeit.

Das heißt aber: Alle Hauptsätze der Dimensionstheorie der Polynomringe in endlich vielen Variabeln [8]) gelten für beliebige ganze algebraische

---

[5]) ω ist dabei nicht als Ordnungszahl gedacht, sondern einfach ein Symbol für „unendlich" ohne Unterscheidung der Mächtigkeit. Vgl. übrigens Anm. [30]).

[6]) Bei der angegebenen Definition der minimalen Ringprimideale ist es wesentlich, daß wir, wie im folgenden immer, in einem *Integritätsbereich* arbeiten. Im übrigen vgl. zu den Definitionen des Textes die ausführliche Formulierung in 3! — Die Bevorzugung des „Dimensionsdefektes" vor der „Dimension", die übrigens dem Standpunkt von Lasker und Macaulay entspricht — vgl. dazu insbesondere: F. S. Macaulay, Modern algebra and polynomial ideals, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1) Bd. 39 (1934), S. 35 —, ist notwendig, wenn man sich von der Beschränkung auf endlichen Transzendenzgrad freimachen will. Lasker und Macaulay bezeichnen den Dimensionsdefekt als „Rang". Mir kam es auf eine Bezeichnung an, die den engen Zusammenhang mit der Dimension betont.

[7]) Über die große Bedeutung, die dieser „Hauptidealsatz" im Spezialfall der Polynomringe für die algebraische Geometrie besitzt, vgl. z. B.: Van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie VI. Math. Annalen 110 (1934), § 2.

[8]) Die von vornherein sehr plausible Tatsache, daß bei einem Primideal $\mathfrak{p}$ im Polynomring $\mathfrak{P}$ die idealtheoretisch festgelegte Dimension mit der geometrischen Dimension der zugehörigen Nullstellenmannigfaltigkeit übereinstimmt, wurde wohl

oder ganze analytische Funktionenringe von endlichem Transzendenzgrad. Bei den ganzen Funktionenringen vom Transzendenzgrad ω bleiben alle die Sätze in Gültigkeit, die allein mit Hilfe des Dimensionsdefektes formuliert werden können, vorausgesetzt, daß man sich auf Primideale von endlichem Dimensionsdefekt beschränkt. — Dagegen kann man leicht durch Beispiele zeigen, daß für die Primideale von unendlichem Dimensionsdefekt, sogar bei endlicher Dimension, i. a. kein zu den oben angeführten Sätzen irgendwie ähnliches Theorem mehr gilt. Das gewonnene Ergebnis darf also als abschließend bezeichnet werden.

Für die Beweise braucht man aus der Theorie der Polynom- und Potenzreihenringe nur zwei einfache Hilfssätze, nämlich A. den wohlbekannten Satz, daß in $\mathfrak{P}^*$ (Π^*) jedes Element bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt von endlich vielen Primelementen dargestellt werden kann, und B. die folgende, bei $\mathfrak{P}^*$ fast selbstverständliche, bei Π^* leicht auf den „Weierstraßschen Vorbereitungssatz" zurückführbare Bemerkung: Sind (p), (q) zwei Primhauptideale aus $\mathfrak{P}^*$ (Π^*), so gibt es stets einen Polynomring $\overline{\mathfrak{P}}^*$ (Potenzreihenring $\overline{\Pi}^*$), von dem die beiden Restklassenringe $\mathfrak{P}^*/(p)$ und $\mathfrak{P}^*/(q)$ — ($\Pi^*/(p)$ und $\Pi^*/(q)$) — ganz abhängen; hat dabei $\mathfrak{P}^*$ (Π^*), den endlichen Transzendenzgrad n, so besitzt $\overline{\mathfrak{P}}^*$ ($\overline{\Pi}^*$) stets den Transzendenzgrad $n-1$. — Dagegen muß, was besonders hervorgehoben zu werden verdient, von der Gültigkeit des O-Satzes (Noetherschen Teilerkettensatzes) für die Polynom- und Potenzreihenringe in endlich vielen Variabeln nirgends Gebrauch gemacht werden.

---

zuerst von E. Noether abstrakt formuliert und bewiesen. (Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie. Math. Annalen 90 (1923), S. 223—261. — Einen sehr einfachen Beweis lieferte dann die Nullstellentheorie van der Waerdens. (Zur Nullstellentheorie der Polynomideale. Math. Annalen 96 (1926), S. 183—208. Vgl. auch: Moderne Algebra, Bd. II, § 90). — Für den Satz, daß in $\mathfrak{P}$ *jedes* unmittelbare Primoberideal eines μ-dimensionalen Primideals $\mathfrak{p}$ genau die Dimension $\mu-1$ besitzt, und vor allem für den noch weiter gehenden „Hauptidealsatz", sind meines Wissens bis jetzt nur zwei Beweise gegeben worden: Der eine stammt von van der Waerden [Zur algebraischen Geometrie I. Math. Annalen 108 (1933), S. 120], und verwendet die van der Waerdensche Multiplizitätstheorie der endlichen algebraischen Gleichungssysteme. Der andere, rein idealtheoretische Beweis wurde von mir in Nr. 17 des Idealberichts skizziert. — Im Text ist die Beweisanordnung ähnlich wie im Idealbericht. Der wesentliche Unterschied von den bisherigen Beweisen liegt darin, daß jede unnötige Endlichkeitsvoraussetzung, insbesondere jeder offene oder verschleierte Rückgriff auf den „O-Satz" (den Noetherschen „Teilerkettensatz") vermieden wird. Was die *Potenzreihenringe* angeht, so findet sich in der bisherigen Literatur nur der Beweis, daß ebenso wie bei den Polynomringen die Dimension eines beliebigen Primideals stets der Dimension der zugehörigen Nullstellenmannigfaltigkeit gleich ist. Vgl. hierzu: W. Rückert, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Annalen 107 (1932), S. 259—281. — Die Rückertschen Überlegungen sind nullstellentheoretischer Art und wesentlich umständlicher als die Betrachtungen des Textes.

Bei der Auswertung der Hilfssätze A. und B. muß man an einer Stelle (und zwar bei der Untersuchung von $\mathfrak{p} + (a)$), die Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen heranziehen. Im übrigen hat man immer wieder vier allgemeine und einfache Primidealsätze[9]) anzuwenden, die im ersten Teile des Beitrags abgeleitet werden und auch außerhalb des Zusammenhanges mit der Dimensionstheorie selbständige Bedeutung besitzen.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$. Dann beweist man zunächst durch leichte Rechnungen ohne jede einschränkende Voraussetzung über $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$: 1. Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ gibt es in $\mathfrak{S}$ mindestens ein „darüberliegendes" Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$, das der Durchschnittsgleichung $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ genügt. 2. Zwei verschiedene Primideale aus $\mathfrak{S}$, die über demselben Primideal aus $\mathfrak{R}$ liegen, sind stets gegenseitig prim. 3. Ist $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ Primoberideal des Primideals $\mathfrak{q}$, so existiert in $\mathfrak{S}$ zu jedem über $\mathfrak{q}$ liegenden Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}$ mindestens ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primoberideal $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Dagegen stößt man auf überraschende Schwierigkeiten, wenn man versucht, den letzten Satz umzukehren, also die folgende Behauptung zu beweisen: 4. Ist $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ Primoberideal von $\mathfrak{q}$, so existiert in $\mathfrak{S}$ zu jedem über $\mathfrak{p}$ liegendem Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ mindestens ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal $\tilde{\mathfrak{q}}$. Oder, was trotz des ganz anderen Wortlautes auf dasselbe herauskommt: Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{R}$, so liegen alle minimalen Primoberideale des Erweiterungsideals $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ über $\mathfrak{q}$. — Es zeigt sich, daß dieser vierte Satz nur bei ganz abgeschlossenem Ausgangsring $\mathfrak{R}$ allgemein gilt[10]), und auch unter dieser einschränkenden Voraussetzung erfordert der Beweis etwas mehr als eine einfache Rechnung. Am besten zieht man die Galoissche Theorie heran und stützt sich auf Überlegungen, wie sie in ähnlicher Weise in der Theorie der algebraischen Erweiterungen bewerteter Körper auftreten. Andererseits ist unter den vier Primidealsätzen der letzte weitaus der wichtigste. In erster Linie auf ihm beruht die selbständige Bedeutung der ganzen Satzgruppe. Seine Brauchbarkeit auf rein arithmetischem Gebiet wird sich bei der Untersuchung der unendlichen algebraischen Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen im folgenden Beitrag zeigen.

1. Die drei ersten Primidealsätze.

Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ Integritätsbereiche mit den Quotientenkörpern $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, und zwar sei $\mathfrak{S}$ *ein ganz abhängiger Oberring von* $\mathfrak{R}$. Weitere

[9]) Die vier Primidealsätze sind (unter Beschränkung auf ganz abgeschlossene Integritätsbereiche) bereits in Nr. 48 des Idealberichts angegeben, und der in Nr. 2 des Textes ausgeführte Beweis des vierten und wichtigsten Primidealsatzes ist dort schon skizziert.

[10]) Vgl. hierzu die Kleindruckbemerkung Idealbericht 49!

Voraussetzungen werden zunächst nicht gemacht; insbesondere dürfen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ sowohl gleich als auch verschieden sein, und es braucht — anders als in den beiden ersten Beiträgen — weder $\mathfrak{R}$ noch $\mathfrak{S}$ ganz abgeschlossen zu sein. Von einem Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{S}$ sagen wir, es *„liege über dem Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$", wenn $\tilde{\mathfrak{p}}$ der Durchschnittsgleichung $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ genügt. — Das Ziel der ersten Nummer ist der Beweis der folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Zu jedem Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *gibt es in* $\mathfrak{S}$ *stets mindestens ein darüber liegendes Primideal* $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Satz 2. *Zwei Primideale* $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ *und* $\tilde{\mathfrak{p}}_2$ *aus* $\mathfrak{S}$, *die über demselben Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *liegen, sind stets gegenseitig prim.*

Satz 3. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *das Primideal* $\mathfrak{p}$ *Oberideal des Primideals* $\mathfrak{q}$, *so gibt es in* $\mathfrak{S}$ *zu jedem über* $\mathfrak{q}$ *liegenden Primideal* $\tilde{\mathfrak{q}}$ *stets mindestens ein über* $\mathfrak{p}$ *liegendes Primoberideal* $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Es sei $\mathfrak{R}_1$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primidealquotientenring [11]), und es werde $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_1$ gesetzt. Dann ist $\mathfrak{p}_1$ das einzige maximale Primideal aus $\mathfrak{R}_1$, es wird $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{R}$, und es entsprechen die sämtlichen Primideale von $\mathfrak{R}_1$ eindeutig umkehrbar den Primunteridealen von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$. (Ist $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}$ ein zusammengehöriges Primidealpaar, so wird $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{R}$). In genau derselben Weise lassen sich die sämtlichen Primideale aus $\mathfrak{S}_1$ eindeutig umkehrbar den über $\mathfrak{p}$ liegenden Primidealen aus $\mathfrak{S}$ zuordnen. Schließlich sieht man sofort, daß $\mathfrak{S}_1$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}_1$ ist, und daß aus $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ [12]) stets $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ folgt.

Auf Grund dieser Bemerkungen dürfen wir weiterhin bei den Beweisen durchweg stillschweigend $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ voraussetzen. Wir zeigen zunächst, daß Satz 1 richtig ist, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha]$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion eines einzigen Elementes α entsteht. Dabei haben wir uns nur zu überzeugen, daß unmöglich $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ werden kann. Ist nämlich $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}$, so besitzt $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ mindestens ein Primoberideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ [13]), und aus $\mathfrak{p} \subseteq (\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$ folgt unter der Voraussetzung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ stets $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$.

---

[11]) $\mathfrak{R}_1$ besteht aus der Menge aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a und b in $\mathfrak{R}$, b nicht in $\mathfrak{p}$). Vgl. etwa Beitrag I, S. 551.

[12]) $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ soll bedeuten, daß $\mathfrak{S}$ aus allen Polynomen in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$ besteht. Dabei brauchen die α_i über $\mathfrak{R}$ nicht algebraisch unabhängig zu sein. — Dagegen wird später in 4., wenn wir von einem Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[a_1, a_2, \ldots]$ reden, algebraische Unabhängigkeit der a_i über K vorausgesetzt.

[13]) Aus einfachen Wohlordnungsschlüssen folgt nämlich die Existenz mindestens eines maximalen Oberideals $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$, das die 1 nicht enthält. $\tilde{\mathfrak{p}}$ ist dann ein maximales Primideal, das (außer dem in diesem Beitrag nicht unter die Ideale mitgerechneten Gesamtring $\mathfrak{S}$) kein echtes Oberideal besitzt. Vgl. hierzu Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen 101 (1929), S. 723—744.

Es sei nun $A(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ eine Gleichung niedrigsten Grades, durch die α von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt. Dann läßt sich jedes Element γ aus $\mathfrak{S}$ als Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades in α über $\mathfrak{R}$ darstellen, $\gamma = c_1 \alpha^{n-1} + \ldots + c_n$; gehört insbesondere γ zu $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$, so kann man die Darstellung stets so wählen, daß alle Koeffizienten c_i in $\mathfrak{p}$ liegen. Ist also $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$, d. h. 1 Element von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$, so muß eine Gleichung $Q(\alpha) = p_1 \alpha^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \alpha + p_n = 0$ mit $p_1 \equiv \ldots \equiv p_{n-1} \equiv 0 (\mathfrak{p})$, $p_n \equiv 1 \not\equiv 0 (\mathfrak{p})$ gelten. Da $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$ ist, also alle Nichteinheiten von $\mathfrak{R}$ umfaßt, ist p_n in $\mathfrak{R}$ Einheit, die Koeffizienten von

$$A(x) - a_n \cdot p_n^{-1} \cdot Q(x) = x (x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) = x \cdot B(x),$$
$$(b_i = a_i - a_n \cdot p_n^{-1} \cdot p_i \, (i = 1, \ldots, n-1)),$$

liegen also alle in $\mathfrak{R}$. Aus $A(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ und der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{S}$ folgt aber $B(\alpha) = 0$ und damit ein Widerspruch gegen die Minimaleigenschaft der Gleichung $A(\alpha) = 0$. Die Annahme $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ war also falsch, Satz 1 gilt sicher für $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\alpha]$.

Es sei jetzt $\mathfrak{S}$ beliebig. Ist $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$, so gilt eine Gleichung $1 = p_1 \alpha_1 + \ldots + p_n \alpha_n$, bei der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zu $\mathfrak{S}$ und $p_1, \ldots, p_n$ zu $\mathfrak{p}$ gehören, und es wird $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'$ für $\mathfrak{S}' = \mathfrak{R}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Die Gleichung $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'$ ist aber unmöglich, denn es gibt in $\mathfrak{S}'$ mindestens ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal $\mathfrak{p}'$, wie man sofort erkennt, wenn man die Ringkette $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_{i-1}[\alpha_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$) bildet, und n-mal den für einfache Erweiterungen bereits bewiesenen Satz 1 anwendet. Es ist also stets $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}$, und daraus folgt nach einer oben bereits ausgeführten Überlegung unmittelbar die Allgemeingültigkeit von Satz 1.

Aus Satz 1 ergibt sich, daß $\mathfrak{S}$ stets mindestens soviel Primideale enthält wie $\mathfrak{R}$, und daß insbesondere $\mathfrak{S}$ stets gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ein *echter* Integritätsbereich (also kein Körper) ist. Andererseits muß nach einem elementaren algebraischen Satz jeder von einem Körper ganz abhängige Integritätsbereich selbst ein Körper sein. Aus diesen Bemerkungen schließt man mühelos:

Ein über dem Primideal $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *liegendes Primideal* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *aus* $\mathfrak{S}$ *ist dann und nur dann in* $\mathfrak{S}$ *maximal, wenn* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}$ *maximal ist.*

Man hat nur zu beachten, daß $\mathfrak{S}/\tilde{\mathfrak{p}}$ als ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden kann, und daß ein maximales Primideal dadurch ausgezeichnet ist, daß sein Restklassenring einen Körper darstellt. — Das letzte Ergebnis zeigt insbesondere, daß zwei verschiedene Primideale aus $\mathfrak{S}$, die über demselben maximalen Primideal aus $\mathfrak{R}$ liegen, stets gegenseitig prim sein müssen. — Es sei ferner in $\mathfrak{R}$ nur ein einziges maximales

Primideal $\mathfrak{p}$ vorhanden, $\mathfrak{q}$ sei ein Primunterideal von $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primideal aus $\mathfrak{S}$. Dann gibt es nach einem bekannten Satz stets ein in $\mathfrak{S}$ maximales Primoberideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$[13]), und da gleichzeitig mit $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{S}$ auch $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ maximal sein muß, wird unter unseren Voraussetzungen $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$, es existiert also sicher in $\mathfrak{S}$ ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primoberideal von $\tilde{\mathfrak{q}}$. Die Sätze 2 und 3 gelten demnach für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und damit nach unseren früheren grundsätzlichen Überlegungen allgemein. — Satz 2 läßt sich offenbar auch so aussprechen:

Liegt $\tilde{\mathfrak{p}}$ über $\mathfrak{p}$, so liegt jedes echte Primoberideal (Primunterideal) $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{\mathfrak{p}}$ über einem echten Primoberideal (Primunterideal) $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$.

In dieser Fassung wird der Satz regelmäßig von uns benutzt werden. — Das, überraschenderweise negative, Gegenstück zu Satz 3 lautet:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{R}$ Primunterideal des Primideals $\mathfrak{p}$, so gibt es nicht immer in $\mathfrak{S}$ zu jedem über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal $\tilde{\mathfrak{q}}$*[10]).

Zum Beweise von Satz 4 genügt die Angabe eines Beispiels. Es sei $\mathfrak{R}_0$ der Ring aller Polynome in den Variabeln x, y, z über einem beliebigen Körper. $u = \xi$ sei eine bestimmte Nullstelle des über $\mathfrak{R}_0$ irreduzibeln Polynoms $u^2 + z\,u - x\,y$, und es bedeute η das Element $x \cdot \xi$, das offenbar der Gleichung $\eta^2 + x\,z\,\eta - x^3\,y = 0$ genügt. Schließlich werde $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\eta]$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_0[\xi] = \mathfrak{R}[\xi]$ gesetzt. — Man erkennt dann leicht[14]):

In $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ sind die Ideale $\mathfrak{q}_1 = (y, \eta)$, $\mathfrak{q}_2 = (y, \eta + x\,z)$, $\mathfrak{p} = (x, y, \eta)$ bzw. $\tilde{\mathfrak{q}}_1 = (y, \xi)$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2 = (y, \xi + z)$, $\tilde{\mathfrak{p}}_1 = (x, y, \xi)$, $\tilde{\mathfrak{p}}_2 = (x, y, \xi + z)$ sämtlich Primideale; dabei liegen $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{p}}_2$ beide über $\mathfrak{p}$, während $\tilde{\mathfrak{q}}_1$ über $\mathfrak{q}_1$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2$ über $\mathfrak{q}_2$ liegt. — Schließlich zeigt man mühelos[14]), daß außer $\tilde{\mathfrak{q}}_1$ ($\tilde{\mathfrak{q}}_2$) kein einziges Primideal aus $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{R}$ gerade den Durchschnitt $\mathfrak{q}_1$ ($\mathfrak{q}_2$) besitzt. Das heißt aber: Man erhält ein Beispiel zu Satz 4, wenn man $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}_2$ (oder auch $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}_1$) setzt.

2. Der vierte Primidealsatz.

Der negative Satz 4 bedeutet für die Theorie der ganz abhängigen Erweiterungen eines Integritätsbereiches einen unerwarteten und sehr

---

[14]) Die Verifikationen sind ganz einfach. Z. B.: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\xi]$ ist isomorph zum Restklassenring $\mathfrak{P}/(p)$ des Polynomrings $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}_0[u]$ nach dem Primelement $p = u^2 + z\,u - x\,y$. Daraus folgt aber sofort, daß z. B. $\tilde{\mathfrak{q}}_1 = (y, \xi)$ in $\mathfrak{S}$ Primideal sein muß, weil offenbar (y, u) in $\mathfrak{P}$ ein Primoberideal von (p) ist. Auf die gleiche Weise erkennt man den Primidealcharakter aller übrigen in Betracht kommenden Ideale. — Ferner ergibt sich z. B. aus $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}_1 = (y, x \cdot \xi)$ unmittelbar, daß in $\mathfrak{S}$ das Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}$ das Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}_1 = (y, \xi)$ enthalten muß, weil x zwar in $\mathfrak{R}$, aber nicht in $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}_1$ vorkommt; aus $\tilde{\mathfrak{q}} \supsetneq \tilde{\mathfrak{q}}_1$, $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{q}}_1 \cap \mathfrak{R} = (y, x \cdot \xi)$ folgt aber $\tilde{\mathfrak{q}} = \tilde{\mathfrak{q}}_1$ nach Satz 2.

schmerzlichen Schönheitsfehler. Es ist daher sehr wichtig, daß das Bild ein anderes wird, wenn man von einem *ganz abgeschlossenen* Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ ausgeht.

Es sei also von jetzt ab $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen, und es bedeute zunächst $\mathfrak{L}$ einen endlichen Normalkörper über dem Quotientenköper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ den Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}$. Zwei Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ aus $\mathfrak{L}$ sollen „konjugiert" heißen, wenn ein Automorphismus ϑ von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ existiert, der $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$ überführt, $\mathfrak{M}' = \vartheta \times \mathfrak{M}$. Sind insbesondere $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ Ringe bzw. Primideale, so sprechen wir von konjugierten Ringen bzw. Primidealen. $\mathfrak{S}$ ist offenbar nur zu sich selbst konjugiert, $\vartheta \times \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ für beliebiges ϑ. Dementsprechend führt jeder Automorphismus ϑ jedes Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{S}$ wieder in ein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}' = \vartheta \times \tilde{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{S}$ über. Zwei derart konjugierte Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}'$ liegen offenbar stets über demselben Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$. Es gilt aber auch umgekehrt, und das ist das wesentliche:

Satz 5. *Zwei Primideale* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *und* $\tilde{\mathfrak{p}}'$ *aus* $\mathfrak{S}$, *die über demselben Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *liegen, sind stets konjugiert*[15]).

Wie in 1. dürfen wir uns beim Beweise auf die Betrachtung des Falles $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ beschränken, wir dürfen also voraussetzen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ darstellt[16]). Es sei nun $\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}_1$ ein bestimmtes über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal aus $\mathfrak{S}$, und es seien $\tilde{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_s$ seine Konjugierten (die ja wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ sicher nur in endlicher Anzahl vorhanden sind); $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ bedeute den Primidealquotientenring $\mathfrak{S}_{\tilde{\mathfrak{p}}_i}$.

Dann wird $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_s$.

In der Tat, ist α beliebig aus $\mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_s$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ jedenfalls ein γ, das zu keinem der Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ gehört, und für das $\alpha \cdot \gamma$ ein Element aus $\mathfrak{S}$ wird[17]). Aus Isomorphiegründen müssen dann auch die Konjugierten $\gamma_2, \ldots, \gamma_t$ von $\gamma = \gamma_1$ durchweg Elemente aus $\mathfrak{S}$ sein, die in keinem einzigen $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ liegen. Für hinreichend großes r wird dann $c = (\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_t)^r$ ein nicht in $\mathfrak{p}$ vorkommendes Element aus $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{R}$,

---

[15]) Zum Konjugiertensatz Idealbericht 48!

[16]) Man beachte: $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{R}_1$ ist der Ring aller von $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ ganz abhängigen Elementen aus $\mathfrak{L}$; sind $\tilde{\mathfrak{p}}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}'$ zwei über $\mathfrak{p}$ liegende Primideale aus $\mathfrak{S}$, so liegen $\tilde{\mathfrak{p}}_1 = \tilde{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{S}_1$ und $\tilde{\mathfrak{p}}_1' = \tilde{\mathfrak{p}}' \cdot \mathfrak{S}_1$ über dem in $\mathfrak{R}_1$ maximalen Primideal $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}_1$, und aus $\tilde{\mathfrak{p}}_1' = \vartheta \times \tilde{\mathfrak{p}}_1$ folgt $\vartheta \times \tilde{\mathfrak{p}} = \vartheta \times (\tilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \mathfrak{S}) = \tilde{\mathfrak{p}}' \cap \mathfrak{S}$ wegen $\vartheta \times \mathfrak{S} = \mathfrak{S}$.

[17]) Wegen $\alpha \subset \mathfrak{S}_i$ gibt es sicher in $\mathfrak{S}$ ein nicht zu $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ gehöriges γ_i, für das $\alpha \cdot \gamma_i \subset \mathfrak{S}$ wird, ferner existiert stets ein in $\prod_{k \neq i} \tilde{\mathfrak{p}}_k$, aber nicht in $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ liegendes δ_i $(i = 1, \ldots, s)$. Man setze $\gamma = \gamma_1 \delta_1 + \ldots + \gamma_s \delta_s$! — Nach genau der gleichen Methode ist später das zu $\tilde{\mathfrak{p}}$, aber zu keinem $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ gehörige Element ξ zu konstruieren.

also eine Einheit aus $\mathfrak{R}$ und damit erst recht eine Einheit aus $\mathfrak{S}$. Aus $\alpha \cdot c \subset \mathfrak{S}$ folgt daher sofort $\alpha \subset \mathfrak{S}$.

Gäbe es nun in $\mathfrak{S}$ außer $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_s$ noch ein weiteres über $\mathfrak{p}$ liegendes und damit nach Satz 2 notwendig maximales Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}$, so gäbe es auch eine *Nichteinheit* ξ, die zwar zu $\tilde{\mathfrak{q}}$, aber zu keinem $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ gehörte[17]), und das ist unmöglich, da ξ^{-1} in $\mathfrak{S}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{S}_s = \mathfrak{S}$ liegen müßte.

Wir lassen jetzt die einschränkenden Voraussetzungen über $\mathfrak{S}$ und seinen Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ fallen und zeigen allgemein:

Satz 6. *Ist im ganz abgeschlossenen Ringe $\mathfrak{R}$ das Primideal $\mathfrak{q}$ Unterideal des Primideals $\mathfrak{p}$, so gibt es in $\mathfrak{S}$ zu jedem über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$ immer ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal $\tilde{\mathfrak{q}}$.*

Beim Beweise, bei dem wir natürlich wieder annehmen dürfen, daß $\mathfrak{p}$ das einzige maximale Primideal von $\mathfrak{R}$ ist, erledigen wir zunächst zwei Spezialfälle:

a) Es sei (wie bei Satz 5) $\mathfrak{L}$ endlicher Normalkörper über $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$. Dann wählen wir in $\mathfrak{S}$ irgend ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primideal $\tilde{\mathfrak{q}}'$ und dazu ein über $\mathfrak{p}$ liegendes Primoberideal $\tilde{\mathfrak{p}}'$ (vgl. Satz 1 und Satz 3). Nach Satz 5 sind $\tilde{\mathfrak{p}}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}'$ konjugiert $-\tilde{\mathfrak{p}} = \vartheta \times \tilde{\mathfrak{p}}'-$, und in Gestalt von $\tilde{\mathfrak{q}} = \vartheta \times \tilde{\mathfrak{q}}'$ erhält man ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal von $\tilde{\mathfrak{p}}$.

b)[18]) Es sei $\mathfrak{L}$ der zu $\mathfrak{K}$ gehörige algebraisch abgeschlossene Körper, $\mathfrak{S}$ der Ring aller von $\mathfrak{R}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$. Dann bilden wir nach Steinitz eine wohlgeordnete Körperkette $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_\tau, \ldots, \mathfrak{K}_{\tau^*} = \mathfrak{L}$, bei der $\mathfrak{K}_\tau$ stets im Nichtlimesfall eine endliche normale Erweiterung von $\mathfrak{K}_{\tau-1}$, im Limesfalle dagegen den Vereinigungskörper aller $\mathfrak{K}_\sigma (\sigma < \tau)$ darstellt. Setzen wir weiter: $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_0$; $\widetilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}_{\tau^*}$, $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\tau^*}$; $\mathfrak{p}_\tau = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{K}_\tau$, $\mathfrak{S}_\tau = \widetilde{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{K}_\tau$, so brauchen wir zum Beweise von Satz 6 nach dem Schema der transfiniten Induktion nur zu zeigen:

Angenommen, es sei für jedes $\sigma < \tau$ ein Primunterideal $\mathfrak{q}_\sigma$ von $\mathfrak{p}_\sigma$ in $\mathfrak{S}_\sigma$ so festgelegt, daß $\mathfrak{q}_\sigma \cap \mathfrak{K}_\varrho = \mathfrak{q}_\varrho$ wird für beliebiges $\varrho < \sigma$. Dann kann man auch in $\mathfrak{S}_\tau$ ein Primunterideal $\mathfrak{q}_\tau$ von $\mathfrak{p}_\tau$ finden, das für jedes $\sigma < \tau$ der Gleichung $\mathfrak{q}_\tau \cap \mathfrak{K}_\sigma = \mathfrak{q}_\sigma$ genügt.

Ist nun τ Nichtlimeszahl, also $\mathfrak{K}_\tau$ endliche normale Erweiterung von $\mathfrak{K}_{\tau-1}$, so wird die Existenz des gesuchten $\mathfrak{q}_\tau$ durch das Ergebnis von a) gewährleistet. Ist aber τ Limeszahl, so hat man $\mathfrak{q}_\tau$ einfach gleich der Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{q}_\sigma (\sigma < \tau)$ zu setzen.

---

[18]) Der unter b) durchgeführte transfinite Induktionsschluß ist natürlich überflüssig, wenn man sich auf *endliche* algebraische Oberkörper von $\mathfrak{K}$ beschränkt. In c) ist dann unter $\mathfrak{K}^*$ einfach ein endlicher den Körper $\mathfrak{L}$ umfassender Normalkörper über $\mathfrak{K}$ zu verstehen.

c) Im allgemeinsten Falle sei $\mathfrak{K}^*$ der zu $\mathfrak{L}$ (und damit auch zu $\mathfrak{K}$) gehörige algebraisch abgeschlossene Körper, $\mathfrak{S}^*$ der Ring aller von $\mathfrak{S}$ (und damit auch von $\mathfrak{R}$) ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}^*$. Nach Satz 1 gibt es in $\mathfrak{S}^*$ ein über $\tilde{\mathfrak{p}}$ und damit auch über $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}^*$, und nach b) besitzt $\tilde{\mathfrak{p}}^*$ ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal $\tilde{\mathfrak{q}}^*$. Unter diesen Umständen wird aber $\tilde{\mathfrak{q}} = \tilde{\mathfrak{q}}^* \cap \mathfrak{S}$ ein über $\mathfrak{q}$ liegendes Primunterideal von $\tilde{\mathfrak{q}}$[19]).

3. Anwendungen; Dimension und Dimensionsdefekt.

Unter einer Primoberidealkette oder kurz „*Primidealkette*“ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ im Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ verstehen wir eine Folge von Primidealen, bei der $\mathfrak{p}_{i+1}$ jeweils ein echtes Oberideal von $\mathfrak{p}_i$ darstellt ($i = 1, \ldots, m-1$). Dem Primideal $\mathfrak{p}$ wird die „*Dimension*“ bzw. der „*Dimensionsdefekt*“ μ zugeschrieben, wenn keine mit $\mathfrak{p}$ beginnende bzw. endigende Primidealkette in $\mathfrak{R}$ mehr als $\mu + 1$, mindestens eine derartige Kette aber genau $\mu + 1$ verschiedene Glieder besitzt. Gibt es beliebig lange Primidealketten mit dem Anfangs- bzw. Endglied $\mathfrak{p}$, so setzen wir die Dimension bzw. den Dimensionsdefekt von $\mathfrak{p}$ gleich ω[5]). Die Primideale vom Dimensionsdefekt 1, also diejenigen Primideale, die außer (0) kein echtes Primunterideal besitzen, heißen „*minimale*“ Primideale von $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primoberideal des Primideals $\mathfrak{q}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ minimal ist, daß also zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ kein weiteres Primideal eingeschoben werden kann, so bezeichnen wir $\mathfrak{p}$ als „unmittelbares“ Primoberideal von $\mathfrak{q}$ und entsprechend $\mathfrak{q}$ als „unmittelbares“ Primunterideal von $\mathfrak{p}$.

Es sei jetzt wieder $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$; es sollen die Zusammenhänge untersucht werden, die zwischen den Dimensionen der Primideale von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bestehen. Zunächst ergibt sich unmittelbar aus Satz 2:

Ist $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \tilde{\mathfrak{p}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_m$ eine Primidealkette in $\mathfrak{S}$, so bilden die „unter“ den $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ liegenden Primideale $\mathfrak{p}_i = \tilde{\mathfrak{p}}_i \cap \mathfrak{R}$ ($i = 1, \ldots, m$) eine Primidealkette in $\mathfrak{R}$. Hat $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{S}$ die Dimension (den Dimensionsdefekt) μ, so ist die Dimension (der Dimensionsdefekt) von $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ mindestens gleich μ.

---

[19]) Auf Grund von 2. kann man leicht einen tieferen Einblick in die Art der Konstruktion des am Schlusse von 1. angegebenen Gegenbeispiels gewinnen. $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{S}$ sind dort ganz abgeschlossen, und es ist der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{S}$ normal vom Grade 2 über dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}_0$. Die Primideale $\mathfrak{p}^{(0)} = (x, y)$ und $\mathfrak{q}^{(0)} = (y)$ in $\mathfrak{R}_0$ sind so gewählt, daß über ihnen in $\mathfrak{S}$ je zwei (untereinander konjugierte) Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{p}}_2$ bzw. $\tilde{\mathfrak{q}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{q}}_2$ liegen, wobei $\tilde{\mathfrak{q}}_1$ nur in $\tilde{\mathfrak{p}}_1$, $\tilde{\mathfrak{q}}_2$ nur in $\tilde{\mathfrak{p}}_2$ enthalten ist. — Die Möglichkeit der Konstruktion des Beispiels zu Satz 4 beruht nun einfach auf dem Umstand, daß man einen nicht ganz abgeschlossenen Zwischenring $\mathfrak{R}$ zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{S}$ so einschieben kann, daß zwar $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{R} \neq \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{R}$, aber $\tilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{p}}_2 \cap \mathfrak{R}$ wird.

Aus Satz 3 bzw. Satz 6 folgt darüber hinaus:

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ *eine Primidealkette aus* $\mathfrak{R}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ *ein über* $\mathfrak{p}_1$ *liegendes Primideal aus* $\mathfrak{S}$, *so gibt es in* $\mathfrak{S}$ *stets mindestens eine Primidealkette* $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_m$, *bei der für jedes* i *jeweils* $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ *über* $\mathfrak{p}_i$ *liegt.*

Hat $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}$ *die Dimension* μ, *so hat auch jedes über* $\mathfrak{p}$ *liegende Primideal* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *in* $\mathfrak{S}$ *die Dimension* μ.

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ *eine Primidealkette aus dem ganz abgeschlossenen Ring* $\mathfrak{R}$, $\tilde{\mathfrak{p}}_m$ *ein über* $\mathfrak{p}_m$ *liegendes Primideal aus* $\mathfrak{S}$, *so gibt es in* $\mathfrak{S}$ *stets eine Primidealkette* $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_m$, *bei der für jedes* i *jeweils* $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ *über* $\mathfrak{p}_i$ *liegt.*

Hat $\mathfrak{p}$ *im ganz abgeschlossenen Ringe* $\mathfrak{R}$ *den Dimensionsdefekt* μ, *so hat auch jedes über* $\mathfrak{p}$ *liegende Primideal* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *in* $\mathfrak{S}$ *den Dimensionsdefekt* μ, *und es ist insbesondere* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *dann und nur dann in* $\mathfrak{S}$ *minimal, wenn* $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{R}$ *minimal ist.*

Es sei ferner $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{S}$ Primoberideal des Primideals $\tilde{\mathfrak{q}}$, und es werde $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{R}$ gesetzt. Dann ergibt sich sofort aus Satz 2: Ist $\mathfrak{p}$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{q}$, so muß notwendig auch $\tilde{\mathfrak{p}}$ unmittelbares Primoberideal von $\tilde{\mathfrak{q}}$ sein. — Ebenso einfach zeigt man durch Übergang zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$; $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{\mathfrak{q}}$, $\tilde{\mathfrak{p}}/\tilde{\mathfrak{q}}$ und Anwendung des letzten Teiles von Satz 8: Ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ ganz abgeschlossen, oder hängt wenigstens $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ von einem ganz abgeschlossenen Ringe ganz ab, so kann $\tilde{\mathfrak{p}}$ nur dann unmittelbares Primoberideal von $\tilde{\mathfrak{q}}$ sein, wenn $\mathfrak{p}$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{q}$ ist. — Es wäre sehr erfreulich, wenn in dem letzteren Satz die über $\mathfrak{R}$ gemachte Voraussetzung durch die einfachere Forderung ersetzt werden könnte, daß $\mathfrak{R}$ selbst ganz abgeschlossen sein soll. Indessen ist in dieser Hinsicht mit den Sätzen 1 bis 8 allein nichts zu machen, und es scheint auch — zum mindesten auf den ersten Blick — nicht möglich zu sein, durch Vertiefung der zum Beweise von Satz 5 benutzten gruppentheoretischen Überlegungen zu der gewünschten Verschärfung zu gelangen. Wir stehen also hier vor einer vorerst noch offenen Frage.

Die folgenden Betrachtungen führen zu einer praktisch gut brauchbaren Umformung des grundlegenden Satzes 6. Das Primideal $\mathfrak{p}$ soll wie üblich „*minimales Primoberideal von* $\mathfrak{a}$“[20]) heißen, wenn zwar $\mathfrak{p}$ selbst, aber kein echtes Primunterideal von $\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält. Dann gilt:

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus dem ganz abgeschlossenen Ringe* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ *ein ganz abhängiger Oberring von* $\mathfrak{R}$, *so ist die Menge der minimalen Primoberideale von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *identisch mit der Menge aller derjenigen Primideale aus* $\mathfrak{S}$, *die über den minimalen Primoberidealen von* $\mathfrak{a}$ *liegen.*

---

[20]) Der Begriff des „minimalen Primoberideals“ muß natürlich streng von dem des „unmittelbaren Primoberideals“ unterschieden werden!

In der Tat, daß $\tilde{\mathfrak{p}}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ sein muß, wenn $\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich aus Satz 2, und Satz 6 zeigt, daß $\tilde{\mathfrak{p}}$ kein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ sein kann, wenn $\mathfrak{p}$ ein nichtminimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ ist. — Umgekehrt folgt aus Satz 9 fast unmittelbar Satz 6; man hat nur $\mathfrak{a}$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ zu spezialisieren und die wohlbekannte Tatsache zu beachten, daß jedes beliebige Primoberideal von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ mindestens ein minimales Primoberideal enthält[21]).

Die Gleichwertigkeit der Sätze 6 und 9 bildet die Grundlage eines zweiten, allerdings nicht ganz allgemeinen Beweises von Satz 6, der sich im Kerne bereits bei Schmeidler findet[22]), und auf den wir hier seines elementaren Charakters wegen kurz eingehen wollen. — Es sei

$$\alpha = \Sigma\, p_i \gamma_i^{(1)} \qquad (p_i \subset \mathfrak{p},\ \gamma_i^{(1)} \subset \mathfrak{S})$$

ein Element aus $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$, und es seien $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Relativkonjugierten von $\alpha = \alpha_1$ über dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ des ganz abgeschlossenen Ausgangsringes $\mathfrak{R}$. Dann ist $\alpha_\nu = \Sigma\, p_i \gamma_i^{(\nu)}$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, wobei $\gamma_i^{(\nu)}$ jeweils zu $\gamma_i^{(1)}$ konjugiert ist, und infolgedessen ebenso wie $\gamma_i^{(1)}$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt. Auf Grund dieser Bemerkung überlegt man sich leicht:

Es sei β ein Element aus $\mathfrak{S}$, zu dem ein nicht im Primideal $\mathfrak{p}$ enthaltenes Element a aus $\mathfrak{R}$ so bestimmt werden kann, daß $a \cdot \beta = \alpha \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Dann liegen in der Gleichung niedrigsten Grades

$$\beta^n + q_1 \beta^{n-1} + \ldots + q_n = 0,$$

der β über $\mathfrak{K}$ genügt, die Koeffizienten q_i alle in $\mathfrak{p}$, es ist also $\beta^n \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$, und es muß infolgedessen β in jedem minimalen Primoberideal von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ enthalten sein. — Angenommen nun, es besäße $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nur endlich viele minimale Primoberideale $\tilde{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{p}}_s$, und es sei etwa $\tilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{q}$ ein

---

[21]) Vgl. Idealbericht 3., sowie die in Anm. [13]) zitierte Arbeit.

[22]) Über Verzweigungspunkte bei algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlicher. J. f. Math. **167** (1931), S. 248—263. (Siehe insbesondere S. 249 f.). — Schmeidler betrachtet den Spezialfall, daß $\mathfrak{K}$ einen Polynomring mit Körperkoeffizienten, $\mathfrak{S}$ den Ring aller von $\mathfrak{K}$ ganz abhängigen Elemente aus einer endlichen algebraischen Erweiterung $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ darstellt. Außerdem beschränkt er sich (unnötigerweise) auf „transformierte" Ideale, um die Theorie der „Elementarteilerform" heranziehen zu können. — Im übrigen spricht Schmeidler von der „Ungemischtheit" des Ideals $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$. Nach dem üblichen Sprachgebrauch wäre darunter zu verstehen, daß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ eine Primärkomponentenzerlegung $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{q}}_1 \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{q}}_t$ besitzt, bei der die zu den Primäridealen $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ gehörigen Primideale $\tilde{\mathfrak{p}}_i$ *alle* über $\mathfrak{p}$ liegen und damit minimale Primoberideale von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ sind. Aber diese schärfere Behauptung wird durch die Schmeidlerschen Überlegungen nicht bewiesen, und ich sehe selbst bei den speziellen von Schmeidler betrachteten Ringen keinen Weg, auf dem man den Beweis mit Aussicht auf Erfolg in Angriff nehmen könnte.

echtes Primoberideal von $\mathfrak{p}$. Bedeutet dann b ein zu $\mathfrak{q}$ aber nicht zu $\mathfrak{p}$, γ ein zu $\tilde{\mathfrak{p}}_2 \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{p}}_s$ aber nicht zu $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ gehöriges Element, so muß $(b \cdot \gamma)^r = a \cdot \beta$ wegen $b \cdot \gamma \subset \tilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \ldots \cap \tilde{\mathfrak{p}}_s$ für hinreichend großes r in $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ liegen[21]), während $a = b^r$ nicht in $\mathfrak{p}$ und $\beta = \gamma^r$ nicht in $\tilde{\mathfrak{p}}_1$ enthalten ist. — Die Annahme $\tilde{\mathfrak{p}}_1 \cap \mathfrak{R} \neq \mathfrak{p}$ führt somit zu einem Widerspruch, d. h. aber:

Unsere Überlegungen zeigen die Richtigkeit von Satz 9 und damit die von Satz 6 für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ *aus dem ganz abgeschlossenen Ringe* $\mathfrak{R}$ *unter der Voraussetzung, daß in dem ganz abhängigen Oberring* $\mathfrak{S}$ *das Erweiterungsideal* $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ *nur endlich viele verschiedene minimale Primoberideale besitzt.*

Die Endlichkeitsvoraussetzung ist notwendig, um die Existenz eines Elementes γ zu sichern, das in allen minimalen Primoberidealen von $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ mit Ausnahme eines einzigen enthalten ist[17]). Sie ist sicher erfüllt, wenn für $\mathfrak{S}$ der O-Satz gilt, also z. B. dann, wenn $\mathfrak{R}$ den Ring aller Polynome in endlich vielen Variabeln mit Körperkoeffizienten, $\mathfrak{L}$ einen *endlichen* algebraischen Oberkörper von $\mathfrak{R}$ darstellt. In solchen Fällen ist vielleicht der auf Satz 9 gegründete zweite Beweis von Satz 6 deshalb empfehlenswert, weil bei ihm die explizite Heranziehung der Galoisschen Theorie vermieden wird. Im übrigen möchte ich persönlich dem ersten, in 2. dargestellten Beweis nicht nur wegen seiner Allgemeingültigkeit den Vorzug geben, sondern auch deshalb, weil der „Konjugiertensatz", auf dem er aufbaut, unbedingt schon an sich Beachtung verdient.

4. Ringe aus ganzen algebraischen oder ganzen analytischen Funktionen.

Es sei K ein beliebiger Körper, von dem wir nur voraussetzen, daß er unendlich viele Elemente[23]) enthält. $\mathfrak{P}^* = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ bzw. $\Pi^* = \mathsf{K}\{x_1, x_2, \ldots\}$ sei der Ring aller Polynome bzw. aller formalen Potenzreihen über K in endlich oder abzählbar unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$. Die Beschränkung auf das höchstens Abzählbare dient nur zur Vereinfachung der Bezeichnung, im übrigen kann man sich mühelos von ihr frei machen. Dagegen bedeutet es eine wesentliche Voraussetzung, wenn wir ausdrücklich erklären, daß nicht nur in $\mathfrak{P}^*$, sondern auch in Π^* jedes einzelne Element immer nur endlich viele Variable wirklich enthalten soll. Stellt K einen Körper aus reellen oder komplexen Zahlen dar, so kann man für Π^* auch den Ring aller *konvergenten* Potenzreihen in $x_1, x_2, \ldots$ wählen, ohne daß sich an den folgenden Betrachtungen

[23]) Nachträglich kann man sich von dieser Einschränkung, die zunächst der beiden folgenden Hilfssätze wegen gemacht werden muß, wieder befreien. Siehe den Schluß der Nummer!

etwas ändert. — Aus der Theorie der Polynom- und Potenzreihenringe brauchen wir für das Folgende nur zwei einfache, wohlbekannte Tatsachen:

Hilfssatz 1[24]). *Es seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei von 0 verschiedene Nichteinheiten aus $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^*. Dann kann man stets eine umkehrbare lineare homogene Variablentransformation*

$$x_1 = y_1; \quad x_i = y_i + \alpha_i \cdot y_1 \ (i = 2, \ldots, N); \quad x_k = y_k \ (k > N)$$

mit Koeffizienten α_i aus K und zwei Einheiten d und e aus $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* so bestimmen, daß

$$d \cdot p = y_1^r + A_1'(y)\, y_1^{r-1} + \ldots + A_r'(y),$$
$$e \cdot q = y_1^s + B_1'(y)\, y_1^{s-1} + \ldots + B_s'(y)$$

wird, wobei die $A_i'(y)$ und $B_k'(y)$ von y_1 unabhängig sind.

In der Tat, zunächst ist unmittelbar klar, daß durch hinreichend große Wahl von N und geeignete Bestimmung der Transformationskoeffizienten α_i stets erreicht werden kann, daß $p(x) = \delta \cdot y_1^r + p'(y)$, $q(x) = \varepsilon \cdot y_1^s + q'(y)$ wird, wobei δ und ε von 0 verschiedene Elemente aus K sind, und alle in p' bzw. q' wirklich auftretenden Potenzprodukte im Polynomfall höchstens, im Potenzreihenfall mindestens den Grad r bzw. s besitzen. Bei den Polynomen braucht man dann nur noch $d = \delta^{-1}$, $e = \varepsilon^{-1}$ zu setzen; bei den Potenzreihen dagegen folgt die Existenz der Einheiten d und e aus dem berühmten „Weierstraßschen Vorbereitungssatz".

Hilfssatz 2. *In $\mathfrak{P}^*$ und Π^* läßt sich jedes Element bis auf Einheitsfaktoren eindeutig als Produkt von endlich vielen Primelementen darstellen.*

Für $\mathfrak{P}^*$ ist der Hilfssatz trivial. Der Beweis für Π^* kann im Falle endlich vieler Variabler mit Hilfe des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes durch einen einfachen Induktionsschluß auf den Beweis für $\mathfrak{P}^*$ zurückgeführt werden[25]). Aus der Richtigkeit des Hilfssatzes für endlich viele Variable folgt aber sofort seine Richtigkeit für beliebig viele Variable, da nach einer ausdrücklich gemachten Voraussetzung in Π^* ebenso wie in $\mathfrak{P}^*$ jedes einzelne Element immer nur von endlich vielen Variablen wirklich abhängt. — Aus Hilfssatz 2 folgt insbesondere die wichtige Tatsache, *daß $\mathfrak{P}^*$ und Π^* ganz abgeschlossen sind.*

Wir wollen jetzt den Ring $\mathfrak{R}$ als *„ganzen algebraischen"* (abgekürzt *„g. alg."*) bzw. als *„ganzen analytischen"* (abgekürzt *„g. anal."*) Funktionenring (über K) bezeichnen, wenn in $\mathfrak{R}$ ein zu $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* iso-

[24]) Hilfssatz 1 ist im wesentlichen ein Spezialfall des „Normierungshilfssatzes", auf dem die Beweisskizze in Nr. 17 des Idealberichts aufgebaut ist!

[25]) Zur genauen Ausführung des Beweises vgl. z. B. die Anm. [8]) zitierte Rückertsche Arbeit oder Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2!

morpher Unterring $\mathfrak{P}$ bzw. Π existiert, von dem $\mathfrak{R}$ ganz abhängt[26]). Besitzt $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[a_1, \ldots, a_n]$ bzw. $\Pi = \mathsf{K}\{a_1, \ldots, a_n\}$ endlich viele, und zwar n, unabhängige Erzeugende über K, so sagen wir, $\mathfrak{R}$ habe den „*Transzendenzgrad*“ n. Ist die Anzahl der Erzeugenden bei $\mathfrak{P}$ bzw. Π unendlich groß, so schreiben wir $\mathfrak{R}$ den Transzendenzgrad ω zu[5]). Dabei soll keineswegs von vornherein behauptet werden, daß der Transzendenzgrad von $\mathfrak{R}$ unabhängig von der speziellen Wahl des Unterrings $\mathfrak{P}$ bzw. Π durch $\mathfrak{R}$ allein eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit des Transzendenzgrades wird sich aber im Laufe der Untersuchung von selbst ergeben[27]). — Im folgenden beschränken wir uns bei den Beweisen immer auf die Behandlung des algebraischen Falles; um die Beweise für den analytischen Fall zu erhalten, hat man einfach statt „Polynomring $\mathfrak{P}$“ bzw. „g. alg.“ überall „Potenzreihenring Π“ bzw. „g. anal.“ zu schreiben.

Satz 10. *Jedes Primideal* $\mathfrak{p} \neq (0)$ *aus dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$ *enthält mindestens ein in* $\mathfrak{R}$ *minimales Primideal* $\mathfrak{n}$. *Für jedes in* $\mathfrak{R}$ *minimale Primideal* $\mathfrak{n}$ *wird auch der Restklassenring* $\mathfrak{R}|\mathfrak{n}$ *ein g. alg. bzw. g. anal. Funktionenring, und zwar besitzt* $\mathfrak{R}|\mathfrak{n}$ *einen um* 1 *kleineren Transzendenzgrad als* $\mathfrak{R}$, $-(\omega - 1 = \omega!)$.

Für einen Polynomring $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$ ergibt sich aus Hilfssatz 2 sofort, daß jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ mindestens ein Primhauptideal $(p) \neq (0)$ enthält, und daß alle von (0) verschiedenen Primhauptideale in $\mathfrak{P}$ minimal sind. Auf Grund von Hilfssatz 1 erkennt man weiter, daß auch die zweite Behauptung von Satz 10 für einen Polynomring $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}$ richtig ist[28]). — Bedeutet schließlich $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal aus einem beliebigen g. alg. Funktionenring $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{P}$ ein Polynomring, von dem $\mathfrak{R}$ ganz abhängt, so muß $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{P}$ nach dem bereits Bewiesenen mindestens ein in $\mathfrak{P}$ minimales Primunterideal $\mathfrak{n}'$ enthalten, und nach Satz 6 gibt es wegen der Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ mindestens ein in $\mathfrak{p}$

---

[26]) Die Definition des Textes sieht etwas umständlich aus, man kann sie aber kaum einfacher fassen, wenn man für einen g. alg. oder g. anal. Funktionenring $\mathfrak{R}$ eine *invariante* Charakterisierung gewinnen will, die keine spezielle Darstellung von $\mathfrak{R}$ einseitig auszeichnet. — Gegenüber den Betrachtungen von Beitrag II, 5., die sich auf ganze algebraische Funktionenringe über einem Koeffizienten*ring* bezogen, sei hervorgehoben, daß es sich im Text ausschließlich um Funktionenringe über einem *Körper* (nämlich über K) handelt.

[27]) Bei einem g. alg. Funktionenring ist allerdings die Invarianz des Transzendenzgrades selbstverständlich, da es sich einfach um den Steinitzschen Transzendenzgrad des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ über K handelt. Im analytischen Fall aber liegen die Dinge anders, da dort der Steinitzsche Transzendenzgrad von $\mathfrak{K}$ über K stets unendlich groß ist.

[28]) Dabei braucht man Hilfssatz 1 nur für ein Einzelpolynom p und nicht für ein Polynompaar p, q!

enthaltenes, über $\mathfrak{n}'$ liegendes Primideal $\mathfrak{n}$, das nach Satz 8 seinerseits in $\mathfrak{R}$ minimal ist. Damit ist der erste Teil der Behauptung von Satz 10 für einen beliebigen $\mathfrak{R}$ bewiesen; der zweite Teil folgt sofort aus den für die Polynomringe gewonnenen Ergebnissen und der Bemerkung, daß $\mathfrak{R}|\mathfrak{n}$ als ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{P}|\mathfrak{n}'$ aufgefaßt werden kann. — Satz 10 bildet die Grundlage für den Beweis von:

Satz 11. *Gibt es in dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$ *zu dem Primideal* $\mathfrak{p}$ *eine* μ*-gliedrige Kette* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\mu = \mathfrak{n}$, *bei der* $\mathfrak{n}$ *in* $\mathfrak{R}$ *minimal und für* $i = 2, \ldots \mu$ *jeweils* $\mathfrak{p}_i$ *ein unmittelbares Primunterideal von* $\mathfrak{p}_{i-1}$ *ist, so besitzt* $\mathfrak{p}$ *den Dimensionsdefekt* μ, *und es hat jedes unmittelbare Primunterideal* $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{p}$ *genau den Dimensionsdefekt* $\mu - 1$.

Satz 12. *Besitzt das Primideal* $\mathfrak{p}$ *in dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$ *einen endlichen Dimensionsdefekt* μ, *so ist stets auch* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ *ein g. alg. bzw. g. anal. Funktionenring, und zwar hat* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ *einen um* μ *Einheiten kleineren Transzendenzgrad als* $\mathfrak{R}$, $-(\omega - \mu = \omega!)$[29]).

Satz 11 und Satz 12 sind sicher richtig, wenn $\mu = 1$ ist, wenn es sich also um minimale Ringprimideale handelt. Daraus folgt, daß man nach den Grundsätzen des Induktionsschlusses die Gültigkeit von Satz 11 und Satz 12 für $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}|\mathfrak{n}$ in $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}|\mathfrak{n}$ voraussetzen darf; denn es ist $\bar{\mathfrak{R}}$ nach Satz 10 selbst ein g. alg. Funktionenring, und es ist in der Kette $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}_1$, $\bar{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p}_2|\mathfrak{n}$, $\ldots$, $\bar{\mathfrak{p}}_{\mu-1} = \mathfrak{p}_{\mu-1}|\mathfrak{n}$ sicher $\bar{\mathfrak{p}}_{\mu-1}$ minimales Ringprimideal, während für $i = 2, \ldots \mu - 1$ jeweils $\bar{\mathfrak{p}}_i$ ein unmittelbares Primunterideal von $\bar{\mathfrak{p}}_{i-1}$ darstellt. Damit ist wegen $(\mathfrak{R}|\mathfrak{n})|(\mathfrak{p}|\mathfrak{n}) = \mathfrak{R}|\mathfrak{p}$ bereits Satz 12 für $\mathfrak{p}$ bewiesen. Da ferner jedes beliebige von (0) verschiedene Primunterideal von $\mathfrak{p}$ mindestens ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primunterideal $\mathfrak{m}$ enthält, braucht man, wie mühelos einzusehen, zum vollen Beweise von Satz 11 nur noch zu zeigen:

Für jedes in $\mathfrak{p}$ *enthaltene minimale Ringprimideal* $\mathfrak{m}$ *hat* $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}|\mathfrak{m}$ *in* $\bar{\bar{\mathfrak{R}}} = \mathfrak{R}|\mathfrak{m}$ *genau denselben Dimensionsdefekt wie* $\bar{\mathfrak{p}}$ *in* $\bar{\mathfrak{R}}$ (d. h. also den Dimensionsdefekt $\mu - 1$).

Es sei $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ ein Polynomring, von dem $\mathfrak{R}$ ganz abhängt; dann sind $\mathfrak{m}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}' = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{n}$ minimale Primideale von $\mathfrak{P}$ und damit Primhauptideale, $\mathfrak{m}' = (p)$, $\mathfrak{n}' = (q)$. Aus Hilfssatz 1 folgt weiter, daß man die a_i und p und q so gewählt annehmen darf, daß $p = a_1^r + A_1'(a)\, a_1^{r-1} + \ldots + A_r'(a)$; $q = a_1^s + B_1'(a)\, a_1^{s-1} + \ldots + B_s'(a)$ wird, wobei die $A_i'(a)$ und $B_k'(a)$ von a_1 unabhängig sind. Unter dieser Annahme ist aber für $\mathfrak{Q} = \mathsf{K}[a_2, a_3, \ldots]$ sicher $\mathfrak{Q} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{n} = (0)$, und es lassen sich $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ und $\bar{\mathfrak{R}}$ beide als ganz abhängige Oberringe des

[29]) Natürlich kann der Transzendenzgrad von $\mathfrak{R}|\mathfrak{p}$ nicht negativ werden. Wird er gleich 0, so ist $\mathfrak{R}|\mathfrak{p}$ ein algebraischer Oberkörper von K!

Polynomrings $\mathfrak{Q}$ auffassen, wobei insbesondere $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{Q} = \bar{\bar{\mathfrak{p}}} \cap \mathfrak{Q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{Q}$ wird. Bezeichnet nun $\mu - 1$ bzw. ν bzw. λ den Dimensionsdefekt von $\bar{\mathfrak{p}}$ bzw. $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ bzw. $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{Q}$, so folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 8 sofort $\lambda = \mu - 1$, $\lambda = \nu$, d. h. $\mu - 1 = \nu$.

Aus den Sätzen 10, 11, 12 schließt man weiter:

Satz 13. *Ist der Dimensionsdefekt μ von $\mathfrak{p}$ endlich und kleiner als der Transzendenzgrad von $\mathfrak{R}$, so besitzt $\mathfrak{p}$ stets unmittelbare Primoberideale, und zwar hat jedes unmittelbare Primoberideal den Dimensionsdefekt $\mu + 1$.*

Andererseits zeigt Satz 11, daß bei endlichem Transzendenzgrad n kein Primideal einen Dimensionsdefekt $\mu > n$ besitzen kann, und daß die Primideale vom Dimensionsdefekt μ im Ring maximal sein müssen. — Aus dieser Bemerkung und den übrigen Sätzen ergibt sich für Funktionenringe von endlichem Transzendenzgrad ohne Schwierigkeit:

Satz 14. *In einem g. alg. oder g. anal. Funktionenring $\mathfrak{R}$ vom endlichen Transzendenzgrad n hat jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eine endliche Dimension ν und einen endlichen Dimensionsdefekt μ. Dabei ist die Dimension ν gleich dem Transzendenzgrad des Restklassenrings $\mathfrak{R}|\mathfrak{p}$, während für die Summe von Dimension und Dimensionsdefekt stets die Gleichung $\mu + \nu = n$ gilt.*

Aus Satz 14 ergibt sich insbesondere die Eindeutigkeit des Transzendenzgrades im Falle seiner Endlichkeit. Daß ein g. alg. oder g. anal. Funktionenring vom Transzendenzgrad ω nicht gleichzeitig endlichen Transzendenzgrad besitzen kann, folgt einfach aus der Tatsache, daß in einem derartigen Ring nach Satz 13 immer Primideale von beliebig großem endlichen Dimensionsdefekt vorkommen müssen[30]).

Beschränkt man sich von vornherein auf Funktionenringe von endlichem Transzendenzgrad, so läßt sich der Beweis der Sätze 11 bis 14 wesentlich vereinfachen. Man muß nur die Dimension statt des Dimensionsdefektes in den Vordergrund stellen und vom Transzendenzgrad n auf den Transzendenzgrad $n + 1$ schließen. Dann ergeben sich alle Behauptungen der Sätze 11 bis 14 mühelos durch Restklassenbildung nach dem in Satz 11 auftretenden minimalen Ringprimideal $\mathfrak{n}$ und einen anschließenden einfachen Induktionsschluß. Der etwas mühsame Vergleich der Primideale $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$, der oben den Kernpunkt des Beweises von Satz 11

[30]) Läßt man, was ja bei unseren Untersuchungen statthaft ist, die Möglichkeit zu, daß die bei der Bildung des Ringes $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* benutzte Variabelnmenge eine beliebige Mächtigkeit $\aleph$ besitzt, so liegt es nahe, den Transzendenzgrad eines g. alg. bzw. g. anal. Funktionenrings im Fall der Unendlichkeit einfach gleich dem betreffenden $\aleph$ zu setzen. Die Invarianz ist dann wieder im algebraischen Fall trivial, im analytischen ist sie sehr plausibel, aber noch nicht bewiesen. — Für die Untersuchungen des Textes hat die Unterscheidung verschiedener Mächtigkeiten bei unendlichem Transzendenzgrad keine Bedeutung.

darstellte, fällt weg, und man braucht dementsprechend den Hilfssatz 1 nur für den Fall eines einzelnen Elementes p. — Bei Funktionenringen von unendlichem Transzendenzgrad dagegen dürfte die oben gewählte Beweisanordnung die denkbar einfachste sein.

Wir zeigen weiter:

Satz 15. *Die erste Hälfte von Satz 10, sowie die Sätze 11, 13, 14 gelten auch dann, wenn der Grundkörper* K *nur endlich viele Elemente enthält.*

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Polynomring, von dem der g. alg. Funktionenring $\mathfrak{R}$ ganz abhängt, $\mathfrak{P}^*$ sei derjenige Polynomring, der aus $\mathfrak{P}$ dadurch entsteht, daß man an Stelle von K den kleinsten K umfassenden algebraisch abgeschlossenen Körper K^* als Grundkörper wählt; schließlich werde $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{P}^* \cdot \mathfrak{R}$ gesetzt. Dann gelten für $\mathfrak{R}^*$ die Sätze 10 bis 14, es ist $\mathfrak{R}^*$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$, und man kann auf die drei Ringe $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ die Sätze von 1.—3. anwenden. Unter Berücksichtigung der Ganz-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{P}$ überzeugt man sich auf diese Weise mühelos von der Richtigkeit von Satz 15.

5. Der Hauptidealsatz.

Satz 16. *Ist in einem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$ *das Primideal* $\mathfrak{p}$ *minimales Primoberideal eines Hauptideals* $(a) \neq (0)$, *so ist stets* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}$ *minimal.*

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Polynomring, von dem $\mathfrak{R}$ ganz abhängt. Wir nehmen zunächst an, es sei der Quotientenkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{R}$ ein *endlicher* algebraischer Oberkörper des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}$, und es umfasse $\mathfrak{R}$ *alle* von $\mathfrak{P}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{L}$. Dann folgt aus der Gültigkeit des Hilfssatzes 2 für $\mathfrak{P}$ sofort, daß $\mathfrak{R}$ im Sinne der Bewertungstheorie eine „endliche diskrete Hauptordnung" darstellt[31]). Unter diesen Umständen ist aber (a) Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$, die zu in $\mathfrak{R}$ minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ gehören, und es ist selbstverständlich, daß jedes Primoberideal von (a) mindestens eines der Primideale $\mathfrak{p}_i$ enthalten muß.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ ein beliebiger ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{P}$. Wir setzen $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}[a]$ und bezeichnen mit $\widetilde{\mathfrak{T}}$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{R}}$ den zu $\mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{R}$ gehörigen ganz abgeschlossenen Ring. Wegen $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{T}$ ist sicher auch $\widetilde{\mathfrak{R}} \supseteq \widetilde{\mathfrak{T}}$. Nach Satz 1 gibt es ferner zu dem zu untersuchenden Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ in $\widetilde{\mathfrak{R}}$ mindestens ein darüberliegendes Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}$, und aus der Tatsache,

---

[31]) Zum Begriff der endlichen diskreten Hauptordnung vgl. Idealbericht Nr. 36, 43. Vgl. ferner: Krull, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen (Math. Annalen 105 (1931), S. 1—14), wo die im Text benötigten idealtheoretischen Zusammenhänge breit dargelegt sind.

daß $\mathfrak{p}$ minimales Primoberideal von $(a) = a \cdot \mathfrak{R}$[32]) ist, folgt in Anbetracht von Satz 2 sofort, daß $\tilde{\mathfrak{p}}$ minimales Primoberideal von $a \cdot \tilde{\mathfrak{R}}$ sein muß. Schließlich erweist sich $\tilde{\mathfrak{p}}' = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \tilde{\mathfrak{T}}$ auf Grund von Satz 6 als minimales Primoberideal von $a \cdot \tilde{\mathfrak{T}}$. — Unter diesen Umständen muß aber $\tilde{\mathfrak{p}}'$ in $\tilde{\mathfrak{T}}$ minimal sein, weil $\tilde{\mathfrak{T}}$ zu den im ersten Teil des Beweises betrachteten Ringen gehört. Es ist also nach Satz 8 auch $\tilde{\mathfrak{p}}' \cap \mathfrak{P} = (\tilde{\mathfrak{p}} \cap \tilde{\mathfrak{T}}) \cap \mathfrak{P} = (\tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{R}) \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$, und damit, wie bewiesen werden sollte, auch $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}$ minimal. — Durch Verknüpfung von Satz 15, 12 und 13 ergibt sich weiter:

Satz 17. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von endlichem Dimensionsdefekt* μ, *a ein nicht zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Element aus dem g. alg. oder g. anal. Funktionenring* $\mathfrak{R}$, *so haben alle minimalen Primoberideale von* $\mathfrak{p} + (a)$ *in* $\mathfrak{R}$ *den Dimensionsdefekt* $\mu + 1$[7]).

Damit sind alle Hauptsätze der Dimensionstheorie der Polynomringe für beliebige Primideale von endlichem Dimensionsdefekt in beliebigen g. alg. oder g. anal. Funktionenringen bewiesen.

6. Primideale von unendlichem Dimensionsdefekt.

Man wird fragen, ob nicht (bei Transzendenzgrad ω) wenigstens ein Teil der in 4. und 5. gewonnenen Ergebnisse in geeigneter Fassung auf die Primideale von unendlichem Dimensionsdefekt ausgedehnt werden kann. Wir zeigen durch Angabe geeigneter Gegenbeispiele, daß die Antwort *völlig verneinend* lautet; dabei stützen wir uns auf die Theorie der allgemeinen Bewertungsringe[33]). — Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots; \eta_1, \eta_2, \ldots$ Unbestimmte, die Buchstaben g und h sollen ganze rationale Zahlen bedeuten. Wir betrachten nun die Gruppe Γ aller Linearformen von der Gestalt

$$g_1 \xi_{\nu_1} + g_2 \xi_{\nu_2} + \ldots + g_r \xi_{\nu_r} + h_1 \eta_{\mu_1} + h_2 \eta_{\mu_2} + \ldots + h_s \eta_{\mu_s}$$
$$(\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r;\ \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_r)$$

und führen in Γ eine lineare Ordnung ein durch die Festsetzung: Das Gruppenelement γ soll „größer" heißen als das Gruppenelement δ $-(\gamma > \delta)-$, wenn bei der Darstellung von $\gamma - \delta$ durch die ξ_ν und η_μ das in der festgelegten Reihenfolge erste Glied einen positiven Koeffizienten besitzt. Diejenigen Elemente aus Γ, die größer sind als das Gruppeneinheitselement 0, werden wie üblich als positiv bezeichnet. Unter Δ ver-

---

[32]) Wir schreiben $a \cdot \mathfrak{R}$, $a \cdot \tilde{\mathfrak{R}}, \ldots$, um auf kürzeste Weise anzudeuten, in welchem Ring das Hauptideal (a) jeweils betrachtet wird.

[33]) Zu den Einzelheiten der folgenden Betrachtungen (Aufbau spezieller Wertgruppen, bewertete Körper von Pseudopolynomquotienten usw.) vgl. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, Journ. f. Math. 167 (1931), S. 160—196. (Siehe insbesondere § 1 und § 5.)

stehen wir die Untergruppe aller derjenigen Elemente, die Linearformen in den η_i allein darstellen. — Es sei jetzt weiter K ein beliebiger Körper, u eine Variable. Bilden wir dann formell die „Potenzen“ $u^\gamma (\gamma \subset \Gamma)$ und setzen wir insbesondere u^0 gleich dem Einheitselement 1 aus K, so können wir mit den „Pseudopolynomen“

$$p(u) = a_1 u^{\gamma_1} + a_2 u^{\gamma_2} + \ldots + a_t u^{\gamma_t}$$
$$(a_i \subset \mathsf{K},\ \gamma_i \subset \Gamma\,(i = 1, \ldots t);\ 0 \leqq \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_t)$$

formell genau so rechnen, wie mit gewöhnlichen Polynomen, bei denen die Exponenten ganze Zahlen sind. Den Ring aller Pseudopolynome bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{P}}$, unter $\bar{\mathfrak{q}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{p}}$ verstehen wir das Primideal aller der Pseudopolynome $p(u)$, bei denen der „Anfangsexponent“ γ_1 positiv ist bzw. nicht zu Δ gehört. Offenbar ist $\bar{\mathfrak{q}} \supset \bar{\mathfrak{p}}$. Wir behaupten jetzt:

$\bar{\mathfrak{p}}$ besitzt in $\overline{\mathfrak{P}}$ kein unmittelbares Primunterideal, und es liegt außerdem zwischen $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ kein unmittelbares Primoberideal von $\bar{\mathfrak{p}}$.

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen: In dem durch das Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ definierten Primidealquotientenring $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$[11]) besitzt das Primideal $\bar{\bar{\mathfrak{p}}} = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathfrak{P}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ weder ein unmittelbares Primunter- noch ein unmittelbares Primoberideal. Die Untersuchung von $\overline{\mathfrak{P}}$ gestaltet sich aber sehr einfach, da $\overline{\mathfrak{P}}$ ein Bewertungsring mit der Wertgruppe Γ ist. — In der Tat, jedes Element $r(u)$ aus dem Quotientenkörper $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$r(u) = u^\gamma \cdot \frac{a_0 + a_1 u^{\gamma_1} + \ldots + a_n u^{\gamma_n}}{b_0 + b_1 u^{\delta_1} + \ldots + b_m u^{\delta_m}}$$

$$(\gamma \gtrless 0,\ a_0 \cdot b_0 \neq 0;\ 0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n,\ 0 < \delta_1 < \ldots < \delta_m).$$

Ordnen wir jedem $r(u)$ den zugehörigen Exponenten γ als „Wert“ zu, so entsteht eine Bewertung $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{R}}$ mit der Wertgruppe Γ, und es umfaßt $\overline{\mathfrak{P}}$ gerade alle und nur die Körperelemente, die in $\overline{B}$ einen nichtnegativen Wert besitzen, während ein Element aus $\overline{\mathfrak{P}}$ offenbar dann und nur dann zu $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ gehört, wenn sein Wert nicht in Δ liegt. Es sei nun $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ irgendein echtes Primunterideal von $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$. Dann muß es mindestens ein ξ_ν geben mit der Eigenschaft, daß $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ kein Element vom Werte ξ_ν enthält, und die Gesamtheit aller der Körperelemente $r(u)$, bei denen der Wert von $r(u)^n$ für hinreichend großes n größer wird als ξ_ν, bildet ein echtes Zwischenprimideal zwischen $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$. — Ist andererseits $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ ein echtes Primoberideal von $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$, so gibt es in $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ für geeignetes μ ein Element, dessen Wert höchstens gleich η_μ ist, und die Menge aller der $r(u)$, bei denen der Wert von $r(u)^n$ für hinreichend großes n über $\eta_{\mu+1}$ hinauswächst, stellt ein echtes Zwischenprimideal zwischen $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{r}}}$ dar. — $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ und $\bar{\mathfrak{p}}$ besitzen also tatsächlich die gewünschten Eigenschaften.

Wir beachten nun, daß die Gruppe Γ offenbar nur aus abzählbar unendlich vielen Elementen besteht. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ die sämtlichen positiven Elemente von Γ in irgendeiner Abzählung. Ordnet man dann für $i = 1, 2, \ldots$ der Potenz u^{γ_i} jeweils eine neue Variable x_i zu, so entsteht eine homomorphe Abbildung des Pseudopolynomringes $\overline{\mathfrak{P}}$ auf den Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$, und zwar so, daß $\overline{\mathfrak{P}}$ zu $\mathfrak{P}|\mathfrak{r}$ isomorph wird, wobei $\mathfrak{r}$ ein geeignetes Primideal aus $\mathfrak{P}$ bedeutet. Sind ferner $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ diejenigen Primideale aus $\mathfrak{P}$, die bei dem konstruierten Homomorphismus den Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ aus $\overline{\mathfrak{P}}$ entsprechen, so ist $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, und es liegt offenbar zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ bzw. zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ kein unmittelbares Primunter- bzw. Primoberideal von $\mathfrak{p}$. — Damit ist gezeigt:

Satz 18. *In jedem Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ vom Transzendenzgrad ω lassen sich drei Primideale $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ so bestimmen, daß es zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ kein unmittelbares Primunterideal, zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ kein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ gibt.*

Für das in Satz 18 auftretende Primideal $\mathfrak{p}$ gilt sicher kein zu Satz 11 oder 13 ähnliches Theorem. Aus Satz 10 folgt ferner, daß $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ kein g. alg. Funktionenring sein kann. Ist schließlich a ein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{q}$, so besitzt $\mathfrak{p} + (a)$ sicher ein minimales Primoberideal, das kein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ ist; es ist also auch eine sinngemäße Übertragung von Satz 17 auf Primideale von unendlichem Dimensionsdefekt ausgeschlossen.

Man könnte nun höchstens noch vermuten, daß wenigstens über die Primideale von endlicher Dimension auch bei den Funktionenringen vom Transzendenzgrad ω genauere Aussagen möglich sind. Indessen lassen sich sogar in diesem Falle alle in Betracht kommenden Vermutungen durch Gegenbeispiele von vornherein widerlegen. Zunächst ist es leicht, mit Hilfe der zum Beweise von Satz 18 benutzten Methoden in einem beliebigen Polynomring vom Transzendenzgrad ω ein nulldimensionales Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Primunterideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ so zu konstruieren, daß zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ kein unmittelbares Primunterideal von $\mathfrak{p}$ liegt. Man kann aber sogar, wenigstens bei abzählbarem Grundkörper K, ohne allzu große Schwierigkeit im Polynomring $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ z. B. die Existenz eines zweidimensionalen Primideals $\mathfrak{p}$ mit nulldimensionalem unmittelbarem Primoberideal $\mathfrak{q}$ nachweisen. Man muß zu diesem Zwecke nur nicht von einem einzigen Bewertungsring, sondern von dem Durchschnitt zweier geeigneter Bewertungsringe ausgehen. Allerdings gestaltet sich auf diese Weise die Durchführung der Konstruktion im einzelnen etwas umständlich, wenigstens dann, wenn man sich nicht damit begnügen will, ein einschlägiges Beispiel ohne nähere Erklärung seiner Entstehung einfach hin-

zuschreiben. Wir beschränken uns daher hier hinsichtlich der endlichdimensionalen Primideale auf die bereits gemachten allgemeinen Andeutungen und fassen im übrigen das Gesamtergebnis der letzten Überlegungen kurz so zusammen:

Satz 19. *Die Beschränkung auf Primideale von endlichem Dimensionsdefekt ist für die Entwicklung einer Dimensionstheorie im Sinne der Sätze 11 bis 13 unbedingt notwendig. Für Primideale von unendlichem Dimensionsdefekt gilt im allgemeinen, sogar bei endlicher Dimension, kein Theorem, das als Verallgemeinerung der Sätze 11 bis 13 (oder auch des Satzes 17) aufgefaßt werden könnte.*

(Eingegangen am 16. Februar 1937.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche[1]).

IV. Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen.

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Beitrag IV schließt sich gedanklich eng an Beitrag I an. Dort wurde der Begriff der „Wertidealbildung" eingeführt und vor allem am Musterbeispiel des „b-Idealsystems" Σ_b ausführlich erläutert. Daneben befaßten wir uns eingehend mit den ohne Bewertungstheorie definierbaren Idealsystemen Σ_a und Σ_v. Es dürfte nun lehrreich sein, einen Fall zu betrachten, in dem zur Erfassung der arithmetischen Feinheiten zwangsläufig ein von Σ_b, Σ_a und Σ_v verschiedenes Wertidealsystem eingeführt werden muß.

1. Problemstellung.

Der Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ heißt „*endliche diskrete Hauptordnung*"[2]), wenn im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ eine der Durchschnittsgleichung $\mathfrak{J} = \underset{\mathfrak{B}_\tau \subset \mathfrak{N}}{\Delta}\, \mathfrak{B}_\tau$ genügende Menge $\mathfrak{N}$ von diskreten Bewertungsringen $\mathfrak{B}_\tau$ so bestimmt werden kann, daß kein Element von $\mathfrak{J}$ in unendlich vielen Ringen $\mathfrak{B}_\tau$ Nichteinheit ist. Nach bekannten Sätzen läßt sich die endliche diskrete Hauptordnung $\mathfrak{J}$ genauer folgendermaßen charakterisieren: Die Primidealquotientenringe $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_\tau} = \mathfrak{D}_\tau$, ..., die zu den in $\mathfrak{J}$ minimalen Primidealen[3]) $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ..., $\mathfrak{p}_\tau$, ... gehören, sind durchweg

[1]) Vgl. Beitrag I, II, III [Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577 bzw. S. 665—679, bzw. **42** (1937), S. 745—766]. Beitrag IV schließt sich (anders als Beitrag III) wieder eng an Beitrag I an. Insbesondere beschränken wir uns im Gegensatz zu Beitrag III keineswegs auf ganze Ideale, schließen aber dafür das Nullideal von der Betrachtung aus.

Vgl. ferner den „Idealbericht" [Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgeb. **4**, Heft **3** (1935)].

[2]) Zum Begriff des Bewertungsringes und der endlichen diskreten Hauptordnung vgl. z. B. Idealbericht **36, 37, 42**!

[3]) Der Primidealquotientenring $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ besteht aus der Menge aller Quotienten $\frac{a}{b}$ (a und b in $\mathfrak{J}$, b nicht in $\mathfrak{p}$). Vgl. Beitrag I, S. 551. Ein minimales Primideal ist ein Primideal ohne (von (0) verschiedenes) echtes Primunterideal.

diskrete Bewertungsringe. Kein Element aus $\mathfrak{J}$ ist in unendlich vielen $\mathfrak{D}_\tau$ Nichteinheit, und es wird dann und nur dann $\mathfrak{J} = \underset{\tau}{\Delta}\, \mathfrak{D}_\tau$, wenn man die Durchschnittsbildung über die Menge N_p *aller* $\mathfrak{D}_\tau$ erstreckt. — Gründet man auf die Menge N_p eine Wertidealoperation im Sinne von Beitrag I, 6., ordnet man also jedem beliebigen $\mathfrak{J}$-Ideal $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}_p = \underset{\mathfrak{D}_\tau \subset \mathsf{N}_p}{\Delta}\, (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{D}_\tau)$ zu („p-Operation"), so gilt, wie mühelos einzusehen, im Bereich der ganzen p-Ideale der „p-Z. P. I.", d. h. es läßt sich jedes ganze p-Ideal $\mathfrak{a}_p$ eindeutig als p-Produkt von endlich vielen p-Primidealen darstellen, wobei die p-Primideale mit den minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\tau, \ldots$ von $\mathfrak{J}$ identisch sind. Im übrigen fällt das System Σ_p der p-Ideale mit dem System Σ_v der v-Ideale zusammen, der p-Z. P. I. ist nichts anderes als der wohlbekannte v-Z. P. I., und die Einführung der p-Operation liefert bei der endlichen diskreten Hauptordnung $\mathfrak{J}$ infolgedessen nur eine neue Einkleidung alter Ergebnisse[4]).

Ist aber $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ein unendlicher algebraischer Oberkörper des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$, und bedeutet $\widetilde{\mathfrak{J}}$ den Ring aller von $\mathfrak{J}$ ganz abhängigen Elemente aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$, so ist in $\widetilde{\mathfrak{K}}$, wie ich bereits im Idealbericht gezeigt habe, der v-Idealbegriff zur Erfassung der arithmetischen Feinheiten des Baues von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ungeeignet, und zwar sogar schon im einfachsten Falle, wenn $\mathfrak{J}$ einen gewöhnlichen Z. P. I.-Ring darstellt, also eine endliche diskrete Hauptordnung, bei der alle Primideale minimal und infolgedessen alle gewöhnlichen Ideale gleichzeitig auch p- bzw. v-Ideale sind[5]). — Da-

[4]) Zu den v-Idealen, soweit wir sie hier brauchen, vgl. Idealbericht **43** und die dort angegebene Literatur.

[5]) Die einfachste Charakterisierung der gewöhnlichen Z. P. I.-Ringe lautet natürlich: $\mathfrak{J}$ ist dann und nur dann ein gewöhnlicher Z. P. I.-Ring, wenn jedes gewöhnliche ganze $\mathfrak{J}$-Ideal eindeutig als Produkt endlich vieler Primideale dargestellt werden kann. Das wichtigste Beispiel eines gewöhnlichen Z. P. I-Ringes ist der Ring $\mathfrak{J}$ aller ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$. Dementsprechend habe ich mich im Idealbericht an der uns hier interessierenden Stelle (Großdruckteil von **44**) auf die Entwicklung der gewöhnlichen und der v-Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern beschränkt. (Die wichtigste kritische Bemerkung zum v-Idealbegriff findet sich übrigens schon in **43** bei der Besprechung des für die Betrachtungen von **44** grundlegenden Beispiels 2.)

Auch die Ausdehnung der Untersuchung auf den Fall, daß im Ausgangskörper $\mathfrak{K}$ eine beliebige endliche diskrete Hauptordnung $\mathfrak{J}$ ausgezeichnet ist, ist im Idealbericht schon in Aussicht genommen. (Kleindruckbemerkung am Schlusse von **44**.) Schon dort wurde auf diejenigen Bewertungen hingewiesen, die im Text zur Festlegung der p-Operation dienen. Im übrigen aber fehlt im Idealbericht noch der p-Idealbegriff selbst, durch den erst die Entwicklung einer wirklich einfachen und voll befriedigenden Theorie möglich wird.

gegen kann die Methode, nach der ich in früheren Arbeiten[6]) die Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper entwickelte, geradezu folgendermaßen charakterisiert werden: Man faßt im Falle eines gewöhnlichen Z. P. I.-Ringes $\mathfrak{J}$ sowohl bei $\mathfrak{J}$ wie bei $\widetilde{\mathfrak{J}}$ die gewöhnlichen Ideale als p-Ideale auf und gewinnt eben auf Grund dieser Auffassung einen erschöpfenden Überblick über die Menge aller $\widetilde{\mathfrak{J}}$-Ideale und ihre multiplikativen Verknüpfungen. — Unter diesen Umständen liegt aber der Gedanke nahe, daß auch bei einer allgemeinen endlichen diskreten Hauptordnung (also bei einem beliebigen p- bzw. v-Z. P. I.-Ring) $\mathfrak{J}$ die Einführung der p-Operation im Bereich der $\widetilde{\mathfrak{J}}$-Ideale die richtige Methode zur arithmetischen Untersuchung von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ darstellt. Im folgenden wird der Beweis für diese Vermutung erbracht. Dabei muß zunächst etwas ausführlicher auf den Fall einer endlichen algebraischen Erweiterung des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$ eingegangen werden; die Behandlung des uns eigentlich interessierenden Falles der unendlichen algebraischen Erweiterungen von $\mathfrak{K}$ gestaltet sich dann ganz einfach, da ein enger Anschluß an das Vorbild der Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper möglich ist. —

Das System Σ_p, das wir bei unserer Untersuchung im System Σ aller gewöhnlichen $\widetilde{\mathfrak{J}}$-Ideale auszeichnen, fällt offenbar im allgemeinen sowohl von Σ wie auch von den Systemen Σ_a, Σ_b, Σ_v verschieden aus: wir gewinnen also hier tatsächlich ein Beispiel von der in der Vorbemerkung angekündigten Art.

2. Endliche algebraische Erweiterungen.

Es sei $\mathfrak{J}$ wie in 1. eine endliche diskrete Hauptordnung, $\mathfrak{K}'$ sei ein endlicher algebraischer Oberkörper des Quotientenkörpers $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{J}$, und es bedeute $\mathfrak{J}'$ den Ring aller von $\mathfrak{J}$ ganz abhängigen Elemente aus $\mathfrak{K}'$. Unter N_p verstehen wir dieselbe Bewertungsringmenge wie in 1., mit M'_p bezeichnen wir die Menge aller derjenigen Bewertungsringe $\mathfrak{B}'_\tau$ mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}'$, die mit $\mathfrak{K}$ einen zu N_p gehörigen Bewertungsring zum Durchschnitt haben.

Satz 1. *Es ist* $\mathfrak{J}' = \bigcap_{\mathfrak{B}'_\tau \subset \mathsf{M}'_p} \mathfrak{B}'_\tau$.

In der Tat, es sei $\mathfrak{D}$ ein beliebiger Bewertungsring aus N_p, und es bedeute $\mathfrak{F}'$ den Durchschnitt aller Fortsetzungen von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{K}'$ (also aller der Bewertungsringe mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}'$, die der Gleichung

[6]) Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern I und II. Math. Zeitschr. 29 (1928), S. 42—54 bzw. 31 (1930), S. 537—557. Vgl. auch die in Anm. [5]) erwähnte Skizze, Idealbericht 44.

$\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{D}$ genügen); dann enthält nach einem bekannten Satz $\mathfrak{F}'$ gerade alle und nur die Elemente aus $\mathfrak{R}'$, die von $\mathfrak{D}$ ganz abhängen[7]). Daraus folgt aber: Das Element α aus $\mathfrak{R}'$ gehört dann und nur dann zu $\underset{\mathfrak{B}'_\tau \subset \mathsf{M}'_p}{\Delta} \mathfrak{B}'_\tau$, wenn in der Gleichung niedrigsten Grades

$$\alpha^r + a_1 \alpha^{r-1} + \ldots + a_r = 0,$$

der α über $\mathfrak{R}$ genügt, alle Koeffizienten a_i in $\underset{\mathfrak{D}_\tau \subset \mathsf{N}_p}{\Delta} \mathfrak{D}_\tau = \mathfrak{Z}$ liegen, d. h. wenn α Element von $\mathfrak{Z}'$ ist.

Da $\mathfrak{R}'$ als *endlicher* algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{R}$ angenommen wurde, besitzt jeder einzelne Bewertungsring $\mathfrak{D}$ aus N_p nur endlich viele, und zwar durchweg diskrete Fortsetzungen auf $\mathfrak{R}'$. Aus dieser Bemerkung und Satz 1 ergibt sich sofort:

Satz 2. *$\mathfrak{Z}'$ ist ebenso wie $\mathfrak{Z}$ eine endliche diskrete Hauptordnung.*

Es sei nun zunächst $\mathfrak{Z}$ ein gewöhnlicher Z. P. I.-Ring, es seien also in $\mathfrak{Z}$ alle Primideale minimal und gegenseitig prim. Dann erkennt man durch Betrachtung der zugehörigen Restklassenringe sofort, daß auch in $\mathfrak{Z}'$ zwei beliebige Primideale stets gegenseitig prim sind, es muß also in Anbetracht von Satz 2 auch $\mathfrak{Z}'$ ein gewöhnlicher Z. P. I.-Ring werden. Außerdem weiß man in diesem Fall, daß die Menge N_p gerade aus *allen* zwischen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R}$ liegenden Bewertungsringen besteht, und daraus folgt unmittelbar, daß M'_p *alle* zwischen $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{R}'$ liegenden Bewertungsringe umfaßt. — Ist also $\mathfrak{Z}$ ein gewöhnlicher Z. P. I.-Ring, so haben wir bereits einen völlig befriedigenden Einblick in den Aufbau von $\mathfrak{Z}'$ gewonnen.

Im allgemeinen Fall aber bleibt noch eine wichtige Frage zu beantworten: Nach 1. braucht man zur Entwicklung der Idealtheorie von $\mathfrak{Z}'$ die Menge N'_p aller der diskreten Bewertungsringe, die man erhält, wenn man die zu den minimalen Primidealen $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{Z}'$ gehörigen Quotientenringe bildet. In welcher Beziehung steht nun N'_p zu der Bewertungsringmenge M'_p, auf die wir zunächst die Untersuchung von $\mathfrak{Z}'$ gegründet haben? Die Antwort lautet einfach:

Satz 3. *Die Mengen N'_p und M'_p sind stets identisch.*

Der Beweis soll mit Rücksicht auf spätere Betrachtungen etwas umständlicher geführt werden, als an und für sich nötig wäre.

a) Jeder Quotientenring $\mathfrak{Z}'_{\mathfrak{p}'}$ aus N'_p gehört zu M'_p. — In der Tat, nach 1. ist jedenfalls $\mathfrak{Z}'_{\mathfrak{p}'}$ ein diskreter Bewertungsring. Bedeutet ferner $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{Z}$ den Durchschnitt des definierenden Primideals $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{Z}$, so muß $\mathfrak{p}$ nach Beitrag III, Satz 8[8]) in $\mathfrak{Z}$ minimal sein, weil $\mathfrak{p}'$ in $\mathfrak{Z}'$ mini-

[7]) Vgl. z. B. Idealbericht 48 und die dort für spezielle Bewertungen angegebenen Arbeiten von Deuring und Krull.

mal ist. Es ist also $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{D}$ ein zu N_p gehöriger diskreter Bewertungsring, und aus $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}'} \cap \mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{D}$ folgt sofort $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}'} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D}$, weil zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{K}$ kein echter Zwischenring liegt.

b) Jeder Bewertungsring $\mathfrak{D}'$ aus M'_p gehört zu N'_p. — Es sei $\mathfrak{m}'$ das Primideal von $\mathfrak{D}'$, und es werde $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{J}'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{K}) \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{J}$ gesetzt. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ minimal. Aus $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{J} = (\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{J}') \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$ folgt weiter nach Beitrag III, Satz 8 [8]), daß auch $\mathfrak{p}'$ in $\mathfrak{J}'$ minimal und infolgedessen $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}'}$ ein diskreter Bewertungsring sein muß. Aus $\mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}'} \subseteq \mathfrak{D}'$ ergibt sich schließlich sofort $\mathfrak{D}' = \mathfrak{J}'_{\mathfrak{p}'}$.

Erst mit Satz 3 haben wir alle Grundlagen gewonnen, die nötig sind, um von den endlichen algebraischen zu den unendlichen algebraischen Erweiterungen aufzusteigen.

3. Unendliche algebraische Erweiterungen [9]).

Es sei jetzt $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ein unendlicher algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{K}$, $\widetilde{\mathfrak{J}}$ der Ring aller von $\mathfrak{J}$ ganz abhängigen Elemente aus $\widetilde{\mathfrak{K}}$. $\widetilde{\mathsf{N}}_p$ bedeute die Menge der Quotientenringe, die zu den minimalen Primidealen von $\widetilde{\mathfrak{J}}$ gehören. Ist $\widetilde{\mathfrak{J}}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, so lassen sich die Sätze von 2. ohne jede Änderung anwenden. Wir wollen diesen zwar möglichen, aber äußerst seltenen Ausnahmefall von der Betrachtung ausschließen.

Mit $\mathfrak{K}^{(1)}, \mathfrak{K}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{K}^{(\sigma)}, \ldots$ [10]) bezeichnen wir die über $\mathfrak{K}$ endlichen Unterkörper von $\widetilde{\mathfrak{K}}$, mit $\widetilde{\mathfrak{J}}^{(\sigma)}$ den Durchschnittsring $\widetilde{\mathfrak{J}} \cap \mathfrak{K}^{(\sigma)}$; schließlich möge $\mathsf{N}_p^{(\sigma)}$ die Menge der durch die minimalen Primideale von $\mathfrak{J}^{(\sigma)}$ definierten Quotientenringe bedeuten. Nach 2. ist $\mathfrak{J}^{(\sigma)}$ stets eine endliche diskrete Hauptordnung, während $\mathsf{N}_p^{(\sigma)}$ gerade aus den sämtlichen Fortsetzungen der Bewertungsringe von N_p auf $\mathfrak{K}^{(\sigma)}$ besteht. — Es sei ferner $\widetilde{\mathfrak{J}}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ ein bestimmter Quotientenring aus $\widetilde{\mathsf{N}}_p$ und es sei $\mathfrak{p}^{(\sigma)}$ das Durchschnittsprimideal von $\tilde{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{J}^{(\sigma)}$. Dann muß $\mathfrak{p}^{(\sigma)}$ in $\mathfrak{J}^{(\sigma)}$ minimal sein, weil $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $\widetilde{\mathfrak{J}}$ minimal ist, und aus $\widetilde{\mathfrak{J}}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cap \mathfrak{K}^{(\sigma)} \supseteq \mathfrak{J}^{(\sigma)}_{\mathfrak{p}^{(\sigma)}}$ folgt sofort, daß $\widetilde{\mathfrak{J}}_{\tilde{\mathfrak{p}}} \cap \mathfrak{K}^{(\sigma)}$ mit dem diskreten Bewertungsring $\mathfrak{J}^{(\sigma)}_{\mathfrak{p}^{(\sigma)}}$ identisch ist (vgl. Abschnitt a) des Beweises von Satz 3). — Aus der Tatsache aber, daß $\widetilde{\mathfrak{J}}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ mit jedem der Körper $\mathfrak{K}^{(\sigma)}$ einen diskreten Bewertungsring zum Durchschnitt hat, schließt man genau wie im Spezialfall der unendlichen algebraischen Zahlkörper:

[8]) Das ist die arithmetische Anwendung, auf die am Schlusse der Einleitung von Beitrag III hingewiesen wurde!

[9]) Zu den folgenden Betrachtungen vgl. vor allem § 4 und § 5 der zweiten in Anm. [6]) zitierten Arbeit!

[10]) Eine Wohlordnung der $\mathfrak{K}^{(\sigma)}$, wie wir sie durch unsere Bezeichnung angedeutet haben, ist an und für sich nicht unbedingt nötig!

Satz 4. *Die Ringe $\tilde{\mathfrak{Z}}_{\tilde{\mathfrak{p}}}$ aus $\tilde{\mathsf{N}}_p$ sind durchweg rationale Bewertungsringe.*

Dabei nennen wir, wie üblich, einen Bewertungsring $\mathfrak{B}$ rational, wenn seine Wertgruppe zu einer Additionsgruppe aus rationalen Zahlen isomorph ist, d. h. wenn zu zwei beliebigen, von 0 verschiedenen Nichteinheiten α und β aus $\mathfrak{B}$ stets zwei ganze Zahlen m und n so bestimmt werden können, daß $\frac{\alpha^m}{\beta^n}$ in $\mathfrak{B}$ Einheit wird. — Wir behaupten weiter:

Satz 5. *Die Ringe aus $\tilde{\mathsf{N}}_p$ sind nichts anderes als die Fortsetzungen der Bewertungsringe von N_p (oder auch von $\mathsf{N}_p^{(\sigma)}$ für beliebiges σ) auf $\tilde{\mathfrak{R}}$. — Es ist stets $\tilde{\mathfrak{R}} = \underset{\tilde{\mathfrak{B}}_\tau \subset \tilde{N}_p}{\Delta} \tilde{\mathfrak{B}}_\tau$.*

Der Beweis von Satz 5 wird durch genau dieselben Schlüsse erbracht durch die wir in 2. Satz 3 und Satz 1 bewiesen. Bei der Übertragung der Überlegungen von Satz 3 hat man sich auf Satz 4 (anstatt auf den i. a. nicht richtigen Satz 2) zu stützen, und dementsprechend an einigen Stellen mit einem „rationalen" statt mit einem „diskreten" Bewertungsring zu arbeiten. Abgesehen von dieser ganz unwesentlichen Änderung ist wörtliche Übertragung möglich. Aus Satz 4 und Satz 5 ergibt sich nun unmittelbar:

Satz 6. *Gründet man auf die Bewertungsringmenge $\tilde{\mathsf{N}}_p$ in $\tilde{\mathfrak{R}}$ eine „p-Operation", so ist diese als die naturgemäße „Fortsetzung" derjenigen p-Operationen anzusehen, die man nach 1. in $\mathfrak{R}$ auf die Menge N_p, in $\mathfrak{R}^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots$) auf die Menge $\mathsf{N}_p^{(\sigma)}$ gründen kann.*

Man steht jetzt vor der Aufgabe, in $\tilde{\mathfrak{R}}$ einen Überblick über die Menge $\tilde{\Sigma}_p$ der p-Ideale zu gewinnen, und insbesondere die multiplikativen Verknüpfungen der p-Ideale näher zu untersuchen, wobei natürlich die „p-Multiplikation" an Stelle der gewöhnlichen Idealmultiplikation zugrunde zu legen ist. Die Lösung lautet einfach:

Satz 7. *Alle Sätze, die im Spezialfall eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers für gewöhnliche Ideale und gewöhnliche Idealmultiplikation gelten, gelten mit unbedeutenden Änderungen des Wortlautes im allgemeinen Fall einer unendlichen algebraischen Erweiterung einer beliebigen endlichen diskreten Hauptordnung für p-Ideale und p-Multiplikation.*

Im einzelnen bedeutet das: Man mache die Menge $\tilde{\mathsf{N}}_p$ zu einem topologischen Raum, indem man zwei Bewertungsringe $\tilde{\mathfrak{B}}_{\tau_1}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_{\tau_2}$ aus $\tilde{\mathsf{N}}_p$ immer dann in dieselbe „σ-Umgebung" rechnet, wenn sie mit $\mathfrak{R}^{(\sigma)}$ den gleichen Durchschnitt haben. Ferner normiere man die Wertgruppe der Bewertungsringe $\tilde{\mathfrak{B}}_\tau$ aus $\tilde{\mathsf{N}}_p$ in geeigneter Weise und ordne mit Hilfe der normierten Wertgruppen jedem p-Ideal $\tilde{\mathfrak{a}}_p$ aus $\tilde{\mathfrak{R}}$ im Raume $\tilde{\mathsf{N}}_p$ eine „Zahl-

funktion" $f(\mathfrak{B})$ und eine „Symbolfunktion" $\varphi(\mathfrak{B})$ zu. Dann ist jedes p-Ideal $\mathfrak{a}_p$ durch Zahl- und Symbolfunktion zusammen eindeutig bestimmt; es gilt der Satz, daß sich bei der p-Multiplikation zweier p-Ideale die zugehörigen Zahl- und Symbolfunktionen addieren, und man zeigt leicht, daß zu einem in $\mathfrak{N}_p$ beliebig vorgegebenem Zahl- und Symbolfunktionenpaar $f(\mathfrak{B})$, $\varphi(\mathfrak{B})$ dann und nur dann ein zugehöriges p-Ideal existiert, wenn $f(\mathfrak{B})$ und $\varphi(\mathfrak{B})$ gewissen einfachen „trivialen", „Beschränktheits-" und „Stetigkeitsbedingungen" genügen.

Hinsichtlich aller Einzelheiten (genaue Definition von Zahl- und Symbolfunktion; ausführliche Formulierung der „trivialen" usw. Bedingungen; Beweise) kann auf meine früheren Arbeiten über unendliche algebraische Zahlkörper verwiesen werden, in denen der Aufbau der Untersuchung bereits vollständig nach bewertungstheoretischen Gesichtspunkten durchgeführt ist. Nur in den folgenden Punkten bedarf meine frühere Darstellung kleiner Ergänzungen:

1. Die „Normierung" der Wertgruppe Γ, die zu einem bestimmten Bewertungsring $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{N}_p$ gehört, erfolgt am einfachsten durch die Festsetzung: Einem Elemente a aus $\mathfrak{K}$ soll in der zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Bewertung $\mathfrak{B}$ dann und nur dann der Wert 1 zugeschrieben werden, wenn a in dem diskreten Bewertungsring $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ Primelement ist.

2. In den Arbeiten über unendliche algebraische Zahlköper war jeder beliebige $\mathfrak{J}$-Modul aus $\mathfrak{K}$ unter die $\mathfrak{J}$-Ideale gerechnet worden. Dementsprechend war bei den „Beschränktheitsbedingungen", denen Zahl- und Symbolfunktion eines Ideals genügen müssen, nur von einer „Beschränktheit nach oben" die Rede. Verlangt man aber, wie üblich, von einem Ideal, daß es sich, falls nicht schon selbst ganz, durch Multiplikation mit einem von (0) verschiedenen Hauptideal in ein ganzes Ideal verwandeln läßt, so muß man der „Beschränktheitsbedingung nach oben" eine ganz entsprechend zu formulierende „Beschränktheitsbedingung nach unten" an die Seite stellen.

3. Die Tatsache, daß jedes p-Ideal durch Zahl- und Symbolfunktion zusammen eindeutig bestimmt ist, ergibt sich im allgemeinen Fall unmittelbar aus der bewertungstheoretischen Definition der p-Ideale.

4. Die Sätze, die bei den unendlichen algebraischen Zahlkörpern als „Folgerungen aus dem Teilerkettensatz" bezeichnet wurden, ergeben sich im allgemeinen Fall als Folgerungen aus dem in den endlichen diskreten Hauptordnungen $\mathfrak{J}^{(\sigma)}$ geltenden p-Z. P. I.

(Eingegangen am 16. Februar 1937)

Zur Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe.

Von

Wilhelm Specht in Breslau.

Ist $f(x)$ eine homogene ganzrationale Funktion von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit rationalen Koeffizienten, so bezeichne $f^P(x)$ diejenige Funktion, die aus $f(x)$ durch die Permutation

$$P = \begin{pmatrix} x_\nu \\ x_{a_\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

der Veränderlichen x_ν hervorgeht. Die Menge der Funktionen

$$h(x) = \sum_P a_P f^P(x),$$

in denen die Koeffizienten a_P beliebige rationale Zahlen bedeuten, und die Summierung über alle Permutationen der *symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ zu erstrecken ist, bildet dann einen Modul $\mathsf{M}(f(x))$, den ich als *den durch* $f(x)$ *bestimmten symmetrischen Modul* bezeichne [1]). Eine linearunabhängige Basis $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ dieses Moduls bestimmt wegen der linearen Beziehungen:

$$f_\alpha^P(x) = \sum_\beta d_{\alpha\beta}^P f_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

mit rationalen Zahlen $d_{\alpha\beta}^P$ in den Matrizen

$$D(P) = (d_{\alpha\beta}^P)$$

des Grades k *eine Darstellung der symmetrischen Gruppe* $\mathfrak{S}_n$, die als *die durch den Modul* $\mathsf{M}(f(x))$ *erzeugte Darstellung von* $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet werde [2]).

Unter einer *vollständig unsymmetrischen Funktion* verstehe man eine Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft, daß die $n!$ Funktionen $f^P(x)$ linearunabhängig sind, also eine linearunabhängige Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(f(x))$ bilden. In diesem Falle ist die durch den Modul $\mathsf{M}(f(x))$ erzeugte Darstellung die *reguläre* Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$, die bekanntlich jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ ebenso oft enthält, wie ihr Grad

---

[1]) Vgl. W. Specht, Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 696—711. Aus Bequemlichkeitsgründen zitiere ich unter Specht diese Arbeit in allen Dingen, die sich auf die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe beziehen. Dort finden sich alle näheren Literaturangaben.

[2]) Diese Ausdrucksweise ist berechtigt, da verschiedene Basen eines symmetrischen Moduls auf ähnliche Darstellungen führen, solche Darstellungen aber als nicht wesentlich verschieden anzusehen sind.

angibt[3]). Infolgedessen enthält, wie leicht zu zeigen ist, der Modul $\mathsf{M}(f(x))$ für eine vollständig unsymmetrische Funktion $f(x)$ zu jeder irreduziblen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ einen eindeutig bestimmten symmetrischen Untermodul M^*, der eine Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ erzeugt, die die vorgegebene irreduzible Darstellung von $\mathfrak{S}_n$, und nur diese, genau so oft enthält, wie ihr Grad angibt.

Die Anwendungen der Gruppentheorie in der Quantenmechanik lassen für gewisse Aufgaben die Bestimmung linearunabhängiger Basen dieser Untermoduln M^* des Moduls $\mathsf{M}(f(x))$ mit einer vollständig unsymmetrischen Funktion $f(x)$ als wünschenswert erscheinen[4]). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich, einer Anregung von Herrn E. Fues folgend, mit dieser Frage.

Da die symmetrischen Moduln $\mathsf{M}(f(x))$ mit vollständig unsymmetrischen Funktionen $f(x)$ sämtlich operatorisomorph[5]) sind, kann in den nachfolgenden Untersuchungen, wenn es nötig erscheint, die allgemeine völlig unsymmetrische Funktion $f(x)$ durch die einfachste Funktion dieser Art:

$$f(x) = x_1^1 x_2^2 \dots x_n^n$$

ersetzt werden.

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist bekanntlich gleich der Anzahl der Zerlegungen

$$n = (\mu) = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r \quad (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_r > 0)$$

von n in ganze positive Zahlen. Zwischen den Zerlegungen (μ) und den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ besteht eine tiefere eineindeutige Beziehung, auf deren Einzelheiten wir indes nicht näher einzugehen brauchen. Die irreduzible Darstellung, die der Zerlegung (μ) von n entspricht, möge mit $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, der Grad mit $f^{(\mu)}$ bezeichnet werden[6]). Der eindeutig bestimmte Untermodul des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(f(x))$, der eine Darstellung erzeugt, die die Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, und nur diese, genau $f^{(\mu)}$-fach enthält, wird entsprechend mit $\mathsf{M}^{(\mu)}$ bezeichnet.

Der Zerlegung (μ) von n entspricht das Schema

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \mu_1 \\ \mu_1 + 1 & \mu_1 + 2 & \dots & \mu_1 + \mu_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n - \mu_r + 1 & n - \mu_r + 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

---

[3]) Für allgemeine darstellungstheoretische Dinge vgl. I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsber. Akad. Berlin 1905, S. 406—432.

[4]) Vgl. E. Fues, Einführung in die Quantenmechanik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1935, Note 1 zu § 17, S. 165 ff.

[5]) Zu diesem Begriff vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I, J. Springer Berlin 1937 (2. Aufl.), Kap. VI § 44.

[6]) Vgl. Specht, Abschnitt II.

der Ziffern 1, 2, ..., n, in dem die ϱ-te Zeile jeweils μ_ϱ Ziffern ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$) enthält. Die Gruppe aller Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$, die die Ziffern der Zeilen des Schemas (1) nur unter sich vertauschen, heiße $\mathfrak{P}^{(\mu)}$; die Gruppe aller Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$, die die Ziffern der Spalten des Schemas (1) nur unter sich vertauschen, heiße $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ [7]).

Durch Anwendung einer Permutation R aus $\mathfrak{S}_n$ geht das Schema (1) in ein neues der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\mu_1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_{\mu_2} \\ \vdots & & & \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \ldots & \varrho_{\mu_r} \end{pmatrix}$$

über. Unter diesen $n!$ Schemata sind diejenigen ausgezeichnet, bei denen die Ziffern so angeordnet sind, daß sie in den Zeilen von links nach rechts, in den Spalten von oben nach unten nur zunehmen:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{\mu_1};\ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{\mu_2};\ \ldots;\ \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{\mu_r};$$
$$\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \varrho_1;\quad \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \varrho_2;\quad \ldots.$$

Die Anzahl dieser ausgezeichneten Schemata ist gerade gleich dem Grade $f^{(\mu)}$ der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ [8]). Die Permutationen, durch die sie aus dem Schema (1) hervorgehen, mögen

$$A_1, A_2, \ldots, A_f \qquad \text{mit} \qquad f = f^{(\mu)}$$

sein.

Beispielsweise erhalten wir für $n = 5$ und die Zerlegung $5 = 3 + 2$ die fünf ausgezeichneten Schemata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und ihnen entsprechend die fünf Permutationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet schließlich noch $\zeta(P)$ die Funktion, die für gerade Permutationen P den Wert $+1$, für ungerade Permutationen P den Wert -1 annimmt, so gilt:

Satz I. *Ist $f(x)$ eine vollständig unsymmetrische Funktion, (μ) eine Zerlegung von n, so bilden die $(f^{(\mu)})^2$ Funktionen:*

$$g_{\varkappa\lambda}(x) = \sum_{P,Q} \zeta(Q) f^{A_\varkappa^{-1} P Q A_\lambda}(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, f^{(\mu)}),$$

[7]) Diese beiden Gruppen sind häufig in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe herangezogen worden. Vgl. G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsber. Akad. Berlin 1903, S. 328—358.

[8]) Vgl. Specht, Abschnitt IV.

worin P alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}^{(\mu)}$, Q alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ durchläuft, eine linearunabhängige Basis des Untermoduls $\mathsf{M}^{(\mu)}$ des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(f(x))$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf

Satz II. *Ist $f(x)$ eine vollständig unsymmetrische Funktion, (μ) eine Zerlegung von n, so sei*

$$g(x) = \sum_{P,Q} \zeta(Q) f^{PQ}(x),$$

worin P alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}^{(\mu)}$, Q alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ durchläuft. Dann erzeugt der symmetrische Modul $\mathsf{M}(g(x))$ die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$.

Die $f^{(\mu)}$ Funktionen

$$g^{A_\varkappa}(x) = \sum_{PQ} \zeta(Q) f^{PQA_\varkappa}(x), \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, f^{(\mu)})$$

bilden eine linearunabhängige Basis des Moduls $\mathsf{M}(g(x))$.

Beweis: Die Funktion

$$F_1(x) = \sum_{P} f^{P}(x),$$

in der über alle Elemente P aus $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ summiert wird, ist eine Invariante dieser Gruppe, aber keiner umfassenderen Gruppe, da $f(x)$ nach Voraussetzung vollständig unsymmetrisch ist. Für eine derartige Funktion erzeugt der symmetrische Modul $\mathsf{M}(F_1(x))$ eine bestimmte Darstellung $\mathfrak{D}_1$, die die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ genau einmal enthält. Da die im Satze II angegebene Funktion $g(x)$ in diesem Modul $\mathsf{M}(F_1(x))$ enthalten ist, kann die durch den Modul $\mathsf{M}(g(x))$ erzeugte Darstellung eine irreduzible Darstellung höchstens in der gleichen Anzahl enthalten, in der sie in $\mathfrak{D}_1$ enthalten ist.

Ist ferner P ein beliebiges, aber festes Element der Gruppe $\mathfrak{P}^{(\mu)}$, so ist mit $f(x)$ auch $f^P(x)$ vollständig unsymmetrisch. Daher ist die Funktion

$$F_2(x) = \sum_{Q} \zeta(Q) f^{PQ}(x),$$

in der bei festem P über alle Elemente Q von $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ zu summieren ist, eine (alternierende) Invariante dieser Gruppe, aber keiner umfassenderen Gruppe. Für eine derartige Funktion erzeugt der symmetrische Modul $\mathsf{M}(F_2(x))$ eine bestimmte Darstellung $\mathfrak{D}_2$, die die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ genau einmal enthält.

Das Wesentliche ist nun, daß die beiden durch die Moduln $\mathsf{M}(F_1(x))$ und $\mathsf{M}(F_2(x))$ erzeugten Darstellungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ von $\mathfrak{S}_n$ die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$, und zwar genau einmal, als einzigen gemeinsamen Bestandteil enthalten[9]). Denn da jede lineare Beziehung der Form:

$$\sum_{R} a_R F_2^R(x) = \sum_{R,Q} a_R \zeta(Q) f^{PQR}(x) = 0,$$

[9]) Vgl. Specht, Abschnitt II.

worin bei festem P aus $\mathfrak{P}^{(u)} R$ alle Elemente von $\mathfrak{S}_n$, Q alle Elemente von $\mathfrak{Q}^{(u)}$ durchläuft, die entsprechende lineare Beziehung:

$$\sum_{R,\,Q,\,P} a_R \zeta(Q) f^{P\,Q\,R}(x) = \sum_R a_R g^R(x) = 0$$

nach sich zieht, weil doch die Moduln $\mathsf{M}(F_2(x))$ für verschiedene Elemente P aus $\mathfrak{P}^{(u)}$ operatorisomorph sind, kann die durch $\mathsf{M}(g(x))$ erzeugte Darstellung eine irreduzible Darstellung höchstens so oft wie $\mathfrak{D}_2$ enthalten. Da aber $g(x)$ von Null verschieden ist, erzeugt der symmetrische Modul $\mathsf{M}(g(x))$ die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(u)}$. Damit ist der erste Teil des Satzes II bewiesen [10]).

Um nun noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $g^{A_\varkappa}(x)$ (für $\varkappa = 1, 2, \ldots, f^{(u)}$) nachzuweisen, setze man

$$f(x) = x_1^1 x_2^2 \ldots x_n^n;$$

$$\varphi(x) = (x_1 x_2 \ldots x_{\mu_1})^0 (x_{\mu_1+1} x_{\mu_1+2} \ldots x_{\mu_1+\mu_2})^1 \ldots (x_{n-\mu_r+1} x_{n-\mu_r+2} \ldots x_n)^{r-1}$$

und bilde

$$g(x) = \sum_{P,\,Q} \zeta(Q) f^{P\,Q}(x); \quad \gamma(x) = \sum_Q \zeta(Q) \varphi^Q(x).$$

Ordnet man nun $\gamma(x)$ der Funktion $g(x)$ zu, so sind die beiden symmetrischen Moduln $\mathsf{M}(\gamma(x))$ und $\mathsf{M}(g(x))$ operatorisomorph, wie man leicht nachrechnet. Die $f^{(u)}$ Funktionen $\gamma^{A_\varkappa}(x)$ sind aber linearunabhängig [11]).

Da nun mit $f(x)$ auch die Funktion $f^{A_\varkappa^{-1}}(x)$ vollständig unsymmetrisch ist. bilden die Funktionen:

$$g_{\varkappa\lambda}(x) = \sum_{P,\,Q} \zeta(Q) f^{A_\varkappa^{-1}\,P\,Q\,A_\lambda}(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, f^{(u)})$$

bei festem Index $\varkappa$ eine linearunabhängige Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(g_{\varkappa 1}(x))$, der die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}^{(u)}$ erzeugt. Können wir daher zeigen, daß die Funktionen $g_{\varkappa\lambda}(x)$ linearunabhängig sind, so bilden sie offenbar eine Basis des Moduls $\mathsf{M}^{(u)}$, da sie alle im Modul $\mathsf{M}(f(x))$ enthalten sind.

Die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $g_{\varkappa\lambda}(x)$ folgt aber offensichtlich aus der Tatsache, daß die symmetrischen Moduln $\mathsf{M}(g_{\varkappa 1}(x))$ paarweise elementfremd sind. Diese Moduln sind unzerlegbar, da sie irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ erzeugen; daher folgt ihre Elementfremdheit ohne weiteres, wenn wir zeigen können, daß die Funktionen

$$g_\varkappa(x) = \sum_{P,\,Q} \zeta(Q) f^{A_\varkappa^{-1}\,P\,Q}(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, f^{(u)}),$$

---

[10]) Offenbar ist dieser Beweis nur eine Verallgemeinerung des Beweises von Satz I in Specht.

[11]) Dies ist der Inhalt des Satzes II in Specht. Die hier angegebenen Funktionen bilden das dort aufgestellte *Eigensystem*.

worin bei festem $A_\varkappa$ P alle Elemente von $\mathfrak{P}^{(\mu)}$, Q alle Elemente von $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ durchläuft, im Modul $\mathsf{M}(g_{\lambda_1}(x)) = \mathsf{M}(g_\lambda(x))$ dann und nur dann enthalten sind, wenn $\varkappa = \lambda$ ist.

Nehmen wir nun an, daß jede Funktion $h(x)$ des Moduls $\mathsf{M}(g_\varkappa(x))$, die eine alternierende Invariante der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ ist, die Form $h(x) = c \cdot g_\varkappa(x)$ besitzt mit einer (rationalen) Zahl c, so kann $g_\varkappa(x)$ als alternierende Invariante der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ im Modul $\mathsf{M}(g_\lambda(x))$ nur dann enthalten sein, wenn

$$g_\varkappa(x) = c \cdot g_\lambda(x)$$

ist. Setzt man aber wieder

$$f(x) = x_1^1 x_2^2 \dots x_n^n,$$

so zeigt man leicht durch Betrachtung der in $g_\varkappa(x)$ auftretenden Potenzprodukte, daß diese Gleichung nur für $c = 1$ und $\varkappa = \lambda$ bestehen kann.

Somit bleibt lediglich noch nachzuweisen, daß $g_\varkappa(x)$ bis auf konstante Faktoren die einzige alternierende Invariante der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ im Modul $\mathsf{M}(g_\varkappa(x))$ ist. Da diese Moduln $\mathsf{M}(g_\varkappa(x))$ (für $\varkappa = 1, 2, \dots, f^{(\mu)}$) sämtlich dem Modul $\mathsf{M}(g(x))$ mit der schon früher definierten Funktion

$$g(x) = \sum_{P,Q} \zeta(Q) f^{PQ}(x)$$

operatorisomorph sind, können wir die Untersuchung auf den Modul $\mathsf{M}(g(x))$ beschränken. Setzt man

$$F(x) = \sum_P f^P(x),$$

worin P alle Elemente von $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ durchläuft, so ist $\mathsf{M}(g(x))$ Untermodul des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(F(x))$, dieser Modul aber zu dem Modul $\mathsf{M}(\varphi(x))$ mit

$$\varphi(x) = (x_1 x_2 \dots x_{\mu_1})^0 (x_{\mu_1+1} x_{\mu_1+2} \dots x_{\mu_1+\mu_2})^1 \dots (x_{n-\mu_r+1} x_{n-\mu_r+2} \dots x_n)^{r-1}$$

operatorisomorph. Der Modul $\mathsf{M}(\varphi(x))$ enthält aber als (bis auf konstante Faktoren) einzige alternierende Invariante der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$ die Funktion

$$\gamma(x) = \sum_Q \zeta(Q) \varphi^Q(x),$$

wie man leicht zeigen kann, da für eine beliebige Permutation R aus $\mathfrak{S}_n$

$$\sum_Q \zeta(Q) \varphi^{RQ}(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sum_Q \zeta(Q) \varphi^{RQ}(x) = \pm \gamma(x)$$

ist. Somit besitzt der Modul $\mathsf{M}(F(x))$, also auch der Untermodul $\mathsf{M}(g(x))$ abgesehen von konstanten Faktoren die Funktion $g(x)$ als einzige alternierende Invariante der Gruppe $\mathfrak{Q}^{(\mu)}$.

(Eingegangen am 21. März 1937.)

Berichtigungen.

Zu Band 40:

S. 649, Zeile 9 v. o. soll lauten: „ist $\alpha\,\mathfrak{a}^{-1}$ auf Grund der Wahl der α_i zu $\mathfrak{b}_1$ teilerfremd, also“.

S. 702, Zeile 4 v. o. fehlt auf der rechten Seite der Gleichung der Faktor: $(1-x)^{-2\beta}$.

S. 702, Zeile 7 u. 8 v. o.: statt $(\lambda+2\alpha i)^{-2p-1}$, soll es heißen λ^{-2p-1}, statt $(\lambda-\alpha i)^2$ soll es heißen λ^2.

Zu Band 41:

S. 486 ist die folgende Fußnote anzufügen:

„Eine Buschenveloppe $B_r\,(r>3)$ hat mindestens einen Doppelpunkt, weil eine ebene Kurve mit Rückkehrpunkten erster Art ohne andere Punkt- oder Tangentensingularitäten genau drei Rückkehrpunkte besitzt. S. Fußnote [12]).“

S. 681 soll die rechte Seite Gleichung (4) lauten: $\frac{\pi}{2}\,J^2_{n+\frac{1}{2}}(z)$.

S. 685, Zeile 2 v. u.: statt „unrestrided“ lies „unrestricted“.

Zu Band 42:

S. 54, Zeile 5 v. o.: statt $p+p''$ lies $p+kp''$.

S. 56, Zeile 7 v. o.: statt Π lies Σ.

S. 134 in Gleichung (2, 12) soll es $e^{-\frac{1}{2s}}$ statt $e^{\frac{1}{2s}}$ heißen.

S. 255, Zeile 4 v. u.: statt $a,\ a,\ a^{k^2},\ldots$ soll es heißen $a,\ a^k,\ a^{k^2},\ldots$.

S. 352, Zeile 5 v. o.: statt $x_1=t$ soll es heißen $X_1=t$.

S. 440, Zeile 8 v. u.: statt Vollständigkeit soll es heißen Vollstetigkeit.

S. 441, Zeile 2 v. u.: statt S. 39 soll es heißen S. 468.

S. 448, Zeile 3 v. o.: statt $|x|>x^*$ soll es heißen $|x|<x^*$.

S. 478, Zeile 16 v. u.: statt $\varphi(x,y_1)$ soll es heißen $\varphi(x,\lambda_1)$.